

# Bærende konstruktioners sikkerhed



SBI-RAPPORT 211 · STATENS BYGGEFORSKNINGSINSTITUT 1990





SBI - publ.

# BÆRENDE KONSTRUKTIONERS SIKKERHED

OVE DITLEVSEN  
HENRIK O. MADSEN

STATENS BYGGEFORSKNINGSINSTITUT

EX.  
31 JULI 1992

00075P

STATENS BYGGEFORSKNINGSINSTITUT

EX-1  
24 OKT. 1990



**SBI-rapporter** er beretninger om afsluttede forskningsprojekter og afsluttede faser i fasedelte projekter samt beretninger fra visse konferencer og symposier.

**SBI-publikationer.** Statens Byggeforskningsinstituts publikationer findes i følgende serier: Anvisninger, Rapporter, Meddelelser, Byplanlægning, Landbrugsbyggeri, Pjecer, Ydeevnebeskrivelser, Beton, Nomogrammer og Særtryk. Salg sker gennem boghandelen eller direkte fra SBI. Institutets årsberetning og publikationsliste er gratis og kan rekvireres fra SBI.

**SBI-abonnement.** Institutets publikationer kan også fås ved at tegne et abonnement. Det sikrer samtidig løbende orientering om alle nye udgivelser. Information om abonnementernes omfang og vilkår fås hos SBI.

ISBN 87-563-0768-3.

ISSN 0573-9985.

Pris: Kr. 249,50 inkl. 22 pct. moms.

Oplag: 750.

Tryk: Bjørvig Offset, Hvidovre.

Skrivning på system T<sup>3</sup>: Jytte Bach Madsen og Annette Bærentzen.

Tegninger udført på AutoCAD: Esther Martens og Henrik Gluver.

Numeriske beregninger: Robert Olesen og Henrik Gluver.

Omslag: Peter Ditlevsen.

Udgivet med støtte fra:

Afdelingen for Bærende Konstruktioner, DTH

Det Norske Veritas, Danmark A.S.

A.S Veritas Research, Høvik, Norge

Veritas Sesam Systems A.S, Høvik, Norge

RCP GmbH, München, Tyskland.

Statens Byggeforskningsinstitut,  
Postboks 119, DK-2970 Hørsholm.  
Telefon 42 86 55 33.

Eftertryk i uddrag tilladt, men kun med kildeangivelsen:

*SBI-rapport 211: Bærende konstruktioners sikkerhed. 1990.*

## FORORD

I Dansk Ingeniørforenings (DIF's) norm for sikkerhedsbestemmelser for konstruktioner, DS 409, 1982, hedder det, at sikkerhedsvurdering normalt foretages med den i normen beskrevne partialkoefficientmetode, men at andre sikkerhedsmetoder anerkendt af DIF tillades anvendt, såfremt den fornødne information foreligger.

Daværende vicedirektør i SBI, Per Bredsdorff, iværksatte i den forbindelse et projekt med ekstern ekspertbistand med det formål at udarbejde en anvisning vedrørende beregning efter sikkerhedsindeksmetoden. Det lykkedes imidlertid ikke at få udarbejdet en let tilgængelig anvisning med et indhold, der kunne opnås bred enighed om, blandt andet fordi området endnu forskningsmæssigt er ungt, og forudsætningerne stadig debatteres og ændres.

Hos mange rådgivende ingeniører er der imidlertid interesse for at kunne foretage sikkerhedsvurderinger ved hjælp af de overordnede metoder bygget på et sandsynlighedsteoretisk grundlag – også selv om disse ikke er anerkendt af DIF. Nærværende publikation giver en omfattende indføring i de problemstillinger, der i denne forbindelse er relevante og kan derfor tjene både som lærebog og som baggrund for anvendelser i praksis blandt andet i forbindelse med udnyttelse af de edb-programmer, der nu er på markedet til udførelse af de ofte omfattende beregninger. Publikationen har herudover et sigte mod myndigheder, der beskæftiger sig med regler for bærende konstruktioners sikkerhed.

Samtidig med, at SBI takker dr.techn. Ove Ditlevsen og lic. techn. Henrik O. Madsen for udarbejdelse af publikationen, vil SBI også benytte lejligheden til at takke de personer, der gennem årene har deltaget i projektets tidligere faser og dermed bidraget til udviklingen på området. Specielt takkes lic.techn. Peter Bjerager og akademiingeniør Knud Skov, som i den forbindelse har ydet en stor indsats.

Statens Byggeforskningsinstitut

Afdelingen for bygningskonstruktioner, 1990

*Jørgen Nielsen*

## INDHOLD

<b>Forord</b>	5	<b>Kapitel 3. Probabilistisk information</b>	67
<b>Læsevejledning</b>	12	3.1 Tilfældighed og usikkerhed	67
<b>Kapitel 1. Indledning</b>	16	3.2 Statistisk usikkerhed	71
1.1 Probabilistiske og deterministiske modeller	16	3.3 Modelusikkerhed	78
1.2 Sikkerhedsproblemet	17	3.4 Modelusikkerhedsvurdering og hensyntagen hertil i sikkerhedsanalysen*	89
1.3 Formelle vurderingssystemer	19	3.5 Sikkerhedsanalysens objektivitet*	95
1.4 Tolerancesystemet	20	Referencer	99
1.5 Sandsynlighedsbegrebets fortolkning	21	<b>Kapitel 4. Det simple sikkerhedsindeks</b>	101
1.6 Sandsynlighedsfortolkningernes forenelighed	23	4.1 Begrænset probabilistisk information	101
1.7 Sikkerhedsmålets videnrelaterede natur	24	4.2 Regning med lineære sikkerhedsmargener	101
1.8 Flertydighedsproblemet	25	4.3 Lineær regression	111
1.9 Sikkerhedsniveaubestemmelse ved optimering	26	4.4 Geometriske beregninger i lineære rum ved brug af lineær regression	119
1.10 Konsekvensberegningssystemet bag normernes udvikling	27	4.5 Den standardiserede flerdimensionale normale fordeling	123
1.11 Optimalitetspostulatet	28	Referencer	126
1.12 De følgende kapitler	30	<b>Kapitel 5. Det geometriske sikkerhedsindeks</b>	127
1.13 Efterskrift	30	5.1 Ikke-lineær sikkerhedsmargen. Lineariseringsproblemet	127
Referencer	31	5.2 Det geometriske sikkerhedsindeks	130
<b>Kapitel 2. Partialkoefficientmetoden</b>	32	5.3 Bestemmelse af lokalt mest centralt grænsetilstandspunkt ved brug af lineær regression	133
2.1 Grænsetilstande	32	5.4 Historiske og bibliografiske noter	140
2.2 Sikkerhedsfaktorbegrebet og kravet om formuleringsinvarians*	36	Referencer	141
2.3 Sandsynlighedsbetragtninger vedrørende sikkerhedsfaktoren*	38	<b>Kapitel 6. Det generaliserede sikkerhedsindeks</b>	143
2.4 Partialkoefficienter	42	6.1 Mangler ved det geometriske sikkerhedsindeks	143
2.5 Normudvalgets frihed vedrørende valg af partialkoefficientværdier*	49	6.2 Det generaliserede sikkerhedsindeks	146
2.6 Lastmodeller	52	6.3 Grænser for sikkerhedsindekset for konveks polyhedral sikker mængde	153
2.7 Lastkombinationer*	56	6.4 Asymptotisk sikkerhedsindeks for krum grænsetilstandsflade. Definition af "næsten plan"-grænsetilstandsflade. (Enkeltpunkt FORM eller SORM)	165
2.8 DS 409's retningslinier for valg af partialkoefficienter på materialer*	60		
2.9 Historiske og bibliografiske noter	65		
Referencer	65		

8	INDHOLD
6.5	Polyhedral approksimation til vilkårlige sikre mængder (flerpunkt FORM eller SORM) 170
6.6	Polyhedral approksimation i singulære punkter på grænsetilstandsfladen (enkelt punkt multipel FORM eller SORM) 172
6.7	Historiske og bibliografiske noter 174
	Referencer 175
	<b>Kapitel 7. Transformation</b> 177
7.1	Informationsmæssig usymmetri 177
7.2	Nogle vigtige transformationer 182
7.3	Om differentiable afbildninger og flader 190
7.4	Det normale haleapproksimationsprincip til bestemmelse af lokalt mest centrale grænsetilstandspunkter 192
7.5	Tilnærmet beregning af værdier af den $m$ -dimensionale normale fordelingsfunktion ved brug af FORM eller SORM* 204
7.6	Historiske og bibliografiske noter 207
	Referencer 208
	<b>Kapitel 8. Følsomhedsanalyse</b> 209
8.1	Mål for betydning af inputvariable 209
8.2	Mål for betydning af inputparametre for elementsikkerhed 214
8.3	Mål for betydning af inputparametre for sikkerhed af parallelsystem* 219
8.4	Mål for betydning af inputparametre for sikkerhed af seriesystem* 226
8.5	Historiske og bibliografiske noter 227
	Referencer 227
	<b>Kapitel 9. Monte Carlo metoder</b> 228
9.1	Simuleringsprincippet 228
9.2	Retningssimulering 230
9.3	En klasse af nyttige simuleringsfordelinger* 237
9.4	Følsomhedsfaktorer* 248
9.5	Historiske og bibliografiske noter 250

INDHOLD	9
Referencer	251
<b>Kapitel 10. Lastkombinationer</b>	253
10.1	Ferry Borges–Castanheta lastmodellen 253
10.2	Rackwitz–Fiessler algoritmen for absolut kontinuerte fordelingsfunktioner 256
10.3	Klippede stokastiske variable som lastpulser 258
	Referencer 269
<b>Kapitel 11. Statistisk usikkerhed og modelusikkerhed</b>	270
11.1	Indledning 270
11.2	Likelihoodfunktionen. Sufficiente stikprøvefunktioner 271
11.3	Normalfordelingens naturligt konjugerede tætheder 273
11.4	Eksperimentel kalibrering af matematiske modeller* 287
11.5	Historiske og bibliografiske noter 298
	Referencer 299
<b>Kapitel 12. Beslutningsfilosofi</b>	300
12.1	Beslutningsproblemet 300
12.2	Von Neumanns og Morgensterns aksiomer for præferenceordning 302
12.3	Optimal sikkerhed 310
12.4	Usikker gevinstfunktion og usikker nyttefunktion* 315
12.5	Indflydelse af statistisk usikkerhed og modelusikkerhed* 316
12.6	Fejltagelsers indflydelse* 318
	Referencer 321
<b>Kapitel 13. Eksisterende konstruktioners sikkerhed</b>	322
13.1	Informationstyper for en eksisterende konstruktion 322
13.2	Generel systemformulering af opdatering ved brug af relationsinformation* 329
13.3	Beslutningskriterier for eksisterende konstruktioner* 347
13.4	Opdatering ved revision af grænsetilstanden 353
13.5	Historiske og bibliografiske noter 354
	Referencer 354

<b>Kapitel 14. Systemsikkerhedsanalyse</b>	356
14.1 Seriesystemer og parallelsystemer	356
14.2 Vilkårige systemer.	
Afbrydningsmængder og forbindelsesmængder*	357
14.3 Grænsetilstandsfunktionens afhængighed af inputvariablenes tidsudvikling	361
14.4 "Nøddefinitioner" af den sikre mængde	364
14.5 Idealplastiske systemer og idealskøre systemer*	368
14.6 Historiske og bibliografiske noter	374
Referencer	375
<b>Kapitel 15. Indledning til procesbeskrivelser</b>	376
15.1 Procesbegrebet. Gaussiske processer. Poissonprocesser	376
15.2 Øvre grænse for svigtsandsynligheden	379
15.3 Forventet antal udkrydsninger	381
15.4 Bestemmelse af forventet antal udkrydsninger ved Monte Carlo retningsmodelleringsmetode*	387
15.5 Nogle simple lastmodeller af Poissonstype	389
15.6 Historiske og bibliografiske noter	395
Referencer	395
<b>Appendiks 1. Normkalibrering</b>	397
A1.1 Normer	397
A1.2 Principper for normkalibrering	398
A1.3 Formulering af normoptimering	399
A1.4 Designværdiformat	404
Referencer	412
<b>Appendiks 2. Korrelationskoefficienter i Nataffordelingen</b>	413
<b>Appendiks 3. The computer program package PROBAN</b>	419
A3.1 Applications	419
A3.2 Technical capabilities	421
A3.3 Analysis results	423
A3.4 User specifications	425

A3.5 Modelling capabilities	425
A3.6 Computation methods	427
A3.7 Execution of PROBAN	429
A3.8 An interactive PROBAN session	430
A3.9 Background and history of PROBAN	433
A3.10 Further development	434
A3.11 Documentation	435
A3.12 Program information	435
<b>Appendiks 4. The PC program package STRUREL</b>	436
A4.1 The program module FORM	436
A4.2 The program module SORM	438
A4.3 The program module COMREL	438
A4.4 The program module SYSREL	439
A4.5 Problem size	440
<b>Appendiks 5. Proposal for a Code for the Direct Use of Reliability Methods in Structural Design (JCSS Working Document 1989)</b>	441
A5.1 Preface	442
A5.2 General	443
A5.3 Concept of adverse state	444
A5.4 Basic variables and uncertainty modeling	445
A5.5 Concept of event margin	449
A5.6 Reliability requirements	449
A5.7 Action modeling	452
A5.8 Structural resistance modeling	456
A5.9 Reliability models	459
A5.10 Reliability calculation methods	462
A5.11 List of symbols	464
A5.12 General bibliography	465
Appendix 1. Example of reliability requirements	467
Appendix 2. Example of action model parameters	468
Appendix 3. Example of model uncertainty specifications	470
<b>Stikord</b>	472

## LÆSEVEJLEDNING

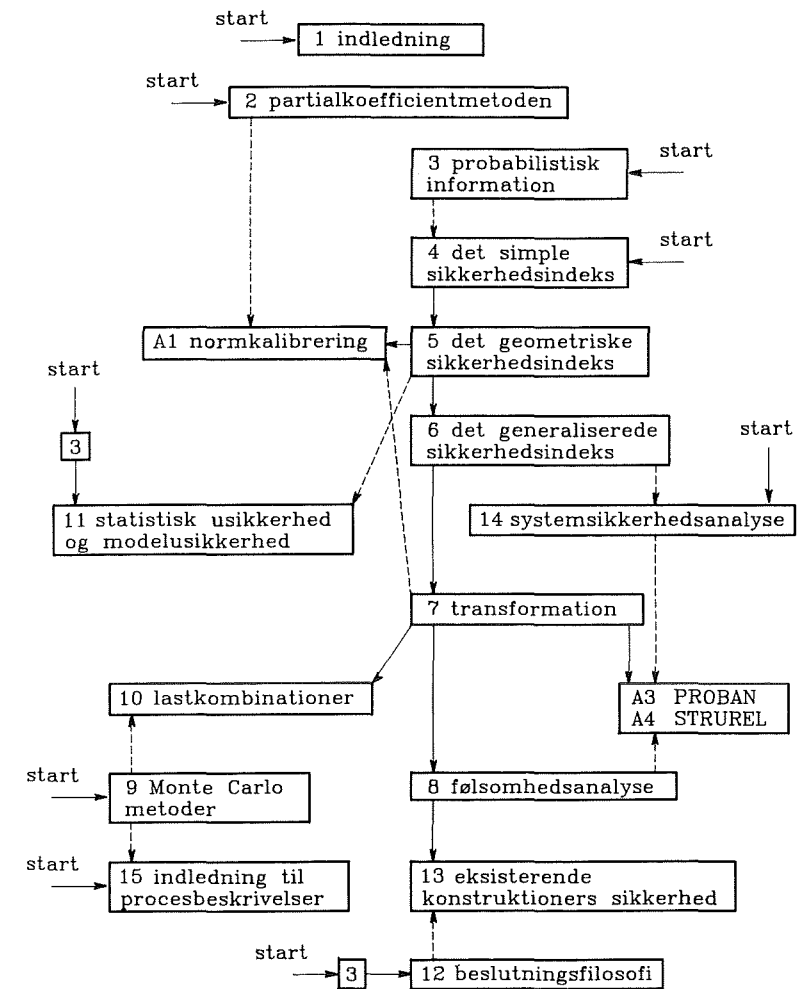
Den første danske lærebog om emnet udarbejdet med henblik på undervisningen ved ABK, DTH er "Konstruktioners sikkerhed" af C. Dyrbye, S. Gravesen, S. Krenk, N.C. Lind og H.O. Madsen fra 1979 (Den private Ingeniørfond ved Danmarks tekniske Højskole), som fortsat er særdeles læseværdig. Nærværende bog er ikke en fuldstændig afløser for "Konstruktioners sikkerhed". Ud over en behandling af sikkerhedsmetoderne indeholder den første bog et betydeligt materiale om specifikke styrke- og lastmodeller, emner som kun er kort eller slet ikke behandlet i nærværende bog. Til gengæld er nærværende bog betydeligt mere omfattende og videregående vedrørende sikkerhedsteoriens metoder blandt andet på grund af de analysemuligheder, som udviklingen af de regnetekniske hjælpemidler har åbnet.

Lærebogen "Konstruktioners sikkerhed" har dannet grundlag for en engelsksproget mere omfattende version udarbejdet af tre af forfatterne. Denne bog "Methods of Structural Safety" af H.O. Madsen, S. Krenk og N.C. Lind fra 1986 (Prentice-Hall, Inc.) har vundet betydelig international anerkendelse og kan anbefales som supplement til og overbygning på nærværende bog, specielt hvad angår styrke- og lastmodeller samt responsanalyse med brug af de stokastiske processers teori.

Indflydelsen af "Konstruktioners sikkerhed" kan også spores i en anden engelsksproget lærebog udarbejdet i et dansk-englisk samarbejde mellem P. Thoft-Christensen og M.J. Baker: "Structural Reliability Theory and Its Applications" fra 1982 (Springer-Verlag). Denne bog, der danner grundlaget for undervisningen i emnet ved AUC, er mere elementær og bred og derfor også lettere tilgængelig end "Methods of Structural Safety".

Nærværende bog "Bærende konstruktioners sikkerhed" kan læses af flere omgange afhængig af den grad af detailviden læseren søger. Figur 0.1 viser mulige startsteder og læseforløb. Dette betyder ikke, at krydsreferencer til stof uden for de anbefalede læseforløb ikke kan forekomme, men der kræves i så fald kun begrænset læsning ved disse referencer.

Foruden den vejledning dette læseforløbsskema giver, er en del afsnit mærket med \*, hvorved angives, at det pågældende afsnit kan overspringes uden at der af den grund opstår væsentlige vanskeligheder for den fortsatte



Fuldt optrukken pil [a] → [b] betyder, at forståelsen af b forudsætter kendskab til stoffet i a og tidligere i læseforløbet før a. Punkteret pil [a] -.-> [b] betyder, at visse resultater og begreber fra a eller tidligere i læseforløbet før a bruges nogle få steder i b.

Figur 0.1. Læseforløbsskema, der viser, at der er adskillige mulige startsteder og forløb for læsningen, samt at flere kapitler kan læses enkeltvis eller i par næsten uafhængigt af de øvrige kapitler.



læsning. Disse mærkninger er sat uafhængigt af læseforløbskemaet. Læsning i kapitelrækkefølge med overspringelse af de mærkede afsnit skønnes at give en tilstrækkelig første indføring i de probabilistiske metoder til vurdering af bærende konstruktioners sikkerhed og den filosofi, hvorpå metoderne er baseret. Denne indføring giver også et tilstrækkeligt grundlag for forståelse af såvel indholdet af de i appendiks 3 og 4 omtalte regneprogrampakker PROBAN og STRUREL som af appendiks 5, hvori der er gengivet et JCSS arbejdsdokument fra 1989 omhandlende et forslag til en norm for de probabilistiske metoders direkte brug til projektering af bærende konstruktioner.

Teksten er organiseret i hovedtekst, eksempler og bemærkninger. Symbolet  $\square$  for enden af en tekst viser, at her ender et eksempel eller en bemærkning. Inden for hvert afsnit er formler nummererede forfra som (1), (2), ... uden angivelse af afsnitsnummer. Reference til formelnumre af denne type er følgelig til formler i samme afsnit. Reference til en formel uden for afsnittet angives ved decimalklassificering fx (2.3.4), der henviser til formel (4) i afsnit 2.3. Figurer, større tabeller, eksempler og bemærkninger er nummereret fortløbende inden for hvert kapitel.

Læseren forudsættes at have et elementært kendskab til sandsynlighedsregning og statistisk tankegang. Det forudsættes således, at ord som stokastisk og deterministisk ikke volder kvaler, og at begreber som middelværdi, varians, standardafvigelse, variationskoefficient, kovarians, korrelationskoefficient, fordelingsfunktion, tæthedsfunktion, sandsynlighed, stikprøve etc er velkendte. Til hjælp for opfriskning af hukommelsen er der på relevante steder indsat særlige bemærkninger, der kortfattet opsummerer de i den givne sammenhæng vigtigste definitioner og sætninger. Nødvendige matematiske begreber, der skønnes at gå ud over den helt elementære almenviden, er indført mere grundigt.

Tilsvarende bemærkninger gælder vedrørende det nødvendige kendskab til statik og styrkelære for bærende konstruktioner. I det store og hele kræves kun kendskab til ligevægtsprincipperne, til begreberne spænding og tøjning og til elementær elasticitetslære og plasticitetsteori.

I mangel af gode danske ord vil visse ikke almindelige fremmedord blive brugt i fremstillingen. Ordet "stokastisk" er af denne art. Det samme gælder ordet "probabilistisk", der er vanskeligt at oversætte til en kort form. For eksempel menes med "probabilistisk model" en model, der ikke blot indehol-

der matematiske begrebsdannelser fra sandsynlighedsregningen, men også opererer med dens regneregler. En oversættelse til "sandsynlighedsmæssig" vil ikke have den rette klang, og kan være misledende. En anden anglicisme er ordet "respons", hvor oversættelse til ord som "svar" eller "virkning" ikke er tilfredsstillende. Visse ord fra edb-sproget må også tolereres. Eksempler er "input" og "output". Disse ord vil blive brugt i sammensætningerne "input-variable" og "outputvariable" i stedet for de gode danske ord "uafhængige variable" og "afhængige variable" kendt fra elementær matematisk analyse. Dette skyldes muligheden for forveksling med begreberne stokastisk uafhængighed og afhængighed.

# 1. INDLEDNING

## 1.1 Probabilistiske og deterministiske modeller

Probabilistisk konstruktionsanalyse består i kunsten at formulere en matematisk model, indenfor hvilken man kan stille og få svar på spørgsmålet: "Hvad er sandsynligheden for, at en bærende konstruktion opfører sig på en specificeret måde, når det er givet, at en eller flere af konstruktionens materialeegenskaber eller geometriske mål og egenskaber er af en vis tilfældig eller ufuldstændig kendt natur, og/eller at konstruktionens påvirkninger i visse henseender har tilfældige eller ufuldstændigt kendte egenskaber?"

Probabilistisk konstruktionsanalyse kan opfattes som en udvidelse af deterministisk konstruktionsanalyse, der består i kunsten at formulere en matematisk model, indenfor hvilken man kan stille og få svar på spørgsmålet: "Hvordan opfører en bærende konstruktion sig, når dens materialeegenskaber, geometriske egenskaber og påvirkninger alle er entydigt fastlagt?"

Probabilistisk analyse er en udvidelse af deterministisk analyse, fordi deterministiske størrelser kan opfattes som stokastiske variable af særlig triviel natur. Deres tæthedsfunktioner er blot sammentrækninger til koncentrerede sandsynlighedsmasser af størrelsen 1. Hvis en deterministisk model behandles som en probabilistisk model, vil svaret på det ovenfor stillede spørgsmål om sandsynligheden være enten 0 eller 1. Hvis svaret er 1, er den på forhånd specificerede opførelsmåde netop svaret på det for den deterministiske model formulerede spørgsmål. Da hændelser, der har sandsynligheden 0 for at forekomme, er uden interesse, søger man naturligvis efter den opførelse, der har sandsynligheden 1 for at forekomme, hvilket er ækvivalent med den deterministiske analyses problemstilling: "Hvilke dimensioner skal konstruktionen gives, for at en specificeret opførelse inden for modellens rammer netop fremkaldes af en given påvirkning?"

Probabilistisk konstruktionsdimensionering er et beslutningsproblem føjet oven på probabilistisk konstruktionsanalyse. Spørgsmålet kan formuleres således: "Hvilke dimensioner skal konstruktionen gives, for at den indenfor den probabilistiske models muligheder har optimale egenskaber i en given, veldefineret forstand?" Dette spørgsmål kan gives den ækvivalente formulering:

ring: "Hvilken værdi skal sandsynligheden for en specificeret opførelse være, for at konstruktionen i en veldefineret forstand er optimalt dimensioneret med hensyn til denne opførelse?"

Ingeniørmæssig vurdering er kunsten at kunne afgøre, om resultater opnået fra en konstruktionsanalyse- eller dimensioneringsmodel er tilstrækkeligt realistiske til, at ingeniøren tør basere sine praktiske beslutninger på disse resultater. Formuleringen af en matematisk model er naturligvis styret af ønsket om at opnå en realistisk beskrivelse, men det er også nødvendigt, at modellen bliver operationel i den forstand, at den er egnet for løsning, dvs at den kan levere svar på stillede spørgsmål. Et vigtigt aspekt i modelformuleringsprocessen er derfor kunsten at afbalancere realisme mod håndterbarhed.

## 1.2 Sikkerhedsproblemet

I denne sammenhæng udgør spørgsmålet om bærende konstruktioners sikkerhed en ganske særlig problemkreds. For at forstå dette problems natur er det instruktivt først at se på problemet i et tankeeksperiment, hvor verden opfører sig under fuld deterministisk kontrol. Vi forestiller os et projekt for en bærende konstruktion, der relativt til en given lastkonfiguration har bæreegenskaber, der kan forudsiges ned til mindste detalje. Den givne lastkonfiguration indeholder en fri parameter (kaldet lastparameteren), som ved sin værdi fastlægger lastniveauet. Jo større lastparameter, des større lastniveau. Vi forestiller os endvidere, at den planlagte konstruktion har følgende egenskab. For enhver værdi af lastparameteren er det muligt at dimensionere konstruktionen således, at den netop vil være på grænsen mellem den situation, hvor konstruktionen kan bære lasten og den situation, hvor konstruktionen svigter i en eller anden forstand. Hvis den betragtede lastkonfiguration med sikkerhed er den eneste, konstruktionen bliver udsat for, og den fremtidige maksimale værdi af lastparameteren kendes med sikkerhed, da vil det naturligvis netop være tilstrækkeligt sikkert at dimensionere konstruktionen således, at grænsesituationen lige akkurat ikke indtræder for den maksimale værdi af lastparameteren.

Det er åbenbart, at enhver tvivl om værdien af den maksimale lastparameter eller enhver tvivl om konstruktionens bæreevne udtrykt ved lastparameterens værdi i grænsesituationen (grænselastværdien) rejser et spørgsmål

om sikkerhed. Selv inden for dette tankeeksperiments deterministiske verden giver ingeniørens tvivl om sit kendskab til de eksakte parameterværdier anledning til et sikkerhedsproblem: Hvor meget større end den efter bedste overbevisning ansatte maksimale lastparameter skal grænselastværdien sættes til i ingeniørens bæreevne-model, for at han eller hun kan stå inde for, at konstruktionen ikke vil svigte under brug, eller i det mindste at der er uhyre lille risiko for et sådant svigt. Forskellen mellem de to værdier kan vi betegne som sikkerhedsmargenen.

Problemetets natur er sådan, at det ikke lader sig besvare alene ved teoretiske overvejelser. Ingeniørprofessionens opsamlede erfaringer fra praktiske udøvelser af ingeniørkunsten må nødvendigvis danne grundlaget for værdiansættelser for sikkerhedsmargener. Det er på den anden side klart, at mangfoldigheden af bærende konstruktioner er så stor, at der er brug for en metode til strukturering, dvs til rationel analyse og beskrivelse af disse erfaringer.

Samfundets reaktion på for hyppige forekomster af svigt vil afsløre, om sikkerhedsmargenerne af ingeniørprofessionen generelt er sat for lavt. På den anden side vil forsigtige valg af store sikkerhedsmargener svække den økonomiske konkurrenceevne eller ligefrem være ressource-spild.

For overhovedet at kunne styre mod optimal beslutningstagen må et rationelt struktureret modelredskab være til rådighed, om ikke altid for den enkelte ingeniør, der jo kan underkastes et formelt regelsæt, så for ingeniørprofessionen som helhed. Dette modelredskab må indeholde elementer, der muliggør kvantificering af forskellige usikkerhedstyper. I vort tankeeksperiment er usikkerhederne af den særegne art, der kendetegner ingeniørens tvivl om eget kendskab til de nøjagtige værdier af grænselastværdien og den maksimale værdi af lastparameteren. Kvantificering af sådanne usikkerheder kan være filosofisk tvivlsomme set fra et sædvanligt naturvidenskabeligt objektivitetssynspunkt. Ikke desto mindre er den menneskelige dømmekraft hinsides naturvidenskabeligt forklaring den grundpille, hvorpå al menneskelig aktivitet bygger. Teorien for bærende konstruktioner sikkerhed må nødvendigvis bygge på den antagelse, at ingeniørens udøvelse af professionel vurdering gennem erfaring og træning kan indpasses i en formel modelramme. Modeludformningen bør være adaptiv i den forstand, at den kan tilpasses ingeniørens muligheder for udøvelse af rimelige vurderinger. Omvendt må

ingeniøren tilpasse sin tankemåde til modellens sprog. Samtidig ændrer modellen gradvis status fra at være et mere eller mindre arbitrært formuleringssystem med lidet objektive værdiansættelser til et system, der er velegnet til forarbejdning og videregivelse af væsentlig ingeniørmæssig information.

### 1.3 Formelle vurderingssystemer

Der findes mange formelle, ofte matematisk prægede systemer, der kan bruges som støtte for udøvelse af vurderinger og bearbejdning af disse vurderinger. Det simpleste og mest udbredte system, som næsten alle mennesker kommer i berøring med, er karaktergivningssystemet i skolen. Den matematiske modeldannelse består for dette system i den uhyre forenkling, at universet af menneskelige kvaliteter antages at kunne afbildes som karakterer på en og samme aritmetiske skala. Ydermere at aritmetikens regneregler kan anvendes til ved gennemsnitsdannelse over usammenlignelige kvaliteter at karakterisere helheden af kvaliteter ved et enkelt eller nogle få tal. Videnskabeligt set synes denne model at være yderst tvivlsom. Ikke desto mindre viser erfaringen, at den trods åbenbare mangler og uretfærdigheder i praksis giver en til mange formål brugbar afspejling af i det mindste visse af en persons kvaliteter. Forklaringen herpå er, at systemet er adaptivt. Det fungerer på samme måde som et sprog. Hvis systemet indeholder regler, der er for stive til at kunne virke adaptive, ændres systemet til en større grad af blødhed. Trods åbenbare videnskabelige mangler giver brugen af systemet en bedre informationsbearbejdning og formidling end fornægtelse af noget som helst system.

Det er tilsyneladende let at acceptere, at karakterudsagn med upræcis mening er anvendelige på fænomener, der i deres natur er komplekse og fjernt fra de såkaldt naturvidenskabeligt eksakte fænomener. Det bliver undertiden betragtet som uvidenskabeligt at gætte om eller vurdere naturvidenskabelige fænomener med det formål at lade disse gæt være brugbare, ja endog værdifulde informationer i beslutningsprocesser vedrørende tekniske problemstillinger. Denne opfattelse af uvidenskabelighed i beslutningsprocessen er ejendommelig i betragtning af, at de teknisk-naturvidenskabelige områders mindre komplekse struktur skulle gøre de formulerede vurderingsmodeller mere

troværdige. Der er da også betydelig forskel på denne idealvidenskabelige opfattelse og praksis. Et simpelt eksempel af teknisk art er brugen af toleranceangivelser for geometriske mål på byggekomponenter.

#### 1.4 Tolerancesystemet

Når et geometrisk mål  $B$  på en byggekomponent ledsages af en toleranceangivelse  $T$ , angives herved sædvanligvis, at der stilles det målkvalitetskrav, at komponentens mål er indeholdt i intervallet  $[B-T/2, B+T/2]$ . Om kravet er overholdt for et konkret byggeelement, kan naturligvis kontrolleres med stor sikkerhed ved måling. Det er imidlertid sjældent, at alle producerede komponenter af en given type på produktionsstedet eftermåles med det formål at kassere elementer, der ikke opfylder et eller flere tolerancekrav. En sådan total kontrol er ressourcekrævende og også overflødig. I stedet anlægges det synspunkt, at produktionen af komponenter med hensyn til målfastheden skal udføres med en sådan omhu, at tolerancekravet kun sjældent er tilsidesat. På den anden side bør arbejdsprocessen ikke være forfinet i en sådan grad, at målene er overflødig nøjagtige, specielt hvis prisen herfor er mærkbar. Med dette synspunkt bliver tolerancekravet et adaptivt styringsredskab for produktionsprocessen. Toleranceangivelsen bliver herved analog til en karakter. Den er en etikette, som udvælger en kvalitetskategori svarende til en bestemt klasse af produktionsmetoder, mere end den er en eksakt afgrænsning af de geometriske mål. Da kravet kan efterprøves ved måling, kommer den i reklamationssituationer selvfølgelig til at virke som et eksakt begreb. Reklamationssituationer opstår dog sædvanligvis kun, hvis brugen af byggekomponenten volder væsentlige problemer i samlingsprocessen. Komponenter med mål udenfor toleranceintervallet vil ofte aldrig blive identificeret.

Det er nærliggende at benytte begreber fra sandsynlighedsregningen til at beskrive en produktionsmetodes egenskaber med hensyn til målfasthed. Man kan ved måling på passende store stikprøver fra produktionen uden principielle vanskeligheder frembringe klare data, der i form af histogrammer eller sumkurver direkte fortæller om hyppigheden af forekomsten af forskellige mål. Dette forudsætter dog en stabil produktionsmetode. Produktionsleders professionelle vurdering af, om en given produktionsproces er ude af kontrol med hensyn til det stillede tolerancekrav, kan være støttet på målin-

ger, men hans eller hendes indhøstede erfaring hjælper til at støtte vurderingen på mange andre ikke nødvendigvis kvantitative indikatorer.

#### 1.5 Sandsynlighedsbegrebets fortolkning

I nyere tid er der blevet udviklet formelle matematiske sprog forskellige fra sandsynlighedsregningen for vurderinger og deres bearbejdning. Det er sprog, der arbejder med grader af sandhed ("fuzzy logics") eller grader af medlemskab i en mængde ("fuzzy set theory"). Disse vurderingssystemer synes at have en vis succes, specielt inden for de ikke eksakte videnskabelige discipliner. De er også forsøgt anvendt inden for problemkredsen om bærende konstruktioners sikkerhed. Den dominerende opfattelse er imidlertid, at sandsynlighedsregningen er det mest hensigtsmæssige matematiske grundlag for vurdering af bærende konstruktioners sikkerhed. Den matematiske sandsynlighedsteori har nemlig det fortrin, at den tillader forskellige for anvendelserne lige nyttige, men meget forskellige fortolkninger af, hvad en sandsynlighed udtrykker. Vi så i toleranceeksemplet ovenfor, at sandsynlighedsbegrebet kan bruges til at modellere den hyppighed, hvormed en bestemt hændelse må forventes at forekomme ved mange gentagelser under kontrollerede omstændigheder. Dette er den såkaldte relative hyppighedsfortolkning (relative frequency interpretation). Det er oplagt, at sikkerhedsanalysen må tage hensyn til de uundgåelige og alle steds nærværende tilfældige fluktuationer i materialeegenskaber, geometriske mål og laster. Disse fluktuationer er i større eller mindre grad beskrivelige i form af histogrammer og sumkurver baseret på målte data. De er beskrivelige i form af relative hyppigheder. Dette er et element af usikkerhed, som kommer oven i den usikkerhed, der behæfter ingeniørens kendskab til den bærende konstruktion. Det er en usikkerhed, der, hvis den i sandsynlighedssprog inkluderes i den deterministiske model fra vort tankeeksperiment, ændrer denne model fra at være deterministisk til at være probabilistisk.

Sandsynlighedsteorien lader sig imidlertid også tolke som et regnesystem for professionelle vurderinger, hvor sandsynligheder udtrykker grader af tro på, at specificerede hændelser indtræffer eller at fremsatte påstande er sande. Vender vi tilbage til vort tankeeksperiment med den deterministiske model, kan vi forestille os, at ingeniøren har tilstrækkelig professionel erfaring til at

vurdere, ikke blot om hans bæreevneformel giver et resultat, der afviger fra den eksakte bæreevne, men også til at kunne give en mere eller mindre præcis kvantitativ vurdering af afvigelsens størrelse. En sådan vurdering kan eksempelvis bestå i, at ingeniøren angiver et interval og en tilhørende sandsynlighed for at det er en sand påstand, at den eksakte værdi er beliggende i det angivne interval. Mere nuanceret kan han eller hun give sit bud på sandsynligheden for, at den eksakte værdi er større end øvre intervalgrænse og på sandsynligheden for, at den eksakte værdi er mindre end nedre intervalgrænse.

Sådanne sandsynligheder kan tolkes som mål for ingeniørens grad af tro på eller viden om rigtigheden af sin påstand. De er fra et fysisk synspunkt ikke tolkelige som relative hyppigheder. På den anden side kan det støtte overvejelserne om sandsynlighedsfastsættelserne at tænke på disse sandsynligheder, som om de er relative hyppigheder i et tankeeksperiment. Han eller hun kan benytte sig af analogier til situationer, hvor relative hyppigheder er til rådighed, eller han eller hun kan sammenholde sine erfaringer (eller snarere professionens rapporterede erfaringer) fra mange forskellige konstruktionssituationer til at nå frem til en vurdering af den hyppighed, hvormed han eller hun mener at have haft ret i sin påstand.

En alternativ udformning af vurderingen er at udtrykke den ved en middelværdi, en standardafvigelse og måske endnu en størrelse, som udtrykker skævhed. Med skævhed menes et kvantitativt mål for overvægt af tro på, at den eksakte værdi snarere er til den ene side end til den anden side af middelværdien.

Det er antydnet ovenfor, at denne vurdering er problematisk for den enkelte praktiserende ingeniør, hvis den skal baseres på egne erfaringer. I praksis må der søges vejledning i anbefalinger, der er udarbejdet af en normdannende autoritet. Denne autoritet antages at repræsentere professionen og at have kompetence og kvalifikationer til at sammenfatte professionens erfaringer. Kvantificeringen af vurderingsusikkerheder må være givet eksplicit eller implicit i den norm, der regulerer sikkerhedsniveauet for de i praksis projekterede konstruktioner.

Der er andre vigtige typer af usikkerheder end de her omtalte to typer med tilhørende tolkninger af de sandsynligheder, der bruges til at kvantificere usikkerhederne. En mere detaljeret diskussion gives i kapitel 3.

## 1.6 Sandsynlighedsfortolkningernes forenelighed

På trods af de forskellige tolkninger af sandsynlighedsbegrebet tillader det altid et tankeeksperiment, hvori man forestiller sig gentagelsessituationer. Dette giver et mentalt holdepunkt for en tolkning af informationsindholdet i en sandsynlighedsangivelse. Derved får det matematiske sandsynlighedsbegreb et fortrin som vurderingsmodel frem for andre modeller som eksempelvis "fuzzy set theory".

Et andet filosofisk vigtigt og forenende aspekt er, at man kan påvise, at sandsynlighedsteorien er alle andre vurderingsmodeller overlegen i beslutningssituationer, der vedrører spil med gevinstregler af en vis simpel, men almindeligt forekommende art. Sandsynlighedsteoriens overlegenhed består i, at en spiller, der anvender en spillestrategi, der konsistent bygger på sandsynlighedsregningens regler, med en til vished grænsende sikkerhed i det lange løb vil tage gevinsten fra enhver modstander, der ikke følger disse regler. Denne egenskab er interessant for valget af grundlaget for en teori for bærende konstruktioners sikkerhed, fordi beslutningsmetoderne i konstruktionsprojektering kan opfattes som en spillestrategi i et spil mod naturen.

En probabilistisk model for bærende konstruktioners sikkerhed må nødvendigvis sammenblende sandsynligheder med tilsyneladende forskellige mulige tolkninger. Der har været rejst og rejses stadig filosofiske indvendinger mod sådanne sammenblandinger med påstand om, at de er utilladelige, fordi sandsynligheder af forskellig tolkning er usammenlignelige. Det er en almen erfaring, at det næsten altid er vanskeligt at nå til generel enighed om opklaringen af filosofiske problemer. Imidlertid har fremgangsmåder, der kan påstås at være filosofisk tvivlsomme, ikke sjældent vist sig åbenbart nyttige for løsninger af praktiske beslutningsproblemer. Metoderne har gennem deres brug vundet en sådan mening og objektivitet som beslutningsredskaber, at de filosofiske problemer har opløst sig i ingenting. Metoderne bliver acceptable, fordi de har vist sig nyttige.

Det filosofiske problem, som vi møder her med sammenblanding af "forskellige slags" sandsynligheder, kan måske løses for nogle af de skeptiske læsere ved, at de accepterer løsningen af et konkret sikkerhedsvurderingsproblem som udøvelsen af et tankeeksperiment, der på rationel vis sammenholder og samarbejder alle de usikkerheder, som ingeniøren forestiller sig kan

have betydning for konstruktionens sikkerhed. I dette tankeeksperiment betragtes alle sandsynligheder som repræsentanter for relative hyppigheder. Nogle af disse er måske fastlagt på grundlag af data fra gentagne målinger, andre er fremkommet ved en mental proces som i de tidligere omtalte tankeeksperimenter. Konstruktionens sikkerhed bedømmes ved et studium af dette tankeeksperimentelle spils egenskaber.

En anden måde at tænke på er at forestille sig alle den probabilistiske models sandsynligheder som værende personalistiske sandsynligheder, dvs den vurderende ingeniørs grader af tro på sine påstandes sandhed. Det vedrører ikke sikkerhedsmodellen, hvor ingeniøren i praksis får sine værdiansættelser fra. Nogle værdiansættelser fås måske fra præcise, statistiske analyser af målte data, medens andre er professionelle skøn. Ud af ingeniørens informationsindsamling kommer blot de inputværdier for de personalistiske størrelser, som sikkerhedsmodellen behøver for at kunne give kvantitative værdier for graden af konstruktionens sikkerhed, som den er efter ingeniørens overbevisning i afhængighed af den information, han eller hun besidder. Alle inputværdier bliver altså af den personalistiske type og vil variere mellem forskellige ingeniører, der prøver på at sikkerhedsanalysere den samme konstruktion. De inputværdier, der er baseret på målte data, vil blot være i højere grad reproducerbare fra ingeniør til ingeniør end de inputværdier, der fundamentalt er baseret på den enkelte ingeniørs vurderinger.

### 1.7 Sikkerhedsmålets videnrelaterede natur

Det fremgår af denne diskussion, at man ikke kan opfatte et udregnet kvantitativt mål for en konstruktions sikkerhed som et tal, der alene karakteriserer en fysisk egenskab ved konstruktionen. Sikkerhedsmålet må snarere tolkes som et mål for den samlede kvalitet af den ved beregningen benyttede viden om faktorer, der har betydning for bedømmelsen af konstruktionens egenskaber i sikkerhedsmæssig henseende. Hvis ingeniøren indhenter mere information og tager den i regning, vil sikkerhedsmålet i almindelighed ændre sig. Sikkerhedsmålet kan blive dårligere, hvis informationen omhandler uheldige, ikke før kendte egenskaber, eller det kan blive bedre. Vi skal se senere, at indhentning af mere information kan være gavnlig, selvom den omhandler dårligt nyt. Dette måske lidt overraskende forhold skyldes, at mangel på

information ofte kan medføre større usikkerhed om konstruktionens egenskaber og dermed om dens sikkerhed end sikker information om uheldige egenskaber.

Opdatering af sikkerhedsmålet er aktuel ved revurdering af en eksisterende konstruktions sikkerhed. En sådan revurdering kan for eksempel have det formål at vurdere, om en forstærkning af konstruktionen behøves i forbindelse med ændret brug af konstruktionen eller på grund af det slid og den nedbrydning, der har fundet sted, siden konstruktionen var ny. Opdateringen tjener samtidig til at frembringe et beslutningsgrundlag for dimensioneringen af den eventuelle forstærkning.

### 1.8 Flertydighedsproblemet

Det er muligt at formulere mange forskellige probabilistiske modeller for vurdering af en konstruktions sikkerhed. Disse modeller kan være mere eller mindre omfattende i deres detaljeringsgrad og derfor være mere eller mindre fleksible med hensyn til ny information. Det er fælles for alle probabilistiske sikkerhedsmodeller, at sikkerhedsmålet med hensyn til, at en defineret uheldig opførsel ikke finder sted, er entydigt relateret til sandsynligheden for, at den uheldige opførsel vil finde sted indenfor et specificeret tidsinterval, som for eksempel konstruktionens ansatte eksistenstid (designlevetid). Denne sandsynlighed betegnes svigtsandsynligheden. Ordet "svigt" står her kun som en etikette for den hændelse, der er defineret som uheldig opførsel af konstruktionen i en given sammenhæng. Eksempelvis kan svigt i en sammenhæng være defineret som en egentlig sammenstyrtning og i en anden sammenhæng være defineret som deformationer over visse givne grænser.

For den samme konstruktion, den samme definition af svigt og den samme mængde af information om konstruktionen er det naturligvis idealet, at forskellige modeller, der ikke strider åbenbart mod den givne information, giver stort set samme værdi af svigtsandsynligheden. Dette ideal viser sig imidlertid vanskeligt at opretholde, og des vanskeligere jo mindre svigtsandsynligheden er.

Hvis svigthændelsen ud fra enhver rimelig opfattelse kan karakteriseres som sjælden – dette er naturligvis sædvanligvis tilfældet for de svigt, der i praksis analyseres for bærende konstruktioner – må en fornuftig probabili-

stisk sikkerhedsmodel udformes således, at den knytter en lille sandsynlighed til svigthændelsen. Dette er et nødvendigt krav, hvis den mentale tolkning af sandsynligheden som en relativ hyppighed skal kunne opretholdes. Derfor er følsomheden over for valget af model et problem, som man ikke kommer uden om ved udformningen af regler for rationel bedømmelse af bærende konstruktioners sikkerhed. Problemet er analogt til de problemer, man står overfor ved styrkeprøvning af materialer og iøvrigt ved mange eksperimentelle prøvemetoder. Resultaterne er kun sammenlignelige, når de er frembragt ved samme prøvemetode. Denne kendsgerning har bevirket, at en lang række prøvningsmetoder er blevet standardiseret både nationalt og internationalt.

For med en given information at kunne sammenligne svigtsandsynligheder beregnet for forskellige konstruktionsudformninger og for forskellige svigtdefinitioner er det altså nødvendigt, at de alle er udregnet inden for den samme probabilistiske model. Dette vil være overholdt af enhver rationelt tænkende ingeniør, der i sit projekteringsarbejde nødvendigvis må foretage sådanne sammenligninger. Ingeniøren står imidlertid tilbage med et beslutningsproblem: Hvilken værdi skal sikkerhedsmålet have, for at konstruktionen lige netop må anses for at have tilstrækkelig sikkerhed mod den specificerede svigthændelse? Sikkerhedsmålet kan ændres til den ene eller den anden side ved ændring af konstruktionens dimensioner eller ved ændring af dens form og struktur. Hvor skal ingeniøren lægge sig fast? Svaret må af den enkelte ingeniør hentes i et af professionen med samfundets accept udarbejdet regelsæt, en norm, som er fremkommet ved en overordnet vurdering af problemet. Før vi kan gå ind på, hvorledes de nuværende sikkerhedsnormer er udformet, må vi analysere problemets natur mere indgående.

### 1.9 Sikkerhedsniveaubestemmelse ved optimering

Problemet om valg af sikkerhedsniveau kan analyseres ved hjælp af beslutningsteoretiske metoder. Disse metoder løser imidlertid ikke problemet, men omformer det til et mere klart fortolkeligt optimeringsproblem, der afbalancerer omkostninger og gevinster mod hinanden. Derved føres problemet fra et spørgsmål om valg af en tilstræbt værdi af sikkerhedsmålet til valg af omkostningsværdier knyttet til en svigthændelse. Da visse typer svigthændelser kan medføre tab af menneskeliv eller være fatale i deres samfundsmæssige

konsekvenser, kan det ikke generelt overlades til den enkelte praktiserende ingeniør at foretage de for beslutningsprocessen nødvendige værdiansættelser. Sådanne værdiansættelser er som nævnt ovenfor anliggender for hele ingeniørprofessionen eller måske snarere hele samfundet. De må direkte eller indirekte fastlægges i normer for professionens udøvelse. På grund af følsomheden over for valg af model er det klart, at omkostningsværdierne ikke kan fastsættes uafhængigt af den til analysen benyttede probabilistiske sikkerhedsmodel, med mindre man vil acceptere, at den resulterende konstruktionsdimensioner varierer fra model til model. Hvis ingen af modellerne strider åbenbart mod den til rådighed værende information, synes det svært at finde argumenter for at vælge den ene model frem for den anden.

### 1.10 Konsekvensberegningens principper bag normernes udvikling

Normformuleringsarbejdet er, som det hidtil er foregået, blevet grebet an på en helt anden måde, end hvad man måske kunne få indtryk af fra det foregående. Det har sin rod i en skridtvis historisk udvikling med tilbagevendende revisioner gennem de sidste 50 til 100 år. Man har naturligvis argumenteret inden for de rammer for tænkning om sikkerhedsproblemet, der har været sædvane og accepteret på det tidspunkt, hvor revisionsarbejdet har foregået. Kvantitative probabilistiske modeller hørte ikke med til disse rammer. Sandsynlighedsargumenter af kvalitativ art var dog mere eller mindre med i debatten og kunne påvirke værdiansættelserne. I det væsentlige var fundamentet en skridtvis forsigtig ændring af værdiansættelserne ved hver ny revision af normen – undertiden i sammenhæng med en ændring ikke blot af normens værdier, men også af normens form.

Værdiansættelserne i de først indførte normer byggede på en formalisering af praktiske regler, der udsprang af håndværkertraditionerne, som de havde udviklet sig op gennem tiderne. Det væsentlige argument var, at håndværkertraditionerne var et resultat af langsomt erhvervede erfaringer om, hvordan gode og sikre bygværker bør udformes. Denne sum af erfaringer var det nødvendige grundlag for en formaliseret ingeniørpraksis, som i stadig stigende grad ved anvendelse af matematiske modeller kunne afvige fra traditionelle konstruktionsløsninger gennem forsigtig brug af den indsigt, som naturvidenskabernes udvikling bragte med sig. Det var klart for normfædrene, at mate-

matiske modeller giver idealiserede billeder af virkeligheden, og at det er vanskeligt at garantere, at alle fænomener af mulig, væsentlig betydning for sikkerheden er inkluderet eller realistisk repræsenteret i modellerne. Hertil viste historien for mange tilfælde af fejltagelser med mere eller mindre katastrofale konsekvenser til følge. Man udformede derfor normen således, at dens værdiansættelser hørte til en vis klasse af deterministiske og passende simple fra ingeniøruddannelsen velkendte matematiske modeller for bærende konstruktioners opførelse. Inden for den definerede modelramme kunne man derefter fastsætte værdier for en eller flere såkaldte sikkerhedsfaktorer ved konsekvensberegninger. Sikkerhedsfaktorer er blot dimensionsløse ækvivalenter til sikkerhedsmargener (forhold i stedet for differencer). Disse konsekvensberegninger havde simpelt hen til formål at vise, at man ved brug af de givne sikkerhedsfaktorværdier i sædvanlige ingeniørberegninger kom frem til de samme konstruktionsdimensioner, som håndværkerreglerne gav. Med den større grad af problemstrukturering og fænomenforståelse, som den matematiske modelanalyse medførte, kunne man derefter på en styret måde langsomt ændre værdiansættelserne, således at større konstruktiv dristighed blev muliggjort.

Stigende indsigt med tilhørende nye modeller og en stadig bredere vifte af tilgængelig information har lejlighedsvis givet anledning til ændring af normens form i retning af større grad af nuancering. I hele denne følge af revisioner har konsekvensberegningen været det styrende element. Hvis normen fik en ny form, så blev det krævet, at den for visse typiske konstruktioner stort set gav de samme dimensioner som den gamle norm. Skiftet gav således en begyndelsessituation for mere nuancerede fremtidige revisioner, uden at bryde med kontinuiteten i byggepraksis.

### 1.11 Optimalitetspostulatet

Ved overgang til en norm, der giver værdiansættelser til brug i en probabilistisk sikkerhedsmodel, må problemet gribes an på samme måde. Det er de eksisterende konstruktioner dimensioneret efter de senest gældende normer, der helt konkret viser, hvor det af samfundet accepterede sikkerhedsniveau ligger. Man kan hævde det synspunkt, at samfundet ved sin accept af gældende byggepraksis implicit har værdisat omkostningerne ved svigthændelsen

således, at nugældende dimensioneringsregler for tiden er nært optimale. I modsat fald ville en revision af normens værdiansættelser være påkrævet. Tager man dette synspunkt som et brugbart postulat, vil det være muligt for hver eksisterende konstruktion og hver probabilistisk model at udregne tabsomkostningen ved en svigthændelse. Både denne tabsomkostning og den tilsvarende optimale svigtsandsynlighed vil variere med den anvendte probabilistiske model og det betragtede konstruktionseksempel, men alternative modeller giver nu selvsagt de samme resulterende dimensioner for det samme konstruktionseksempel.

Det følger af denne diskussion, at en probabilistisk norm nødvendigvis må standardisere i det mindste de elementer af de probabilistiske modeller, der ellers ved forskellige arbitrære valg uden klar modstrid med givne informationer fører til ubegrundede variationer af resultaterne. Normen kan efter sådanne standardiseringer specificere tabsomkostninger ved forskellige relevante svigttyper med tilhørende konsekvenser. Dette vil svare til en norm, der tillader den mest strukturerede beslutningsprocedure baseret på optimering. En simplere, men også mere stiv norm, fremkommer, hvis kun værdier af acceptable sikkerhedsmål specificeres. En sådan norm kan tage et vist hensyn til optimeringssynspunktet ved at arbejde med forskellige accepterede værdier af sikkerhedsmålet svarende til forskellige klasser af mere eller mindre alvorlige konsekvenser. Disse såkaldte sikkerhedsklasser kan i simpleste form være verbalt karakteriserede, således at der til karakteriseringen med konsekvenser af stigende alvorlighed svarer stigende sikkerhedsmål.

For at et normudvalg på rimelig rationel vis kan være i stand til at værdisætte sikkerhedsmålene i de forskellige sikkerhedsklasser inden for en standardiseret probabilistisk modelramme, må normudvalget basere sig på konsekvensberegninger under brug af det ovenfor fremsatte postulat om optimal dimensioneringspraksis. Resultatet er en probabilistisk norm af den stive type med hensyn til optimering. På den anden side er en sådan norm i visse væsentlige træk meget nærmere ved den form, som for eksempel de nugældende danske normer har. Den er derfor velegnet som grundlag for revision af sikkerhedsfaktorværdierne i nugældende normer i takt med øget almen information og indsigt.



### 1.12 De følgende kapitler

Næste kapitel redegør for de formalistiske regler for opnåelse af offentlig krævet sikkerhed, som er indeholdt i den nugældende danske norm. Reglerne indebærer, at alle beregninger i princippet foregår inden for modeller af deterministisk form, men værdifastsættelserne er til en vis grad probabilistisk begrundede.

De efterfølgende kapitler udvikler en probabilistisk normramme ved skridtvis at indføre så få nødvendige begreber og regnestørrelser som muligt for opnåelse af et formalistisk sikkerhedsvurderingssystem, der fanger de væsentligste træk af usikkerhedernes natur og deres samspil. En sådan fremstilling er karakteriseret ved, at simple og derfor mindre informationskrævende modelstrukturer går forud for mere strukturerede modeller. Dette er ikke alene pædagogisk begrundet, men lige så væsentligt begrundet ved flere andre forhold. Et af disse er, at mangel på detaljeret information medfører, at vurderingsstørrelser spiller en væsentlig rolle i realistisk sikkerhedsvurdering. De tilknyttede usikkerheders natur og behandling kan næppe bære mere end den simplest mulige pragmatisk begrundede struktur, som er konsistent med den valgte overordnede modelstruktur. (Ordet "pragmatisk" betyder her, at modelvalget skal være hensigtsmæssigt fra et matematisk operationelt synspunkt, men også at det skal være velegnet for kvantificering af professionelle vurderinger).

### 1.13 Efterskrift

Fra tid til anden har ingeniørprofessionen behov for at analysere grundlaget for dens beslutningsredskaber. Handler vi som ingeniører på en objektiv og rationel måde? Det foregående er et forsøg på at diskutere nogle vigtige sider af dette spørgsmål, der genoptages i slutningen af kapitel 3: "probabilistisk information". I 1975 gav en af pionererne i anvendelsen af probabilistiske metoder til bedømmelse af konstruktioners sikkerhed *C.A. Cornell* følgende svar [1.1]: "... Maybe, in fact, we don't know as engineers how to deal with "too much" realism in our models. Rather, perhaps progress is no more than a continuous refinement of operational procedures ("rules for a game") that capture just enough reality to protect the public and profession from low

quality practice, on one hand, and, on the other, to be supportive of the competent engineering designer who wants to check himself or to roughly calibrate his new design relative to others where we have experience."

### Referencer

- 1.1 C.A. Cornell: Some comments on second-moment codes and on Bayesian methods. In: A.M. Freudenthal, M. Shinozuka, I. Konishi and T. Kanazawa (eds.), *Reliability Approach in Structural Engineering*, Maruzen, Tokyo, 1975.

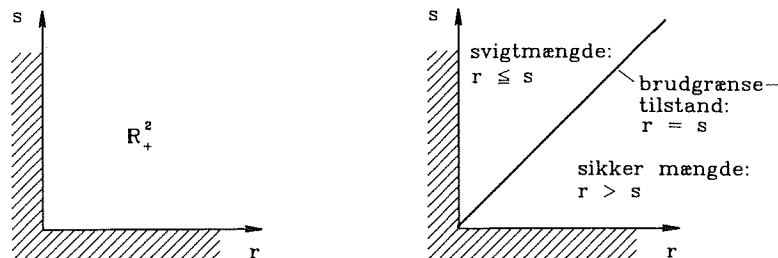
## 2. PARTIALKOEFFICIENTMETODEN

### 2.1 Grænsetilstande

Ved en grænsetilstand for en konstruktion forstås en tilstand, hvor konstruktionen er på nippet til ikke at kunne opfylde et stillet krav.

Kravet vil ofte være verbalt formuleret. Det vil imidlertid sædvanligvis blive tolket og formuleret inden for rammerne af en matematisk model for konstruktionens geometri, mekanik og påvirkninger. Lad  $x_1, x_2, \dots, x_n$  være de variable, som indgår på uafhængig måde i den del af den matematiske model, der vedrører geometri, styrkeegenskaber og påvirkninger. Variablene er frie i den forstand, at deres værdier kan vælges frit og uafhængigt inden for en vis delmængde af det  $n$ -dimensionale rum  $\mathbb{R}^n$ . Denne delmængde er modellens definitionsområde på samme måde, som en funktion af  $n$  variable har et definitionsområde. Til hvert valg af værdier svarer en entydigt defineret konstruktion. Denne er på dette stade et rent matematisk objekt, som måske eller måske ikke opfylder et givet grænsetilstandskrav. Den kan muligvis slet ikke realiseres fysisk.

**Eksempel 2.1** Betragt den yderst simple konstruktion, der består af et tov ophængt i en krog og bærende en byrde. Hvis krogn antages at kunne bære en langt tungere byrde end tovet kan bære, kan det sikkerhedsproblem, der svarer til et krav om, at tovet skal kunne bære byrden, formuleres med to frie variable, nemlig tovet's trækstyrke  $r$  og byrdens vægt  $s$ . Begge disse



Figur 2.1. Definitionsområde og brudgrænsetilstand i sikkerhedsanalysemodel for et tov, der bærer en byrde.

størrelser er per definition positive, og modellens definitionsområde er derfor delmængden  $\mathbb{R}_+^2$  af  $\mathbb{R}^2$ .

Det er klart, at denne tovkonstruktion ikke kan realiseres fysisk, hvis  $r$  og  $s$  vælges således, at  $r < s$ . Ikke desto mindre vil vi betragte hele  $\mathbb{R}_+^2$  som definitionsområde for konstruktionen opfattet som matematisk objekt. Hvis den matematiske model udvides med en geometrisk variabel  $a$ , der angiver tovet's tværsnitsareal, kan vi udregne tovspændingen som  $s/a$  uafhængig af den værdi,  $r$  måtte have. Hvis modellen yderligere udvides med Hooke's lov, der udtrykker, at tovet's relative forlængelse (tøjningen) er proportional med tovspændingen, samt med en tovlængde  $l$ , kan vi, under forudsætning af at krogn er ueftergivelig, udregne byrdens resulterende nedsynkning, når dens vægt gradvis påføres tovet. Nedsynkningen bliver  $ls/(aE)$ , hvor  $E$  er tovet's elasticitetskoefficient, uafhængig af værdien af  $r$ .

En analyse af et sikkerhedsproblem, hvor der udover det krav, at tovet skal kunne bære byrden, stilles det krav, at nedsynkningen ikke må overskride en given værdi  $\delta$ , bliver altså formuleret i de 5 variable  $a, l, E, r, s$ , der per definition alle er positive. Den udvidede models definitionsområde er derfor  $\mathbb{R}_+^5$ .  $\square$

Vi har her forudsat, at sikkerhedsproblemet lader sig beskrive i et endeligt antal variable  $x_1, \dots, x_n$ . Der findes praktisk relevante sikkerhedsproblemer, hvor modeldannelsen mest hensigtsmæssigt kræver brug af uendelig mange variable (funktioner), specielt hvad angår tilfældige egenskaber ved påvirkningernes variation i tiden og både disses og styrkeegenskaberne variation over konstruktionen. Denne første del af sikkerhedslæren for bærende konstruktioner vil udelukkende omhandle modeller af den simple type med endelig mange inputvariable  $x_1, \dots, x_n$ .

Et givet grænsetilstandskrav deler modellens definitionsområde i to mængder, den sikre mængde, og svigtomængden, hvori kravet er henholdsvis opfyldt og ikke opfyldt. Randen af den sikre mængde (som naturligvis også er randen af svigtomængden) kaldes grænsetilstanden. For de modeller, vi vil betragte, er grænsetilstanden af tilstrækkelig simpel struktur til at lade sig repræsentere som mængden af nulpunkter for en stykkevis differentiabel funktion  $g(x_1, \dots, x_n)$ , der er defineret i hele modellens definitionsområde, og

som antager positive værdier i det indre af den sikre mængde og negative værdier i det indre af svigtområdet. Hvis det yderligere gælder, at den sikre mængde er enkelt sammenhængende, så siger vi, at grænsetilstanden er regulær. Grænsetilstanden er altså givet som mængden af de inputvariabelværdier  $(x_1, \dots, x_n)$  for hvilke

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

Det bemærkes, at  $g$  ikke er entydig. For eksempel kan  $g^3$  bruges i stedet for  $g$  i (1). Dele af eller hele grænsetilstanden kan vælges at tilhøre svigtområdet eller den sikre mængde, eftersom hvad der i et givet problem måtte være hensigtsmæssigt.

Grænsetilstande kan være af forskellige kategorier. Hovedkategorierne er brudgrænsetilstandene og anvendelsesgrænsetilstandene. Brudgrænsetilstande modellerer sædvanligvis situationer, hvor konstruktionen er på nippet til et egentligt sammenbrud, dvs til en irreversibel tilstand, der kan have katastrofal natur, og som kun lader sig udbedre ved reparation eller genopbygning. Anvendelsesgrænsetilstande svarer til grænsen mellem acceptable og uacceptable tilstande under normal brug. Disse tilstande er, hvad angår direkte skade på konstruktionen, ofte reversible i den forstand, at konstruktionen ved aflastning passerer tilbage til den sikre mængde. Overskridelse af anvendelsesgrænsetilstande kan dog også forårsage varige beskadigelser af konstruktionen, såsom revnedannelser eller andre synlige defekter. Disse vil i almindelighed ikke udgøre et sikkerhedsproblem i kategorien brudgrænsetilstande, såfremt almindelig løbende vedligeholdelse af konstruktionen foretages.

**Eksempel 2.2** Brudgrænsetilstanden for tovet i eksempel 2.1 er givet ved nulpunkterne for funktionen

$$g(r, s) = r - s \quad (2)$$

Brudgrænsetilstanden er altså givet ved  $r = s$ , svigtområdet ved  $r \leq s$ , og den sikre mængde ved  $r > s$ , se figur 2.1.

Kravet om, at byrdens nedsynkning højst må være en given værdi  $\delta$ , er af kategorien anvendelsesgrænsetilstand. Funktionen  $g$  kan her vælges som

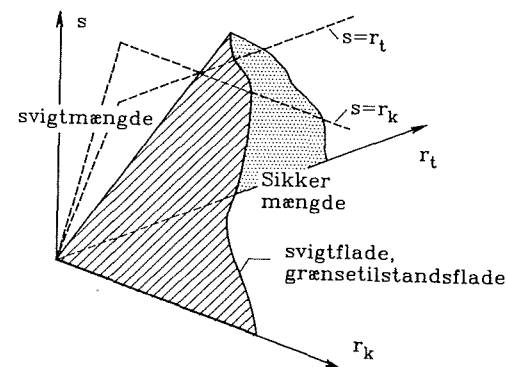
$$g(a, l, E, r, s) = \delta a E - l s \quad (3)$$

Anvendelsesgrænsetilstanden er altså givet ved  $\delta a E = l s$ , svigtområdet ved  $\delta a E < l s$  og den sikre mængde ved  $\delta a E \geq l s$ .

I sikkerhedsanalysen vil de to grænsetilstande af forskellig kategori blive betragtet hver for sig. Anderledes stiller situationen sig, hvis for eksempel flere brudgrænsetilstande kan få betydning. I eksempel 2.1 blev det antaget, at krogens bæreevne var langt større end tovet's bæreevne. Lader vi denne antagelse bortfalde, må vi indføre endnu en variabel  $r_k$  til angivelse af krogens bæreevne. For tovet's bæreevne vil vi bruge betegnelsen  $r_t$ . Vi har da at gøre med en sammensat brudgrænsetilstand, som kan beskrives ved funktionen

$$g(r_k, r_t, s) = \min\{r_k, r_t\} - s \quad (4)$$

Den sikre mængde er fællesmængden af de to mængder givet ved  $r_k > s$  og  $r_t > s$ , medens svigtområdet er foreningsmængden af de to mængder givet ved  $r_k \leq s$  og  $r_t \leq s$ . Grænsetilstanden er givet ved  $\min\{r_k, r_t\} = s$ , se figur 2.2. □



Figur 2.2. Sammensat brudgrænsetilstand for et tov, der er fastgjort til en krog, og som bærer en byrde.

Under de anførte differentiabilitetsbetingelser for funktionen  $g$ , og for  $n = 3$ , bestemmer ligningen (1) åbenbart en stykkevis differentiabel flade. Grænsetilstanden betegnes derfor mere specifikt som grænsetilstandsfladen eller svigtfladen. Disse betegnelser bruges af praktiske grunde for ethvert  $n$ .

Den stykkevise differentiabilitet kommer typisk ind i problemet i situationer som i (4), hvor flere fysisk set forskellige muligheder er relevante.

Blandt de regulære grænsetilstandsproblemer udgør de, der har konvekse sikre mængder en særlig simpel, men i praksis meget hyppigt forekommende klasse. At den sikre mængde er konveks betyder, at alle punkter på en ret linie, der forbinder to punkter i den sikre mængde, er i den sikre mængde. Med andre ord, hvis to konstruktioner af en given type begge er sikre, da er enhver konstruktion, der er dimensioneret ved lineær interpolation (proportionering) mellem de to konstruktioner også sikker. De konvekse grænsetilstandsproblemer er specielt egnede for problemfri anvendelse af den deterministiske sikkerhedsmetode, som foreskrives i nugældende danske normer, og som kaldes partialkoefficientmetoden.

## 2.2 Sikkerhedsfaktorbegrebet og kravet om formuleringsinvarians \*

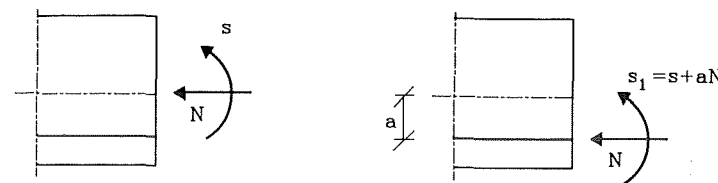
Sikkerhedseftervisning for en konstruktion er før i tiden ofte blevet gennemført ved at betragte forholdet mellem en beregnet bæreevne  $r$  (resistance, modstandsevne) og en hertil svarende lastvirkning  $s$  (stress). Dette forhold

$$n = \frac{r}{s} \quad (1)$$

blev kaldt sikkerhedsfaktoren. Da  $n > 1$ , hvis og kun hvis  $r > s$ , svarer  $n > 1$  til en konstruktion i den sikre mængde, medens  $n \leq 1$  svarer til en konstruktion i svigtområdet. Ved første øjekast kan man få det indtryk, at størrelsen af  $n$  er et mål for sikkerheden. For en given definition af  $r$ , og dermed også af  $s$ , vil en forøgelse af  $n$  naturligvis afspejle forøget sikkerhed givet at  $n > 1$ . Man må imidlertid bemærke sig, at sikkerhedsfaktoren er afhængig af, hvorledes modstandsevnen  $r$  er defineret. Eksempelvis kunne man med lige ret betragte forholdet  $r^3/s^3 = n^3$  som en sikkerhedsfaktor. Man vil måske hævde, at der findes en "naturlig" definition for  $r$  i en "naturlig" fysisk

dimension. Denne påstand kan ikke stå for nærmere efterprøvning. Det følgende eksempel illustrerer dette.

**Eksempel 2.3** Lad  $r$  være bøjningsbæreevnen af et jernbetontværsnit i en plan bjælke påvirket med tryknormalkraften  $N$  og bøjningsmomentet  $s$ . Snitkræfterne er henført til en given akse i afstand  $a$  fra armeringen, se figur 2.3. Valget af denne akse er imidlertid arbitrært. Et naturligt valg af  $a$  svarer måske til tværsnittets geometriske tyngdepunkt. Et lige så naturligt valg er i armeringens tyngdepunkt. Hvis bøjningsmomentet forårsaget af bjælkens påvirkning og henført til akse i afstanden  $a$  betegnes  $s$ , da bliver bøjningsmomentet  $s_1$  med hensyn til akse gennem armeringen givet ved  $s_1 = s + aN$ . Sikkerhedsfaktoren (1) kan derfor skrives



Figur 2.3. To forskellige repræsentationer af snitkræfterne i en plan jernbetonbjælke illustrerer formuleringsinvariansproblemet.

$$n = \frac{r_1 - aN}{s_1 - aN} \quad (2)$$

hvor  $r_1 = r + aN$  er den modstandsevne, som  $s_1 = s + aN$  skal sammenlignes med. Af (2) ses, at hvis  $n > 1$  for et valg af  $a$ , da er  $n > 1$  for alle  $a$ . Sikkerhedsfaktoren kan imidlertid antage alle værdier i det åbne interval fra 1 (for  $a \rightarrow \pm \infty$ ) til  $\infty$  (for  $a = s_1/N$ ). Kun værdien  $n = 1$  er invariant med hensyn til  $a$ . Dette svarer til, at grænsetilstanden er givet ved

$$g(r,s) = \frac{r}{s} - 1 = 0 \quad (3)$$

Den tilsvarende svigtflade er naturligvis uafhængig af  $a$ . □

Den arbitrære natur af definitionen af modstandsevnen  $r$  og den deraf følgende arbitrære værdi af sikkerhedsfaktoren gør værdiansættelserne vanskelige at håndtere i normsammenhæng. Specifikationer af  $n$  må nødvendigvis ledsages af angivelser af de formler for modstandsevnen, som svarer til den specificerede sikkerhedsfaktor. Det er imidlertid særdeles u hensigtsmæssigt, hvis normen skulle formuleres på et sådant detaljeringniveau, fordi det dels vil føre til stor uoverskuelighed og mangel på teoretisk sammenhæng, dels vil fastlåse udviklingen og anvendelsen af forbedrede eller mere universelle teoretiske modeller inden for de bærende konstruktioners mekanik.

Man må altså stille det krav, at normens sikkerhedsfastsættelser bliver uafhængige af arbitrære ækvivalente formuleringer af modstandsevner og tilsvarende lastvirkninger. Disse størrelser er jo outputvariable, hvis valgsnarere styres af ønsket om matematisk hensigtsmæssighed end af andre hensyn. For visse sikkerhedsanalyseproblemer, specielt inden for geoteknikken, er det endog sådan, at en modstandsevne ikke lader sig klart definere ved en enkelt skalar størrelse. Man kan udtrykke det her omtalte krav ved at sige, at normens sikkerhedssystem skal være formulering sinvariant.

### 2.3 Sandsynlighedsbetragtninger vedrørende sikkerhedsfaktoren \*

I en probabilistisk formulering er sikkerhedsfaktoren (2.2.1) en stokastisk variabel

$$N = \frac{R}{S} \quad (1)$$

hvor  $R$  og  $S$  er stokastiske variable svarende til den valgte modstandsevne-definition. Sandsynligheden for at konstruktionen ikke svigter er da

$$P(N > 1) = P(R > S) \quad (2)$$

I modsætning til sikkerhedsfaktoren selv er denne sandsynlighed invariant med hensyn til definitionen af  $R$ . Dette kræver selvfølgelig, at alle betragtede modstandsevne definitioner med hensyn til en given grænsetilstand og tilhørende lastvirkninger er defineret i et og samme sandsynlighedsrum.

**Eksempel 2.4** Lad os antage, at  $R$  og  $S$  er indbyrdes uafhængige og normalfordelte med parametre henholdsvis  $(\mu_R, \sigma_R)$  og  $(\mu_S, \sigma_S)$  ( $\mu$  = middelværdi,  $\sigma^2$  = varians). Da er

$$P(N > 1) = P(S - R < 0) = \Phi \left[ \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \right] \quad (3)$$

hvor  $\Phi$  er fordelingsfunktionen for den standardiserede normale fordeling. Dette resultat følger af, at differensen mellem to normalfordelte variable selv er normalfordelt.

Har man gjort dette modelvalg, kan man naturligvis ikke ved et alternativt valg af modstandsevne definition uden videre forudsætte, at den alternative modstandsevne og lastvirkning er indbyrdes uafhængige og normalfordelte. Her optræder formulering sinvarianskravet altså i en anden ikklædning. Fordelingsantagelser om  $R$  og  $S$  afhænger af den valgte definition af  $R$ . En probabilistisk norm kan derfor heller ikke på overskuelig måde bygges på outputvariable som  $R$  og  $S$ . □

På basis af (1) kan man definere en såkaldt *central sikkerhedsfaktor*  $n_c$  ved

$$n_c = \frac{E[R]}{E[S]} \quad (4)$$

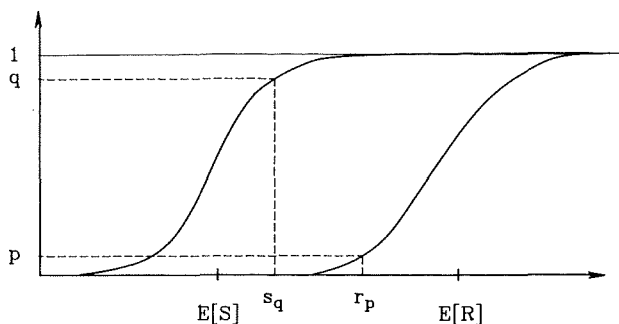
hvor  $E[\cdot]$  er middelværdien (forventningsværdien). Det bemærkes, at  $n_c$  ikke er det samme som  $E[N]$ , se eksempel 2.5. Mere almindeligt kan man definere en sikkerhedsfaktor

$$n_{p,q} = \frac{r_p}{s_q} \quad (5)$$

baseret på udvalgte fraktilværdier  $r_p$ ,  $s_q$  for  $R$  og  $S$  defineret ved, se figur 2.4,

$$P(R < r_p) = p \quad (6)$$

$$P(S < s_q) = q \quad (7)$$



Figur 2.4. Fordelingsfunktioner med fraktilværdier for R og S.

Eksempel 2.5 Hvis R og S antages at være normalfordelte som i eksempel 2.4, fås

$$n_c = \frac{\mu_R}{\mu_S} \quad (8)$$

medens  $E[N]$  ikke eksisterer. (Dette er en følge af, at S har en positiv sandsynlighedstæthed i enhver omegn af nul). Desuden fås

$$n_{p,q} = \frac{\mu_R + k_p \sigma_R}{\mu_S + k_q \sigma_S} = n_c \frac{1 - k_{1-p} V_R}{1 + k_q V_S} \quad (9)$$

hvor  $V_R = \sigma_R / \mu_R$ ,  $V_S = \sigma_S / \mu_S$  er variationskoefficienterne for henholdsvis R og S, og hvor  $k_p$  er defineret ved  $\Phi(k_p) = p$  (og tilsvarende for  $k_q$ ). Antag nu, at konstruktionen dimensioneres således, at (3) antager en given værdi  $1 - p_f$ , dvs således, at

$$\frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} = \beta \quad (10)$$

hvor  $\Phi(-\beta) = p_f$  er svigtsandsynligheden. Man kan da efter nogen regneri udtrykke den centrale sikkerhedsfaktor  $n_c$  ved  $\beta$  gennem formlen

$$n_c = \frac{1 + \beta \sqrt{V_R^2 + V_S^2 - \beta^2 V_R^2 V_S^2}}{1 - \beta^2 V_R^2} \quad (11)$$

Man bemærker, at  $n_c \rightarrow \infty$  for  $V_R \rightarrow 1/\beta$ . Heraf følger, at man slet ikke kan dimensionere konstruktionen til den til  $\beta$  svarende svigtsandsynlighed  $p_f$ , hvis  $V_R \geq 1/\beta$ . Dette er imidlertid en fysisk modelfejl, der består i, at normalfordelingen tillægger hændelsen  $R < 0$  en positiv sandsynlighed. For passende små værdier af  $V_R$  har fejlen ingen betydning, men modellen bliver meningsløs for værdier af  $V_R$  eller  $\beta$ , for hvilke  $V_R$  ikke er betydelig mindre end  $1/\beta$ . Et typisk valg af størrelsesorden for  $\beta$  vil være 4 eller 5. Normalfordelingsmodellen for R er derfor næppe rimelig for  $V_R$  større end ca  $0.15 \approx 1/6.7$ .

Den store variation af  $n_c$  med  $V_R$  og  $V_S$  for givet  $\beta$  (for  $\beta = 4$  er  $n_c = 1, 1.84, 2.76$  for henholdsvis  $V_R = V_S = 0, 0.1, 0.15$ ) illustrerer uhensigtsmæssigheden i at benytte den centrale sikkerhedsfaktor til værdiansættelser i en norm, der som ideal søger at fastholde værdien af  $\beta$  og dermed svigtsandsynligheden indenfor en given sikkerhedsklasse.

Hvis  $n_c$  givet ved (11) indsættes i (9) fås

$$n_{p,q} = \frac{1 - k_{1-p} V_R}{1 - \beta V_R} \frac{1 + \beta V_S \sqrt{1 + \left[\frac{V_R}{V_S}\right]^2 - \beta^2 V_R^2}}{(1 + \beta V_R) (1 + k_q V_S)} \quad (12)$$

Vælges  $p = 0.05$  og  $q = 0.98$  (typiske værdier brugt i de danske normer), fås  $k_{1-p} = 1.645$  og  $k_q = 2.054$ . For  $\beta = 4$  bliver  $n_{0.05,0.98} = 1, 1.27, 1.59$  for henholdsvis  $V_R = V_S = 0, 0.1, 0.15$ . Variationen af  $n_{0.05,0.98}$  ses for dette eksempel at være omkring 3 gange mindre end variationen af  $n_c$ . Dette forhold, at sikkerhedsfaktoren  $n_{p,q}$  ved passende valg af  $p$  og  $q$  for en fast værdi af  $\beta$  viser betydelig mindre variation med variationskoefficienterne på R og S end den centrale sikkerhedsfaktor, gør sig på analog måde gældende for de såkaldte partialkoefficienter. Disse er de fundamentale elementer i den sikkerhedsmetode, som benyttes i de nuværende danske normer. Herom

handler næste afsnit. □

**Øvelse 2.1** Antag, at  $R$  og  $S$  er indbyrdes uafhængige og logaritmisk normalfordelte. Det gælder da, at

$$E[\log R] = \log E[R] - \frac{1}{2} \text{Var}[\log R] \quad (13)$$

$$\text{Var}[\log R] = \log(1 + V_R^2) \quad (14)$$

og tilsvarende for  $S$ . (Indfør betegnelserne  $\mu_R$  og  $\mu_S$  for henholdsvis  $E[R]$  og  $E[S]$ ). Opskriv formler for svigtsandsynligheden  $P(R < S)$  og den centrale sikkerhedsfaktor  $n_c$ . Vis, at  $n_c$  er begrænset for alle endelige værdier af  $V_R$  og  $V_S$  (altså at defekten ved (11) ikke eksisterer her). Opskriv  $n_{p,q}$  under forudsætning af, at  $V_R^2 \ll 1$  og  $V_S^2 \ll 1$ , således at man kan sætte

$$E[\log R] \simeq \log E[R] \quad (15)$$

$$\text{Var}[\log R] \simeq V_R^2 \quad (16)$$

Undersøg variationen af  $n_c$  og  $n_{0.05,0.98}$  på samme måde som i eksempel 2.5.

## 2.4 Partialkoefficienter

Formuleringsinvarianskravet nødvendiggør, at sikkerhedsmetoden må knyttes til den mekaniske models inputvariable. I stedet for den arbitrære opdeling i modstandsevne og tilhørende lastvirkning må man gå tilbage til grænsetilstandsligningen (2.1.1)

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

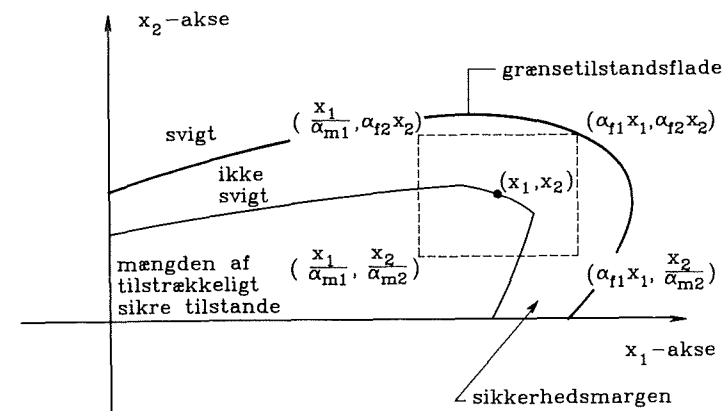
og knytte alle sikkerhedsforskrifter til modellens inputvariable  $x_1, \dots, x_n$ . I normsammenhæng bør disse inputvariable derfor være udtaget af en standardiseret klasse af variable, hvorpå normens forskrifter virker. Dette betyder

ikke nødvendigvis, at disse forskrifter er uafhængige af den model eller klasse af modeller, som de udtagne variable indgår i.

Partialkoefficientmetoden er i sine matematiske principper en deterministisk metode, der virker på følgende måde. For simpelhedens skyld vil vi betragte tilfældet  $n = 2$ . Svarende til hvert punkt  $(x_1, x_2)$  i modellens definitionsområde betragtes den åbne rektangulære omegn af  $(x_1, x_2)$ , der er defineret som det kartesiske mængdeprodukt

$$\left] \frac{x_1}{\alpha_{m1}}, \alpha_{f1} x_1 \left[ \times \left] \frac{x_2}{\alpha_{m2}}, \alpha_{f2} x_2 \left[ \quad (2)$$

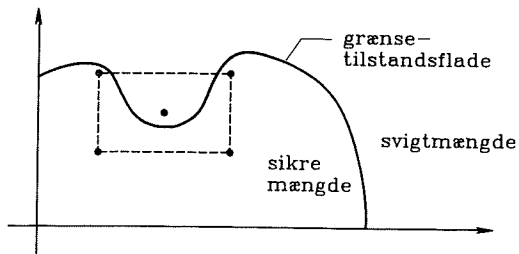
hvor  $\alpha_{m1}$ ,  $\alpha_{m2}$ ,  $\alpha_{f1}$ ,  $\alpha_{f2}$  er såkaldte partialkoefficienter med normforeskrevne værdier, der alle er større end eller lig med 1 (se dog senere). Hvis denne åbne omegn af  $(x_1, x_2)$  er en delmængde af den sikre mængde, da er den ved punktet  $(x_1, x_2)$  definerede konstruktion per definition tilstrækkelig sikker ifølge normen.



Figur 2.5. Partialkoefficientmetodens principielle virkemåde til normmæssig definition af mængden af tilstrækkeligt sikre tilstande for en konveks grænsetilstandsflade.

Ved betragtning af figur 2.5 ses, at partialkoefficientmetoden anvendt på konvekse grænsetilstandsproblemer frembringer en mængde af tilstrækkeligt sikre konstruktioner, der har den egenskab, at den er en delmængde af den sikre mængde og har en rand, der ikke har punkter fælles med grænsetil-

standsfladen. Denne egenskab er ikke nødvendigvis til stede for ikke konvekse grænsetilstandsproblemer. Således illustrerer figur 2.6 en tænkt situation, hvor  $(x_1, x_2)$  er et punkt i svigtområdet, medens de fire hjørner af den rektangulære omegn (2) ligger i den sikre mængde eller på grænsetilstandsfladen. Partialkoefficientmetoden skal derfor anvendes med særlig omtanke for ikke konvekse grænsetilstandsproblemer. Disse ikke konvekse problemer forekommer dog sjældent i praksis i forbindelse med anvendelse af partialkoefficientmetoden.



Figur 2.6. Illustration af partialkoefficientmetodens uhensigtsmæssighed ved grænsetilstandsflader, der ikke er konvekse.

Som den er beskrevet her, indeholder partialkoefficientmodellen i sig selv ingen muligheder for fastsættelse af værdier for partialkoefficienterne, således at der ved denne fastsættelse på rationel vis tages hensyn til de usikkerheder, som netop begrunder, at der nødvendigvis skal være en sikkerhedsmargen. Modellen er rent deterministisk, og dens værdifastsættelser må derfor baseres på en justering til resultater opnået ved hjælp af en passende realistisk probabilistisk model. Situationen er ganske som for sikkerhedsfaktoren i afsnit 2.3. Efter valg af en passende svigtsandsynlighed  $p_f$  fører den probabilistiske model for et givet konstruktionseksempel til en afstemning af konstruktionens tværsnitsdimensioner, materialestyrker og lastniveauer, således at inputvariablene  $x_1, \dots, x_n$  modelleret som stokastiske variable  $X_1, \dots, X_n$  har sandsynlighedsfordelinger, der netop giver svigtsandsynligheden

$$P[g(X_1, \dots, X_n) < 0] = p_f \quad (3)$$

Partialkoefficientmetoden står for den yderste forenkling, idet man repræsenterer de stokastiske variable  $X_1, \dots, X_n$  helt rudimentært ved at erstatte hver

af dem med en enkelt eller nogle få karakteristiske værdier i form af passende fraktilværdier, figur 2.4. I figur 2.5 kan punktet  $(x_1, x_2)$  være  $(E[X_1], E[X_2])$  og partialkoefficienterne  $\alpha_{m1}, \alpha_{m2}, \alpha_{f1}, \alpha_{f2}$  er da analoge til den centrale sikkerhedsfaktor i afsnit 2.3. For at opnå mindre følsomhed af partialkoefficienterne med hensyn til varierende standardafvigelser af de stokastiske inputvariable foretrækker man imidlertid i analogi med faktoren  $n_{p,q}$  i (2.3.9) at repræsentere hver af de stokastiske variable ved en bestemt øvre og en bestemt nedre fraktilværdi. De tilsvarende sandsynligheder er angivet i normen, der betegner fraktilværdierne som *karakteristiske værdier*. Lad de nedre og øvre karakteristiske værdier være henholdsvis  $\tilde{x}_{1k}, \dots, \tilde{x}_{nk}$  og  $\tilde{x}_{1k}, \dots, \tilde{x}_{nk}$ . Man dividerer da de nedre karakteristiske værdier med partialkoefficienter  $\gamma_{m1}, \dots, \gamma_{mn}$ , medens man multiplicerer de øvre karakteristiske værdier med partialkoefficienter  $\gamma_{f1}, \dots, \gamma_{fn}$ . De resulterende værdier

$$\frac{\tilde{x}_{1k}}{\gamma_{m1}}, \dots, \frac{\tilde{x}_{nk}}{\gamma_{mn}}, \tilde{x}_{1k} \gamma_{f1}, \dots, \tilde{x}_{nk} \gamma_{fn} \quad (4)$$

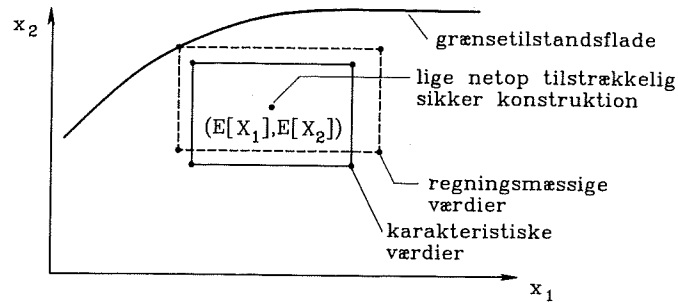
betegnes i normen som *regningsmæssige værdier*. Dette skal forstås således, at konstruktionen er lige netop tilstrækkelig sikker, såfremt

$$g(y_1, \dots, y_n) \geq 0 \quad (5)$$

for alle mulige valg af  $y_1, \dots, y_n$ , således at  $y_i$  er enten den nedre regningsmæssige værdi  $\tilde{x}_{ik}/\gamma_{mi}$  eller den øvre regningsmæssige værdi  $\tilde{x}_{ik} \gamma_{fi}$  og med "=" gældende for mindst eet sådant valg af  $y_1, \dots, y_n$ . Den i figur 2.5 viste omegn bliver altså ved brug af karakteristiske værdier og partialkoefficienter på disse modificeret til den i figur 2.7 viste omegn af  $(E[X_1], E[X_2])$ .

Efter fastlæggelsen af fraktilsandsynlighederne for de karakteristiske værdier må partialkoefficienterne  $\gamma_{m1}, \gamma_{mn}, \gamma_{f1}, \dots, \gamma_{fn}$  ideelt vælges således, at konstruktionen i den probabilistiske model har den foreskrevne svigtsandsynlighed  $p_f$ . For den givne konstruktionstype findes sædvanligvis mange forskellige valg af dimensioner eller materialestyrkeniveauer, der i den probabilistiske model giver samme svigtsandsynlighed. Efter ethvert sådant valg (hvoraf nogle er mere formålstjenlige og økonomiske end andre), er de karak-





Figur 2.7. Partialkoefficientmetodens virkemåde når partialkoefficienterne anvendes på karakteristiske værdier til bestemmelse af regningsmæssige værdier.

teristiske værdier entydigt fastlagt. Der er imidlertid stadig frihed til at vælge partialkoefficientværdierne på uendelig mange måder, således at kravet (5) lige netop er opfyldt. Man har derfor mulighed for at kalibrere partialkoefficientværdierne netop sådan, at flere konstruktioner for de samme partialkoefficientværdier har den givne svigtsandsynlighed  $p_f$ .

Dette problem om, hvorledes et normudvalg, der har rådighed over en rimelig rationel probabilistisk model, skal vælge partialkoefficienterne, således at den resulterende partialkoefficientnorm giver resultater, der inden for passende veldefinerede klasser af konstruktioner er bedst tilpasset den probabilistiske models resultater, gives en første analyse i næste afsnit. En mere detaljeret behandling med eksempler vil blive givet i appendiks 1 om normkalibrering.

Historisk set var de første anvendelser af partialkoefficienter i normerne foruden på konsekvensberegninger (se kapitel 1) kun støttet på kvalitative sandsynlighedsbetragtninger. Koefficienterne lod man virke på centrale eller måske forsigtigt ansatte værdier for materialestyrker og laster, og man anvendte det vejledende princip, at partialkoefficienternes størrelse skulle afspejle graden af usikkerhed eller tilfældig variabilitet af den styrke eller lastparameter, som partialkoefficienten blev anvendt på. Dette princip er imidlertid ikke anvendeligt, når partialkoefficienterne er defineret til at virke på nedre og øvre karakteristiske værdier. Der er jo derved allerede taget et væsentligt hensyn til den pågældende parameters usikkerhed. Partialkoefficienterne skal derfor især dække andre usikkerhedskilder som for eksempel

sådanne, der vedrører usikkerhedernes samspil og modelusikkerheder. Derfor er der da heller intet i vejen for, at en partialkoefficient kan få tillagt en værdi mindre end 1 (eksemplificeret i figur 2.7).

I princippet kræver anvendelsen af partialkoefficientmetoden givet ved (4) og (5) en efterprøvning af (5) i  $2^n$  punkter. Dette bliver for voksende  $n$  hurtigt til et så stort antal punkter, at man tilsyneladende kan betvivle, at der er regnetid at spare ved partialkoefficientmetoden frem for direkte at norm-sætte den probabilistiske model. Sagen er imidlertid, at funktionen  $g$  for de fleste sædvanlige konstruktionsproblemer har en simpel struktur. Fra et punkt i den sikre mængde vil  $g$  aftage med voksende værdier af visse af variablene  $x_1, \dots, x_n$  og aftagende værdier af resten af variablene. Den første kategori af variable har karakter af lastvariable, dvs sådanne hvis forøgelse bringer konstruktionen nærmere til svigt. Den anden kategori af variable har karakter af modstandsvariable, dvs sådanne hvis formindskelse bringer konstruktionen nærmere til svigt. Det er uden videre klart, at sikkerheds-efterprøvningen med hensyn til en grænsetilstand, der kan defineres ved en funktion  $g$  med disse monotonitetsegenskaber, kun kræver eftervisning af uligheden (5) i et enkelt punkt, nemlig i punktet

$$(y_1, \dots, y_n) = \left[ \frac{x_{1k}}{\gamma_{m1}}, \dots, \frac{x_{rk}}{\gamma_{mr}}, \gamma_{f,r+1} \tilde{x}_{r+1,k}, \dots, \gamma_{fn} \tilde{x}_{nk} \right] \quad (6)$$

Vi har her ladet de  $r$  første variable være af modstandsvariabeltype, og de  $n - r$  sidste være af lastvariabeltype. Kontrolpunktet (6) er tilstrækkeligt for de fleste praktiske problemer, hvor partialkoefficientmetoden bringes i anvendelse.

**Bemærkning 2.1** Den danske norm DS 409: "Sikkerhedsbestemmelser for konstruktioner" (1982) [2.2] har kun eksplicite formuleringer af sine bestemmelser vedrørende partialkoefficienter i monotonitetstilfældet, der kun kræver det ene kontrolpunkt (6). Dette fremgår ivoigt kun indirekte af normens tekst ved, at den opsplitter funktionen  $g$  (som ikke omtales) i en modstandsevne og en lastvirkning.

I DS 409, § 5.2 Partialkoefficientmetoden hedder det:

"Ved sikkerhedsvurdering af en konstruktion efter partialkoefficientmetoden skal det eftervises, at den regningsmæssige lastvirkning  $S_d$  er mindre end eller lig den regningsmæssige modstandsevne  $R_d$ . Den regningsmæssige lastvirkning og den regningsmæssige modstandsevne bestemmes ud fra regningsmæssige laster, regningsmæssige materialeparametre og regningsmæssige geometriske parametre."

Om regningsmæssig last siger § 5.2.1:

"Den regningsmæssige værdi af en last bestemmes ved, at man multiplicerer den karakteristiske værdi med en partialkoefficient  $\gamma_f$  fx

$$G_d = \gamma_f G_k \quad Q_d = \gamma_f Q_k$$

Symbolerne G og Q står for henholdsvis "permanent last" og "variabel last", medens indeks k betyder "karakteristisk". Om disse laster står der i § 4:

"Laster angives ved en karakteristisk værdi. I visse tilfælde benyttes betegnelsen karakteristisk værdi for en foreskrevet værdi.

Den karakteristiske værdi af en permanent last  $G_k$  defineres principielt som den lastværdi, der med en sandsynlighed på 50 procent ikke overskrides.

Den karakteristiske værdi  $Q_k$  af en variabel last defineres principielt som den lastværdi, der med en sandsynlighed på 98 procent ikke overskrides i løbet af et år.

For variable laster defineres ud over den karakteristiske værdi en *sædvanlig værdi*  $Q_s = \psi Q_k$ , hvor lastreduktionsfaktoren  $\psi$  afhænger af lastens variation i tiden.

Karakteristiske værdier af laster på bærende konstruktioner samt værdier af lastreduktionsfaktoren  $\psi$  til bestemmelse af sædvanlige lastværdier er givet i DS 410 Last på konstruktioner. I tilfælde, hvor der ikke er anført lastværdier, skal disse fastlægges ud fra de anførte principper og i overensstemmelse med de retningslinier, der er anført i konstruktionsnormerne."

Vedrørende bestemmelse af den regningsmæssige modstandsevne siges det i § 5.2.2:

"Den regningsmæssige værdi af en materialeparameter bestemmes normalt ved, at man dividerer den karakteristiske værdi med en partialkoefficient  $\gamma_m$

$$m_d = \frac{m_k}{\gamma_m}$$

I tilfælde, hvor en forøgelse af materialeparameteren virker til ugunst for konstruktionens sikkerhed, skal der benyttes den øvre karakteristiske værdi af materialeparameteren. Den øvre karakteristiske materialeparameter skal benyttes i hele konstruktionen, og ikke blot i de konstruktionsdele, hvor den virker til ugunst. Den regningsmæssige værdi bestemmes som angivet i konstruktionsnormerne.

De karakteristiske værdier for materialeparametrene samt de værdier for partial

koefficienten  $\gamma_m$ , som skal benyttes, er angivet i konstruktionsnormerne, idet der her er taget hensyn til forundersøgelser, sikkerhedsklasse, brudtype og kontrol."

Om geometriske parametre siger DS 409 i § 5.2.3:

"Den regningsmæssige værdi af en geometrisk parameter  $l_d$  fastsættes normalt som den ved dimensioneringen foreskrevne værdi  $l_k$ .

Såfremt en konstruktions bæreevne er særlig følsom over for ændringer i geometriske parametre, skal der tages hensyn hertil ved at benytte en regningsmæssig værdi bestemt som

$$l_d = l_k \pm \Delta l$$

Værdien af  $\Delta l$  bestemmes som angivet i konstruktionsnormerne."

Man har altså her valgt at arbejde med de absolutte afvigelse i stedet for med partialkoefficienter. Dette hænger sammen med, at tolerancer for geometriske mål mest naturligt og også af praktiske grunde angives i absolutte størrelser og ikke i relative størrelser. □

Som nævnt i bemærkning 2.1 fremkommer konstruktionslaster gennem flere bidrag, hvoraf nogle kategoriseres som værende permanente, mens andre tilhører en kategori, der kaldes variabel last. Nogle bidrag fra den sidste kategori regnes med såkaldte sædvanlige værdier  $\psi Q_k$ , mens andre regnes med karakteristiske værdier  $Q_k$ . Dette emne vedrørende lastkombinationer inden for normens stærkt simplificerende rammer behandles i sidste afsnit i dette kapitel. En mere udførlig probabilistisk behandling vil blive givet i kapitel 10: "lastkombinationer".

### 2.5 Normudvalgets frihed vedrørende valg af partialkoefficientværdier \*

Lad os for simpelhedens skyld antage, at grænsebetingelsen har en sådan form, at kun eet kontrolpunkt (2.4.6) er nødvendigt. For at simplificere notationen

vil vi skrive punktet  $(x_k, \dots, x_{rk}, \tilde{x}_{r+1,k}, \dots, \tilde{x}_{n,k})$  af karakteristiske værdier som  $(x_1, \dots, x_n)$ , mens vi vil skrive  $(1/\gamma_{m1}, \dots, 1/\gamma_{mr}, \gamma_{f,r+1}, \dots, \gamma_{f,n})$  som  $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ . Betingelsen (2.4.5) er da netop opfyldt, såfremt

$$g(x_1, \theta_1, \dots, x_n, \theta_n) = 0 \quad (1)$$

For givne værdier af koefficienterne  $\theta_1, \dots, \theta_n$  og for givne værdier af for eksempel  $x_1, \dots, x_{n-1}$ , kan  $x_n$  bestemmes af denne ligning. Dette svarer til den typiske dimensioneringssituation, hvor ingeniøren tager værdierne  $\theta_1, \dots, \theta_n$  fra normen, vælger  $x_1, \dots, x_{n-1}$  ud fra konstruktive betragtninger, og sluttelig udregner  $x_n$  (der eksempelvis giver en stålbjælkes flangeareal eller et jernbetont værsnits armeringsareal).

Normudvalget står over for en anden opgave. Her er  $x_1, \dots, x_n$  givet for udvalget, for eksempel som resultat af en beregning indenfor en probabilistisk model og på basis af en given svigtsandsynlighed. Denne svigtsandsynlighed er for eksempel fastsat ved sammenlignende konsekvensberegninger, se kapitel 1. Konstruktionen defineret ved værdierne  $x_1, \dots, x_n$  kan også være udvalgt af normudvalget blandt eksisterende konstruktioner som et konstruktionseksempel, der efter normudvalgets vurdering repræsenterer god (optimal) og sikker ingeniørpraksis, se kapitel 1. Ligningen (1) kan da betragtes som en ligning med koefficienterne  $\theta_1, \dots, \theta_n$  som ubekendte. Ethvert valg af  $\theta_1, \dots, \theta_n$ , der tilfredsstiller (1), vil da give et værdisæt for partialkoefficienterne, således at  $x_1, \dots, x_n$  definerer en netop tilstrækkelig sikker konstruktion.

For nærmere diskussion af valgproblemet er det formålstjenligt først at underkaste ligningen (1) en dimensionsanalyse. Da ligningen vedrører et fysisk fænomen, må den nødvendigvis være dimensionshomogen. Vi vil indskrænke os til det hyppigst forekommende tilfælde, hvor alle de fysiske størrelser  $x_1, \dots, x_n$  har enheder, der er potensprodukter af enhederne for kraft og længde. Dimensionsanalysen viser da, at det er muligt at danne netop  $n - 2$  uafhængige dimensionsløse potensprodukter  $p_1, \dots, p_{n-2}$  af størrelserne  $x_1, \dots, x_n$ . Det følger dernæst af det såkaldte  $\pi$ -teorem om dimensionshomogene udtryk, at ligningen (1) kan omformes til en ligning

$$G(p_1^{\nu_1}, \dots, p_{n-2}^{\nu_{n-2}}) = 0 \quad (2)$$

mellem de dimensionsløse potensprodukter, således at  $\nu_i$  er nøjagtig det samme potensprodukt af  $\theta_1, \dots, \theta_n$  som  $p_i$  af  $x_1, \dots, x_n$ , og hvor funktionen  $G$  er en funktion af  $n - 2$  variable.

Det følger heraf, at man for  $n > 2$  kan vælge to af koefficienterne  $\theta_1, \dots, \theta_n$  helt frit blandt de positive tal uden på nogen måde herved at indføre

restriktioner, der påvirker mængden af netop sikre konstruktioner. Hvis eksempelvis  $\theta_1$  og  $\theta_2$  er fastsat til arbitrære værdier, og  $\nu_1, \dots, \nu_{n-2}$  vælges således, at (2) er opfyldt, da vil de øvrige  $n - 2$  koefficienter  $\theta_3, \dots, \theta_n$  være fastlagt ved dette valg.

I praksis vil tilfældet  $n = 2$  ofte forekomme. Det er da kun muligt at vælge een af partialkoefficienterne frit. Man har i de danske normer valgt at lade faktorer hørende til den permanente last (tyngde af konstruktionsdele, af jord og af grundvand) have værdien 1.

**Bemærkning 2.2** Det har undertiden været fejlagtigt hævdet, at denne frihed til valg af en arbitrær værdi af partialkoefficienten hørende til den permanente last er betinget af linearitet af funktionen  $g$ , altså at grænsetilstandsfladen skal være plan. På den anden side har det også været hævdet, at en anden værdi end 1 for partialkoefficienten hørende til tyngden af jord og grundvand ville føre til inkonsistenser i geotekniske beregninger. Dette er ligeledes fejlagtigt, idet man må mærke sig, at samme inputvariabel overalt i modellen skal underkastes samme partialkoefficient, enten overalt ved multiplikation eller overalt ved division. Fejltagelsen opstår, når man efter mere eller mindre arbitrær opspaltning af funktionen  $g$  i en modstandsevne og i en lastvirkning har samme inputvariabel optrædende i begge udtryk og på en sådan måde, at en forøgelse af variabelens værdi virker til gunst for sikkerheden i det ene udtryk og til ugunst for sikkerheden i det andet udtryk.  $\square$

**Bemærkning 2.3** Det kan være formålstjenligt ikke at fastlåse en partialkoefficient til at have en bestemt værdi gældende universelt for hele normens område. En sådan fastlåsning kan nemlig medføre en ubekvem stor variation af andre partialkoefficienter. Man har derfor i de danske normer indført et par undtagelsestilfælde fra det ovenfor omtalte faste valg af værdien 1. Det ene vedrører "de tilfælde, hvor den permanente last fra konstruktionsdele virker til gunst og har afgørende betydning for konstruktionens sikkerhed, fx ved løft og væltning af en konstruktion" (betegnet lastkombination 2.2 i DS 409). Det andet vedrører "tilfælde, hvor den permanente last er stor i forhold til den variable last" (betegnet lastkombination 2.3 i DS 409).  $\square$

Til hver konstruktion med tilhørende grænsetilstand, som normudvalget

bedømmer at være lige netop tilstrækkelig sikker, kan opstilles en ligning som (2). Med valg af et passende antal uafhængige ligninger ( $n - 2$ , hvis de alle er lineære) vil der være mulighed for en entydig bestemmelse af  $\nu_1, \dots, \nu_{n-2}$ , når alle disse ligninger forlanges opfyldt. Hvis de deraf følgende værdier for koefficienterne  $\theta_1, \dots, \theta_n$  i (1) bruges til at definere normens værdier for partialkoefficienterne, bliver (1) for en anden konstruktion med den tilhørende funktion  $g$  en dimensioneringsligning til bestemmelse af  $x_1, \dots, x_n$ . Enhver sådan ligning kan da opfattes som givende en interpolation mellem konstruktionerne, der af normudvalget er udvalgt som værende lige netop tilstrækkeligt sikre. Normudvalget opløfter derefter i princippet alle på denne måde definerede konstruktioner inden for en given klasse af konstruktions typer til normmæssigt at være lige netop tilstrækkeligt sikre. Der vil imidlertid være modstrid med en foreskrevet svigtsandsynlighed hørende til den probabilistiske model, selvom de specielt udvalgte konstruktioner har den givne svigtsandsynlighed. Hvis afvigelserne er små inden for den afgrænsede klasse af konstruktionstyper, kan tilpasningen måske karakteriseres som værende tilfredsstillende.

Det her betragtede princip, hvor partialkoefficienterne anvendt på nogle få udvalgte konstruktioner svarer eksakt til den valgte svigtsandsynlighed, er ikke nødvendigvis det mest hensigtsmæssige princip for kalibrering af partialkoefficientnormen til resultaterne fra en probabilistisk norm. Vi vender tilbage til dette kalibreringsproblem i appendiks 1.

## 2.6 Lastmodeller

De lastmodeller, der sædvanligvis anvendes sammen med partialkoefficientmetoden har en overordentlig idealiseret natur. I det væsentlige består de af punktlaster (enkeltkræfter) og af fladelaster (lastintensitetsblokke), de sidste normalt af stykkevis lineær form. Undertiden udledes lastens variation i rummet og i tiden deterministisk af den geometriske og mekaniske model for konstruktionen eller af en mere omfattende model, der medtager mindre eller større dele af konstruktionens omgivelser, hvorfra påvirkningerne stammer.

Den danske norm DS 409: Sikkerhedsbestemmelser for konstruktioner (1982) [2.2] definerer følgende grundlæggende begreber vedrørende last i § 1.2.4:

"En *last* er en påvirkning, der medfører spændinger eller deformationer i en konstruktion.

Laster inddeles efter deres variation i tiden i:

- *permanent last*, hvis variation i tiden er lille og langsom. Permanent last forudsættes derfor at forblive konstant og virke på konstruktionen i dele dens levetid
- *variabel last*, hvis variation i tiden er stor eller hyppig
- *ulykkeslast*, der kun optræder i forbindelse med ulykkestilfælde eller tilsvarende uforudsigelige hændelser

Laster inddeles efter deres variation i rummet i:

- *bunden last*, hvis værdi ovealt på konstruktionen forudsættes fastlagt, når blot værdien er fastlagt i eet punkt
- *fri last*, hvis intensitet på konstruktionens forskellige dele forudsættes at kunne variere indbyrdes uafhængigt mellem 0 og maksimalintensiteten

Afhængigt af, hvorledes en last påføres konstruktionen og konstruktionens reaktion på lasten, skelnes mellem:

- *statisk virkende last*, som ikke medfører accelerationer af betydning i konstruktionen
- *dynamisk virkende last*, som medfører accelerationer af betydning for konstruktionens virkemåde"

Disse definitioner udbygges med flere benævnelser i DS 410: last på konstruktioner (1982) [2.3], § 11.1:

### "Permanent last

Permanent last omfatter eksempelvis egenlast hidrørende fra tyngden af permanent placerede konstruktionsdele og permanent virkende jord- og vandmasser.

Egenlast på et konstruktionselement omfatter såvel tyngden af selve elementet som tyngden af konstruktionsdele, der hviler på det.

### Variabel last

*Nyttelast* er fri last eksempelvis fra personer, møbler, inventar, maskiner, oplagrede varer, installationer og køretøjer.

*Naturalast* omfatter i denne norm vindlast, snelast, islast samt last forårsaget af temperaturpåvirkninger.

*Vandret masselast* er vandrette laster, der tages i regning for at sikre en bygningskonstruktions styrke og stabilitet over for utilsigtede vandrette påvirkninger, som ikke er indbefattet i andre laster.

### Ulykkeslast

Ulykkeslast omfatter i denne norm eksplosionslast, nedstyrtningslast og påkørselslast.

*Eksplosionslast* omfatter alle former for påvirkninger fra eksplosioner.

*Nedstyrtningslast* er en lodret last, som skal regnes virkende på sikringsrum ud over den permanente last og den samlede nyttelast.

#### *Termisk brandlast*

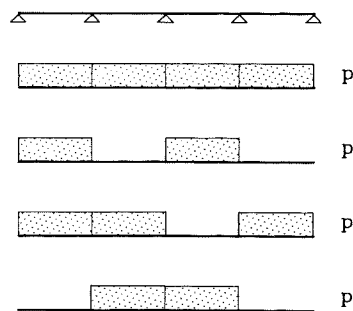
Termisk påvirkning som følge af brand.

#### *Specifik tyngde*

Tyngde per volumenenhed. I volumenet inkluderes eventuelle porer og andre hulrum."

Lastnormen DS 410 giver en detaljeret liste over de mange forskellige typer af laster, som kan komme på tale ved dimensionering efter normerne. For hver last angives karakteristisk værdi (98%-fraktil for årsmaksimum eller blot en foreskrevet værdi), reduktionsfaktor  $\psi$  (= forhold mellem sædvanlig værdi og karakteristisk værdi (se bemærkning 2.1)) samt, for fladelasters vedkommende, visse oplysninger om deres rumlige variation (sædvanligvis jævn fordeling, hvormed menes konstant intensitet per arealenhed) og den brøkdelen af lasten, der regnes som fri last.

Normens lastbegreber kræver næppe yderligere kommentarer – måske på nær begrebet "fri last". Meningen med dette begreb belyses ved et eksempel. Betragt en prismatisk bjælke, der spænder kontinuert over 4 lige store åbninger, se figur 2.8. Bjælkens bøjningsmomenter antages at kunne bestemmes ved den lineære elasticitetsteori. Bjælken tænkes påvirket af en fri last med maksimal intensitet  $p$ . Fri last defineres i DS 410 ved, at lastens intensitet i ethvert punkt kan antage enhver værdi mellem 0 og  $p$  uafhængigt fra punkt til punkt af bjælken. Den lastfordeling langs bjælken, som er afgørende for konstruktionens sikkerhed med hensyn til et brud i et givet tværsnit, kan da eksempelvis være den fordeling, som i det givne tværsnit giver det maksimale



Figur 2.8. Illustration af "fri last" i DS 410. Bjælke over flere åbninger.

bøjningsmoment.

Betragt de i figur 2.8 viste lastfordelinger. I hver af de belastede åbninger findes et tværsnit, hvori bøjningsmomentet antager lokal maksimal værdi (positiv). Desuden antager bøjningsmomentet lokal minimal værdi (negativ) over de indre understøtninger. Alle disse bøjningsmomenter må derfor beregnes, for at de absolut største bøjningsmomenter kan bestemmes. Figur 2.8 viser 4 af de 15 lastfordelinger, der udtømmer alle kombinationsmuligheder med konstant fri last af maksimal eller minimal værdi over hver af åbningerne. Der er naturligvis uendelig mange andre fordelinger af den fri last, som ifølge normen principielt skal undersøges. En nærmere elasticitetsteoretisk overvejelse viser imidlertid, at alle disse andre fordelinger med lastintensitet i hvert punkt mellem 0 og  $p$  ikke giver større maksimalmomenter end dem, der fås af de omtalte 15 lastfordelinger. Den bundne last, som for eksempel svarer til bjælkens egenvægt, beskrives ved en lastvariation som den øverste i figur 2.8.

I princippet kan normens definition af fri last for mere komplicerede konstruktioner føre til, at det er nødvendigt at undersøge et meget stort antal lastblokkombinationer og punktlastkombinationer på konstruktionen. Med dette for øje er det værd at bemærke, at tilsvarende undersøgelser inden for rammerne af en probabilistisk model for fri last ikke blot svarer til en mere realistisk beskrivelse af naturen af den tilfældige lastvariation over konstruktionen, men også kan medføre et betydeligt mindre regnearbejde. Dette hænger sammen med, at den deterministiske modelramme kræver løsning af et vanskeligt ekstremumsproblem, nemlig bestemmelse af de absolut største lastvirkninger, som kan forekomme inden for modellens rammer. I modsætning hertil er problemet inden for en probabilistisk modelramme at bestemme en sandsynlighedsfordeling for lastvirkningerne, når den fri last er beskrevet gennem en ved modellen givet sandsynlighedsstruktur. Dette problem kræver i princippet ikke en undersøgelse for en lang række forskellige konkrete lastopstillinger, men derimod en integration over alle lastmuligheder vægtes med modellens sandsynligheder. I analytisk udformning er regnestykket almindeligvis af en helt anden art end det tilsvarende regnestykke i den deterministiske model. Dog må problemet i en probabilistisk model ofte løses ved såkaldt Monte Carlo simulering, fordi analytiske løsningsmetoder let bliver for matematisk komplicerede og kommer til kort. Man betragter da en

passende stor stikprøve af simulerede typiske lastopstillinger i overensstemmelse med den probabilistiske lastmodel, og udregner skøn for lastvirkningernes sandsynlighedsfordelinger i form af gennemsnitsresultater over stikprøven. Ekstremværdistudier kan derefter foretages ud fra den fundne sandsynlighedsfordeling for lastvirkningerne. Der er altså i den probabilistiske model tale om typiske lastopstillinger og ikke om den deterministiske models svære valg af "ekstreme" lastopstillinger.

På nær for modeller af meget simpel struktur falder behandlingen af probabilistiske lastmodeller for stedlig variation uden for rammerne af denne første del af teorien for bærende konstruktioners sikkerhed, der udelukkende bygger på beskrivelser, der kan klares med stokastiske vektorer. Dog kan stokastiske modeller af bloktype analoge med den deterministiske model i figur 2.8 rummes inden for denne vektorbeskrivelses ramme.

## 2.7 Lastkombinationer \*

Lastkombination vedrører det forhold, at flere laster kan virke på en konstruktion samtidigt. Det er derfor den kombinerede virkning af disse laster, der har interesse i sikkerhedsmæssig sammenhæng.

Et typisk eksempel er en fleretages søjlebygning, hvor snelast på taget, vindlast på tag og facader og laster fra de enkelte etager alle giver bidrag til søjlernes snitkræfter. Betragtningen er nu den, at det i almindelighed vil være for meget på den sikre side ved søjlernes dimensionering, hvis alle de indgående laster repræsenteres ved deres karakteristiske værdier svarende til årsmaksimumsfordelingerne. Samtidig forekomst af sådanne ekstreme værdier for alle relevante laster må anses for at være en usandsynlig hændelse og des mere så jo flere bidragende laster, der indgår i problemet. Brugen af ureducerede karakteristiske værdier vil medføre, at sikkerheden med hensyn til sammenbrud af en søjle udregnet inden for en probabilistisk model vokser med antallet af etager, som søjlen dimensioneres til at bære. Denne egenskab forudsætter dog, at den probabilistiske model ikke foreskriver fuld afhængighed mellem lasterne på de forskellige etager.

Vi vil i det følgende eksempel betragte en meget simpel probabilistisk model for søjlekræfter fra etagelaste. Det skal understreges, at modellens antagelser ikke bygger på statistiske undersøgelser af virkelige etagelaster, og

at den i den henseende er urealistisk. Dens matematiske form er udelukkende valgt for at opnå simple regninger og resultater.

**Eksempel 2.6** Antag, at en søjle bærer last fra  $n$  etager, og at hver etagelast fornys efter hver tidsenhed. Fra hver etage kommer altså en søjlekræft  $X_{ij}$ , hvor  $i = 1, \dots, n$  er etagenummeret, medens  $j$  er nummeret på det  $j$ te tidsinterval,  $j = 1, 2, \dots, N$ . I det  $j$ te tidsinterval haves søjlekræften

$$Y_j = X_{1j} + \dots + X_{nj} \quad (1)$$

og den maksimale søjlekræft efter  $N$  tidsintervaller er

$$Z = \max\{Y_1, \dots, Y_N\} \quad (2)$$

Lad os antage, at  $X_{ij}$  alle er indbyrdes uafhængige med fordelingsfunktionen  $F_1(x)$ , og lad  $\bar{F}_1(x) = 1 - F_1(x)$  være den komplementære fordelingsfunktion. Antag desuden, at den karakteristiske værdi  $x_k$  er givet for  $\max\{X_{i1}, \dots, X_{iN}\}$  som  $(1-\epsilon)$ -fraktilen. Forudsætningerne medfører, at den karakteristiske værdi er den samme for alle  $i = 1, \dots, n$ . Det gælder da, at

$$[1 - \bar{F}_1(x_k)]^N = 1 - \epsilon \quad (3)$$

eller, da  $\bar{F}_1(x_k) \ll 1$ ,

$$1 - N \bar{F}_1(x_k) \simeq 1 - \epsilon \quad (4)$$

Heraf følger, at

$$N \simeq \frac{\epsilon}{\bar{F}_1(x_k)} \quad (5)$$

Den karakteristiske værdi for  $Z$  betegnes  $z_k$  og er givet ved

$$[1 - \bar{F}_n(z_k)]^N = 1 - \epsilon \quad (6)$$

eller, som før,

$$N \simeq \frac{\epsilon}{\bar{F}_n(z_k)} \quad (7)$$

Her er  $\bar{F}_n$  den komplementære fordelingsfunktion for  $X_{1j} + \dots + X_{nj}$  og  $\bar{F}_n$  er uafhængig af  $j$ . Af (5) og (6) følger, at

$$\bar{F}_n(z_k) \simeq F(x_k) \quad (8)$$

For  $n$  stor kan man med henvisning til den centrale grænseværdisætning antage, at  $\bar{F}_n$  kan approksimeres med den normale fordeling

$$\bar{F}_n(z_k) = \Phi\left[\frac{n\mu - z_k}{\sqrt{n}\sigma}\right] \quad (9)$$

hvor  $\mu = E[X_{ij}]$ ,  $\sigma^2 = \text{Var}[X_{ij}]$ . Det er her benyttet, at  $Y_j$  i (1) har middelværdien  $n\mu$  og variansen  $n\sigma^2$ , det sidste fordi leddene i (1) er indbyrdes uafhængige. Ved indsætning i (8) fås da, at

$$z_k \simeq n\mu + \sqrt{n}\sigma \Phi^{-1}[F_1(x_k)] \quad (10)$$

idet  $\Phi^{-1}[\bar{F}_1(x_k)] = -\Phi^{-1}[F_1(x_k)]$ .

I DS 409 (sikkerhedsnormen) angives, at man kan bestemme den regningsmæssige værdi af totallasten  $Z$  som  $\gamma x_k + (n-1)\psi_n x_k$ , hvor  $\gamma$  er en given partialkoefficient for last, og hvor  $\psi_n$  er en reduktionsfaktor, der reducerer  $x_k$  til en "sædvanlig værdi"  $\psi_n x_k$ . Vedtages, at den regningsmæssige totallast er  $\gamma z_k$ , altså at der anvendes den samme partialkoefficient på  $z_k$  som på  $x_k$ , har vi

$$z_k = x_k + (n-1)\psi_n x_k / \gamma \quad (11)$$

som for store  $n$  skal stemme overens med (10). Heraf følger, at  $\psi_n / \gamma$  for store

$n$  skal tillægges værdien

$$\frac{\psi_n}{\gamma} = \frac{\mu}{x_k} + \frac{\mu - x_k + \Phi^{-1}[F_1(x_k)]\sigma\sqrt{n}}{(n-1)} \quad (12)$$

hvoraf ses, at

$$\psi_\infty = \frac{\mu}{x_k} \gamma \quad (13)$$

Lastnormens (DS 410) angivelser af konstante værdier for  $\psi_n$  er altså kun asymptotisk konsistent med (12).

Antag eksempelvis, at  $X_{ij}$  er normalfordelt med parametre  $(\mu, \sigma)$ , hvor variationskoefficienten  $V = \sigma/\mu$  er så passende lille (fx  $V < 0.3$ ), at sandsynligheden for at få negative lastbidrag  $X_{ij}$  er forsvindende i forhold til sandsynligheden for at få positive lastbidrag. Da fås

$$\Phi^{-1}[F_1(x_k)] = \frac{x_k - \mu}{\sigma} \quad (14)$$

som indsat i (12) og efter division med (13) giver

$$\frac{\psi_n}{\psi_\infty} = 1 + \frac{\gamma - \psi_\infty}{\psi_\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{n}} \quad (15)$$

for  $n \geq 2$ . (I dette specielle tilfælde med normalfordeling gælder formlen (12) for alle  $n \geq 2$ ).

Hvis eksempelvis  $\psi_\infty = 0.65$  og  $\gamma = 1.3$  bliver  $x_k/\mu = 2.0$ . Af (5) ses da, at det tilsvarende antal lastgentagelser  $N$  bliver

$$N \simeq \frac{\epsilon}{\Phi\left[-\frac{\mu}{\sigma}\right]} = \frac{0.02}{\Phi\left[-\frac{1}{V}\right]} \quad (16)$$

når det forudsættes som i DS 409, at den karakteristiske værdi er 98%-fraktilen. For  $V = 0.3$  giver (16) et antal på  $N \simeq 47$ , hvilket stort set svarer til et

lastskift per uge, når  $x_k$  antages at være den karakteristiske værdi for årsmaksimum af lastbidraget fra den enkelte etage. Det tilsvarende reduktionsfaktorforhold  $\psi_n/\psi_\infty$  kan aflæses som funktion af etageantallet  $n$  i tabel 2.1.

n	2	4	8	16	$\infty$
$\psi_n/\psi_\infty$	1.414	1.333	1.261	1.200	1.000

Tabel 2.1 Lastreduktionsfaktorforholdet  $\psi_n/\psi_\infty$  som funktion af etageantal  $n$  for tilfældet  $\mu/x_k = 0.5$  ( $= \psi_\infty/\gamma$ ) og normalfordelte lastpulser med parametre  $(\mu, \sigma)$  (ca 47 lastskift per år).

Den her betragtede model repræsenterer en vidtgående forenkling af de virkelige lastforhold. Eksempelvis må en realistisk lastmodel for hyppigt skiftende laster tilordne udfaldet  $X_{ij} = 0$  en betydelig positiv sandsynlighed, svarende til, at den pågældende last slet ikke forekommer på den  $i$ te etage i den  $j$ te tidsenhed. Under sådanne forhold er normalfordelingen uegnet som realistisk model for lastpulsfordelingen. En mere realistisk model betragtes i eksempel 10.2.

For de i dette afsnit betragtede deterministiske lastkombinationsberegninger vedrørende virkningen af tidlige lastsammenfald, gælder det iøvrigt på samme måde som for kombinationsproblemet vedrørende den stedlige variation af den fri last omtalt i forrige afsnit, at antallet af kombinationsmuligheder kan blive meget stort. Derfor er det ikke udelukket, at beregninger inden for rammerne af en probabilistisk model for tidlige lastkombinationer også kan være simple at gennemføre i konkrete sikkerhedsanalyseproblemer. Hertil kommer fordelen af den større grad af rationalitet og realisme i modeldannelsen.

Der skal ikke her gives yderligere detaljer om de lastkombinationer, som sikkerhedsnormen DS 409 kræver undersøgt. Reglerne i DS 409 og DS 410 skulle herefter kunne læses uden problemer.

## 2.8 DS 409's retningslinier for valg af partialkoefficienter på materialer \*

Følgende tekst er givet i et annekst til DS 409: Sikkerhedsbestemmelser for konstruktioner (1982):

"De partialkoefficienter, der er angivet i konstruktionsnormerne er fastsat på baggrund af erfaring og nedenstående vejledning, som er i overensstemmelse med NKB-rapport 35: Retningslinier for last- og sikkerhedsbestemmelser for bærende konstruktioner." [2.4]

"Ved undersøgelse af brudgrænsetilstand bestemmes partialkoefficienten  $\gamma_m$ , som

$$\gamma_m = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 \gamma_5$$

hvor

- $\gamma_1$  tager hensyn til svigtkonsekvenserne samt bruddets karakter.  $\gamma_1$  er givet i tabel 1
- $\gamma_2$  tager hensyn til muligheden af ugunstige afvigelser fra den karakteristiske værdi af materialeparameteren.  $\gamma_2$  er givet i tabel 2.1 for det tilfælde, hvor der anvendes 5-procent fraktiler for materialeparametrene. Såfremt der anvendes en anden fraktilværdi, skal de anførte værdier korrigeres som angivet i tilknytning til tabel 2.2
- $\gamma_3$  tager hensyn til usikkerheden i beregningsmodellen hidrørende fra materialeparametre og geometriske parametre samt materialeafhængige påvirkninger.  $\gamma_3$  er givet i tabel 3
- $\gamma_4$  tager hensyn til usikkerheden ved fastsættelse af materialeparameteren i konstruktionen bestemt på grundlag af den kontrollerede materialeparameter.  $\gamma_4$  er givet i tabel 4
- $\gamma_5$  tager hensyn til omfanget af kontrollen på byggeplads eller arbejdssted (udover den statistiske kvalitetskontrol).  $\gamma_5$  er givet i tabel 5

Opdelingen af partialkoefficienten i flere faktorer er ikke udtryk for en sandsynlighedsteoretisk hensyntagen til de usikkerhedskilder, der er knyttet til faktorerne.

De i tabel 2.1 anførte værdier af  $\gamma_2$  er gældende i forbindelse med 5-procent fraktilværdien af materialeparametrene. Såfremt en anden fraktilværdi anvendes, skal de anførte værdier af  $\gamma_2$  multipliceres med faktoren  $\exp[(1.54-k)\delta]$ , hvor  $k$  svarer til den anvendte fraktil. Værdien af  $k$ , der bestemmes af normalfordelingen, er for forskellige fraktiler anført i tabel 2.2.

Tabel 1.  $\gamma_1$  i afhængighed af sikkerhedsklasse og brudtype.

sikkerhedsklasse:	brudtype:		
	sejt med reserve	sejt uden reserve	skørt
lav	0.80	0.90	1.00
normal	0.90	1.00	1.10
høj	1.00	1.10	1.20



Tabel 2.1  $\gamma_2$  i afhængighed af variationskoefficienten  $\delta$  ved angivelse af 5—procent fraktilen for materialeparametre.

$\delta <$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40
$\gamma_2$	1.42	1.49	1.58	1.71	1.84	2.20

Tabel 2.2 Koefficient k.

fraktil, procent	20	10	5	2	1	0.1
k	0.84	1.28	1.65	2.05	2.33	3.09

Tabel 3  $\gamma_3$  i afhængighed af beregningsmodellens nøjagtighed.

beregningsmodellens nøjagtighed:	god	normal	dårlig
	0.95	1.0	1.10

Normal nøjagtighed i beregningsmodellen svarer til sædvanlige beregninger af normale konstruktioner og konstruktionselementer. God nøjagtighed forekommer for eksempel, hvor der ved beregningen er taget særligt hensyn til excentriciteter, sekundære momenter og lignende, og hvor beregningsmodellerne er særligt verificerede, for eksempel ved forsøg.

Tabel 4  $\gamma_4$  i afhængighed af sikkerheden ved fastsættelse af værdien for materialeparametre i konstruktionen bestemt på grundlag af den kontrollerede, vikarierende materialeparameter.

sikkerhed ved fastsættelse af materialeparameter:	stor	middel	lille
	0.95	1.0	1.10

Tabel 5  $\gamma_5$  i afhængighed af omfanget af kontrol for materialeidentitet og udførelse.

kontrolklasse	skærpet	normal	lempet"
	0.95	1.0	1.10

Opdelingen i sikkerhedsklasser tilstræber en vis hensyntagen til beslutningsteoriens principper om valg af den konstruktionsløsning, der giver maksimal forventet resulterende nytte (socioøkonomiske gevinster minus omkostninger og tab). Om sikkerhedsklasser siger DS 409 følgende:

"Konstruktioner inden for det normale erfaringsområde henføres til en af følgende sikkerhedsklasser:

- *lav sikkerhedsklasse*, hvor et eventuelt svigt indebærer meget lille risiko for personskade og kun vil medføre små samfundsmæssige konsekvenser
- *normal sikkerhedsklasse*
- *høj sikkerhedsklasse*, hvor et eventuelt svigt indebærer stor risiko for personskade eller vil medføre store samfundsmæssige konsekvenser

Konsekvenserne af et svigt kan knytte sig såvel til hele konstruktionen som til den enkelte konstruktionsdel. I en given konstruktion kan der derfor optræde konstruktionsdele, som må henføres til andre sikkerhedsklasser end konstruktionen som helhed. Eksempelvis kan konstruktionsdele, der ikke forudsættes at medvirke i hovedkonstruktionens bærende funktion, ofte henføres til en lavere klasse.

For konstruktioner, hvor beliggenheden er afgørende for klassen, skal der tages hensyn til forventet fremtidig bebyggelse.

Vejledning: De fleste konstruktioner henføres til normal sikkerhedsklasse.

Følgende eksempler kan tjene som vejledning for hvilke konstruktioner, der normalt henføres til en af de andre sikkerhedsklasser. Yderligere eksempler kan være givet i konstruktionsnormerne.

: *Lav sikkerhedsklasse:*

- 1— og 2—etages bygninger med moderate spændvidder, hvor der kun lejlighedsvis kommer personer, fx lagerbygninger, skure og visse af landbrugets avlsbygninger
- mindre master og tårne, herunder almindelige gademaster
- mindre siloer
- sekundære konstruktionsdele, fx skillevægge, vindues— og døroverligger og beklædninger

: *Høj sikkerhedsklasse:*

- bygninger med mere end 5 etager, såfremt de ofte benyttes til ophold for mange personer, fx til bolig — eller kontor
- bygninger med store spændvidder, såfremt de ofte benyttes af mange mennesker, fx til koncert, sport, teater eller udstilling
- tribuner
- større vejbroer og tunneler
- større master og tårne
- større siloer nær bebyggelse
- dæmninger og lignende konstruktioner hvor brud vil medføre store skader.

Som eksempler på konstruktionsdele, der ikke forudsættes at medvirke i hovedkonstruktionens bærende funktion, og hvis klasse derfor fastsættes selvstændigt, kan nævnes dæk og trapper."

Materialepartialkoefficientens afhængighed af brudtype er begrundet med, at det seje brud i modsætning til det skøre brud giver forvarsler, som tillader tid til forskellige handlinger, såsom evakuering af mennesker, afstivning af konstruktionen eller fjernelse af en del af lasten.

Man kan også udtrykke det på den måde, at det seje brud slet ikke er et brud, men snarere en deformationstilstand som ultimativt muligvis kan udvikle sig til et brud i lighed med det skøre brud.

Konsekvenserne af en fremskreden deformationstilstand med eventuelt ultimativt brud må som nævnt forventes at være mindre alvorlige end konsekvenserne af et uvarslet sammenbrud. Derfor kan sikkerhedsniveauet nedsættes svarende til anvendelse af en lavere sikkerhedsklasse.

Selvom man eventuelt kan formulere en grænsetilstandsmodel for det ultimative brud og benytter denne i sikkerhedsanalysen, bør svigtsandsynligheden altså være større end for det skøre brud, der fremkommer uden forudgående fremskredne deformationer. Ved en sådan analyse vil der naturligvis ikke være tale om en bæreevnereserve. Forskellen mellem de to første søjler i tabel 1 er således kun begrundet ved, at den grænsetilstandsmodel, der bruges sammen med første søjle i tabel 1 er på den sikre side. Med andre ord, at der relativt til modellen findes en ikke kvantificeret, men betydelig bæreevnereserve.

Om brudtyper står der i DS 409 følgende:

"Der skelnes imellem:

- *sejt brud med bæreevnereserve*, fx i form af tøjningshærdning
- *sejt brud uden bæreevnereserve*
- *skørt brud*

Brudtypen bedømmes på grundlag af forløbet af materialets eller konstruktionens deformationsforhold ved de forekommende laster."

Tabel 2.1 i DS 409 afspejler det forhold, som blev belyst i simplificeret form i eksempel 2.5 vedrørende sikkerhedsfaktorens afhængighed af variationskoefficienterne. Faktoren  $\exp[(1.65-k)\delta]$  (hvort  $\delta$  er variationskoefficienten, som i denne fremstilling sædvanligvis betegnes  $V$ ) er den korrektionsfaktor på partialkoefficienten, der er nødvendig for, at sikkerheden forbliver upåvirket af valget af fraktilværdi for den karakteristiske værdi. Faktoren er baseret på en antagelse om, at styrkeparameteren har en logaritmisk normalfordeling, se øvelse 2.1.

De øvrige tabeller kræver næppe særlige kommentarer ud over begrebet "vikarierende" materialeparameter. Dette dækker over, at enhver matema-

tisk konstruktionsmodel indeholder parametre, der antages at repræsentere materialeegenskaber. De værdier af disse parametre, der giver den bedste bestemmelse af forskellige responsstørrelser for konstruktionen, lader sig sjældent måle hverken direkte eller indirekte ved brug af responsstørrelserne selv. En styrkeprøvning vil jo medføre skader eller ødelægge en allerede eksisterende konstruktion. Den indirekte bestemmelse af stivhedsparametre kan naturligvis være mulig på en eksisterende konstruktion. For en endnu ikke bygget konstruktion er man altid henvist til måling på andre "simple konstruktioner" (prøvelegemer) udført af "samme" materiale som tænkes anvendt i konstruktionen. Der er naturligvis adskillige usikkerhedskilder ved omsætningen af de målte, såkaldte vikarierende parametre til værdier for parametrene i den matematiske konstruktionsmodel. Dette er, hvad tabel 4 i DS 409 tager hensyn til.

Beregningsmodellens nøjagtighed, som tabel 3 i DS 409 vedrører, lader sig indordne under en probabilistisk beskrivelse, som vil blive beskrevet i næste kapitel og yderligere behandlet i kapitel 11.

## 2.9 Historiske og bibliografiske noter

Sikkerhedsfaktorprincippet er naturligvis i ingeniørpraksis lige så gammelt som brugen af beregningsmodeller til praktisk dimensionering af bærende konstruktioner. I litteraturen kan man således ifølge *A.J. Moe* [2.5] finde diskussioner om praktisk håndtering af sikkerhedsspørgsmålet ved brug af visse typer partialkoefficienter helt tilbage til midten af forrige århundrede.

En konsekvent normmæssig gennemførelse af et detaljeret partialkoefficientprincip startede i Danmark før andre steder i verden, især båret af *J. Brinch Hansens* overvejelser i 1950erne indenfor geoteknikken [2.1].

### Referencer

- 2.1 J. Brinch Hansen: Definition und Grösse der Sicherheitsgrades im Erd- und Grundbau. *Der Bauingenieur*, 1959.
- 2.2 Dansk Ingeniørforenings norm for sikkerhedsbestemmelser for konstruktioner. Dansk standard DS 409. 1. udgave. NP-157-N. Teknisk Forlag, København 1982.

- 2.3 Dansk Ingeniørforenings norm for last på konstruktioner. Dansk Standard DS 410. 3. udgave. NP-157-N. Teknisk Forlag, København 1982.
- 2.4 Den nordiske komité for bygningsbestemmelser: Retningslinier for last- og sikkerhedsbestemmelser for bærende konstruktioner. NKB-rapport nr. 35, 1978 (afløst af NKB-skrift nr. 55, 1987).
- 2.5 A.J. Moe: *Om sikkerhedsgraden i faststående statiske konstruktioner*. Teknisk Forlag, Kbh. 1968.

### 3. PROBABILISTISK INFORMATION

#### 3.1 Tilfældighed og usikkerhed

Begrebsanalysen i det følgende vil blive knyttet til et eller flere simple illustrative eksempler. Et sådant vedrører egenskaber hos beton. Lad os studere en betons styrke på grundlag af målinger på et vist antal cylindre udstøbt af samme blanding. Når vi ser på betoncylindrenes fremstillingsmåde, må vi forvente, at en række tilfældigheder knyttet til cement og grusmaterialernes sammensætning og fugtighed, blandemaskinens egnethed til at fremstille en homogen blanding af cement, grus, vand og tilsætningsmidler, uddrivningen af luftporer fra cylinderstøbningerne ved vibration, lagringsvilkårene etc vil give sig til kende ved tilfældige variationer af trykstyrken fra cylinder til cylinder.

Disse variationer kan betegnes som fysiske fluktuationer. Hermed menes tilfældige variationer, der ikke lader sig eliminere fra objektet ved iagttagelse dvs ved udførelse af mere omhyggelig eller mere omfattende måling på objektet.

Vi forestiller os disse fysiske fluktuationer som tingen iboende, hvor tingen her er den betragtede samling af betoncylindre. De tal, som kommer ud ved styrkemåling i en trykprøvemaskine, forestiller vi os imidlertid som værende forskellige fra de iboende styrker. Denne forestilling bygger vi på den iagttagelse, at to forskellige typer af prøvemaskiner med forskelligt måleudstyr for en beton med samme iboende tilfældige styrkevariation kan vise systematiske forskelle mellem de to samlinger af måleresultater. Samme iboende tilfældige styrkevariation opnår man ved en tilfældig deling af en stor samling af cylindre fra samme betonblanding i to lige store samlinger, en til hver prøvemaskine.

Man må altså konkludere, at de målte resultatets variation udtrykker summen af de i måleobjektet iboende fysiske fluktuationer og de i målemetoden iboende fluktuationer. De i målemetoden iboende fluktuationer bidrager til en usikkerhedstype, der betegnes måleusikkerhed. Den kan ud over tilfældige fluktuationer, der i middel er nul, have systematiske fejlbidrag, som ikke lader sig eliminere ved gennemsnitsdannelse. Det er principielt umuligt at

fjerne de målemetodegenererede fluktuationer direkte fra de målte værdier, for derved at opnå objektets iboende fysiske værdier. Sandsynlighedsregningens metoder gør det dog undertiden muligt at udtale sig om de fysiske fluktuationers statistiske natur. Dette er tilfældet, hvis målemetoden kan anvendes gentagne gange på et måleobjekt, hvor den fysiske størrelse underkastet måling vides at holde sig konstant fra måling til måling (eller variere meget lidt i forhold til målemetodens usikkerhed). Derved opnås en information om målemetoden, der ved statistiske metoder kan repræsenteres i en probabilistisk model for målemetoden. Når målemetoden derefter anvendes på et objekt med iboende fysiske fluktuationer, kan målemetodens usikkerhed elimineres i en probabilistisk beskrivelse af disse fysiske fluktuationers natur. Dette forudsætter dog i almindelighed, at målemetodens usikkerhed kun afhænger af værdien af den målte fysiske størrelse på en passende simpel måde.

**Eksempel 3.1** Antag, at en fysisk størrelse fluktuerer tilfældigt. Den modelleres da naturligt ved en stokastisk variable  $X$ . Antag, at størrelsen måles ved en metode, hvor måleusikkerheden kan repræsenteres ved en stokastisk variabel  $Y$ , som er uafhængig af  $X$ . De målte resultater er da repræsenteret ved summen

$$Z = X + Y \quad (1)$$

Ved statistisk behandling af de målte data findes skøn for middelværdien  $E[Z]$  og variansen  $\text{Var}[Z]$ . Målemetodens usikkerhedsegenskaber kendes på forhånd, og er rapporteret ved  $E[Y]$  og  $\text{Var}[Y]$ . Det følger da af (1), at  $E[X] = E[Z] - E[Y]$ , og af (1) og uafhængigheden mellem  $X$  og  $Y$ , at

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[Z] - \text{Var}[Y] \quad (2)$$

Hvis denne formel giver et negativt resultat, er årsager, at forudsætningen om uafhængighed mellem  $X$  og  $Y$  ikke holder. Uden antagelsen om uafhængighed skal (2) erstattes af, se bemærkning 4.1,

$$\text{Var}[X] = \text{Var}[Z] - \text{Var}[Y] - 2\text{Cov}[X, Y] \quad (3)$$

hvor højre side altid skal være ikke-negativ. Formlen (3) er imidlertid uanvendelig i denne sammenhæng, da hverken  $\text{Var}[Y]$  eller  $\text{Cov}[X, Y]$  kendes, fordi målemetoden nu ikke længere er uafhængig af det, der søges målt. Vi vender tilbage til dette problem i et eksempel i kapitlet "det simple sikkerhedsindeks".

Antages yderligere, at måleusikkerheden probabilistisk kan beskrives ved normalfordelingen, og at den statistiske analyse af de målte data også viser, at det er rimeligt at beskrive disse data ved en normalfordeling, da er det ikke i modstrid med de givne informationer at antage, at  $X = Z - Y$  er normalfordelt. Det er imidlertid ikke en konsekvens af, at både  $Z$  og  $Y$  er normalfordelte. For dette kræves mere, nemlig at parret  $(Z, Y)$  har en todimensional normalfordeling. Denne antagelse lader sig selvsagt ikke eftervise ved måling, og derfor vil det ikke være muligt at efterprøve en antagelse om, at  $X$  ikke er normalfordelt.  $\square$

Eksempel 3.1 belyser, i hvilken forstand man kan "rense" måleresultater for måleusikkerhed, når målemetoden er vel undersøgt. Hvis vi vender tilbage til eksemplet med betons styrke ser vi imidlertid en principiel vanskelighed. Det er ganske vanskeligt om ikke umuligt at foretage de for vurderingen af målemetoden nødvendige gentagne styrkemålinger. Vurderingen må derfor bygge på indirekte overvejelser om prøvemaskinens og måleredskabernes virkemåde kombineret med erfaringer fra sammenligninger af forskellige prøvemethoder.

I almindelighed må man regne med, at måleresultater af materialestyrker eller af andre materialeegenskaber, som, når de gøres tilgængelige for måling, samtidig bliver irreversibelt ændret, ikke kan renses effektivt for måleusikkerhed. Det er derfor vigtigt ved sammenligning af sådanne måleresultater, at de er fremkommet ved samme målemetode. Hvis resultater fra forskellige målemethoder skal gøres forenelige, må de føromtalte sammenligninger af prøvemethoder benyttes til at etablere en omsætningsregel (en afbildning) fra den ene målemetode til den anden. Denne regel skal ideelt set opfylde det mindstekrav, at den er defineret således, at når den anvendes på den ene målemetodes datasæt, da fås et transformeret datasæt, som i en specificeret statistisk forstand kan antages at være foreneligt med datasættet fra den anden målemetode. Derimod kræves ikke nødvendigvis, at et transformeret måleresultat fra første prøvemetode skal være det samme som det, der ville

være opnået ved den anden prøvemethode, selvom dette i mange sammenhænge er et krav, der naturligt stilles for målemetoder, der har lille usikkerhed. For målingen af de omtalte materialeparametre af styrketype er opfyldelsen af et sådant krav naturligvis umuligt at eftervise ved måling. En omsætningsregel mellem måleresultater stammende fra forskellige målemetoder er en mere generel form for korrektionsregel for en målemetodes systematiske fejlbidrag.

I almindelighed vil der være en betydelig usikkerhed om sandheden af et udsagn, der specificerer størrelsen af et systematisk fejlbidrag. Hvis denne usikkerhed kan gøres til genstand for talmæssig vurdering, for eksempel af væddemålsagtig karakter, da kan den også repræsenteres ved en probabilistisk model, der matematisk set ikke adskiller sig i sine principper fra en probabilistisk model for samlingen af de tilfældige fysiske fluktuationer. Usikkerheden er imidlertid af en anden natur. I modsætning til de fysiske fluktuationer lader den sig påvirke af nærmere undersøgelser. Dette giver anledning til at skelne mellem tilfældighed og usikkerhed. Den objektet iboende tilfældighed lader sig ikke reducere ved iagttagelse, medens usikkerhed gør. Ordet måleusikkerhed dækker tilsyneladende over en blanding af de to begreber. En given målemetode har måske en systematisk fejl, som er usikkert kendt, men ved nærmere undersøgelser af målemetoden, kan denne usikkerhed reduceres eller fjernes. Desuden udviser en målemetode sædvanligvis tilfældige fluktuationer, som normalt også er dækket af ordet måleusikkerhed, selvom ordet måletilfældighed måske ville være bedre. På den anden side kan måletilfældigheden påvirkes ved ændring af målemetoden. Kategorisering af det diskuterede begreb (som vi kan kalde ubestemthed) i tilfældighed eller usikkerhed er altså relativ til objektet. Hvis studieobjektet er selve målemetoden, karakteriseres de iboende fysiske fluktuationer som tilfældighed. Hvis objektet for måling er studieobjektet, da tales om måleusikkerhed.

For forståelsen af mulighederne for at påvirke en bærende konstruktions sikkerhed ved ingeniørmæssige foranstaltninger er denne opdeling i tilfældighed og usikkerhed naturligvis af betydning. I et sikkerhedsproblem indgår mange ubestemtheder af usikkerhedstype, som kan reduceres ved forøget indsats med hensyn til fremskaffelse af information, uden at selve konstruktionsløsningen (det konstruktive lay-out) ændres. Indflydelse af ubestemtheder af tilfældighedstype lader sig derimod udelukkende påvirke ved kon-

struktive foranstaltninger.

Måleusikkerhed er ovenfor belyst som en usikkerhed knyttet til resultatet af en enkelt måling. Herved får den samme karakter som begrebet modelusikkerhed, der vil blive nærmere diskuteret i det følgende. Måleusikkerhed af en helt anden art bærer betegnelsen statistisk usikkerhed.

### 3.2 Statistisk usikkerhed

Det er selvsagt enhver målemetodes formål at fremskaffe information om en størrelse knyttet til måleobjektet. Hvis størrelsen har en sådan fluktuerende natur, at der kaldes på en probabilistisk model for dens beskrivelse, må målemetoden gøre det muligt at formulere kvantitativ information om den valgte probabilistiske models parametre. Det er klart, at målingen af et enkelt udfald af en stokastisk variabel  $X$  kun er nok til at give et groft skøn for middelværdien af  $X$  og ikke er nok til at sige noget som helst om standardafvigelsen af  $X$ . Hvis man derimod måler et vist antal udfald, der er frembragt uafhængigt af hinanden, kan man på grundlag af de målte værdier udregne skøn for alle modellens parametre. Mængden af målte værdier udgør en såkaldt stikprøve fra populationen for  $X$ , dvs den bag den probabilistiske model forudsatte mængde af udfaldsværdier for  $X$  fordelt med hensyn til størrelse på en måde, som er forenelig med den forudsatte sandsynlighedsmodel. Grundlaget for, at en sådan beregning er mulig og har mening, er at finde i sandsynlighedsregningen. De mest elementære træk af den statistiske teori forudsættes bekendt af læseren.

Vi vil til belysning af betydningen for sikkerhedsanalysen på dette sted repetere de mest basale træk vedrørende beskrivelsen af den information, som en stikprøve af størrelse  $n$  af  $X$  giver om middelværdien  $E[X]$ . Vi vil endda gøre den yderligere antagelse, at  $X$  har en kendt standardafvigelse  $D[X] = \sigma$ . Den eneste tilgængelige information herudover er stikprøven  $x_1, \dots, x_n$ . Det er da oplagt, at et skøn for middelværdien  $\mu = E[X]$  må udregnes som værdien af en eller anden funktion  $\hat{\mu}(x_1, \dots, x_n; \sigma)$ . Betænker man, at  $x_1, \dots, x_n$  er fremkommet som gentagne indbyrdes uafhængige udfald af  $X$ , eller, mere præcist, som et enkelt udfald af den stokastiske vektor  $(X_1, \dots, X_n)$ , hvor  $X_1, \dots, X_n$  er indbyrdes uafhængige stokastiske variable, der alle er fordelt

som  $X$ , er det naturligt at studere de fordelingsmæssige egenskaber hos den stokastiske variable  $\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n; \sigma)$ . Det kunne for eksempel være hensigtsmæssigt at vælge funktionen  $\hat{\mu}$  (den såkaldte estimator) således, at

$$E[\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n; \sigma)] = \mu \quad (1)$$

samtidig med at  $\text{Var}[\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n; \sigma)]$  bliver mindst mulig. Dette er i almindelighed et vanskeligt variationsproblem. Nøjes man med klassen af lineære estimatorer, finder man, at det bedste valg er gennemsnittet

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum X_i \quad (2)$$

som har standardafvigelsen

$$D[\hat{\mu}] = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (3)$$

Vi ser, at gennemsnittet  $\bar{x} = (x_1 + \dots + x_n)/n$  af stikprøven er et skøn for  $\mu$ , men at dette skøn er usikkert. Usikkerheden lader sig i en vis forstand måle ved (3). Specielt ses, at den lader sig eliminere asymptotisk for  $n \rightarrow \infty$ . I den valgte formulering aftager den omvendt proportional med kvadratroden af stikprøvestørrelsen.

Usikkerhed af denne art kaldes statistisk usikkerhed og vedrører altså ukomplet information på grund af begrænset stikprøvestørrelse. Den kan opfattes som en fluktuation, selvom den ofte ikke observeres som sådan i praksis. Kun en enkelt værdi af gennemsnittet  $\bar{x}$  fås fra den målte stikprøve. Man kan imidlertid forestille sig som tankeeksperiment, at man frembringer gentagne udfald af  $\hat{\mu}$  ved at frembringe nye stikprøver af størrelsen  $n$ . Herved fluktuerer  $\hat{\mu}$  nøjagtig som en størrelse med ubestemthed af tilfældighedstype fra en fordeling med standardafvigelse givet ved (3).

Den her betragtede kvantitative beskrivelse af statistisk usikkerhed er ikke hensigtsmæssig som input i en probabilistisk model for vurdering af bærende

konstruktioners sikkerhed. En sådan model kræver nemlig, at bidrag fra forskellige usikkerhedskilder lader sig sammenregne på en logisk konsistent måde. Antag, at den ovenfor betragtede stokastiske variable  $X$  indgår i en probabilistisk konstruktionsmodel. Da middelværdien  $E[X]$  er ukendt, må man for at kunne regne svigtsandsynligheden ud antage, at  $E[X]$  har en bestemt værdi  $\mu$ . Svigtsandsynligheden bliver altså en funktion  $p_f(\mu)$  af  $\mu$ . Man står da med et problem om, hvad  $\mu$  skal vælges til. Man kan naturligvis lade sig nøje med værdien  $p_f(\hat{\mu})$  eller med et passende konfidensinterval for  $p_f(\mu)$  bestemt ved hjælp af (2) og (3). (Inden for rammerne af den ovenfor betragtede model for stokastisk usikkerhed bliver et  $p\%$  konfidensinterval af en parameter som  $\mu$  eller som  $p_f(\mu)$  et interval, der med  $p\%$  sandsynlighed omslutter den "sande" værdi af  $\mu$  eller  $p_f(\mu)$ . Denne sandsynlighed kan tolkes som en relativ hyppighed i overensstemmelse med det ovenfor omtalte tankeeksperiment).

Hvis man ønsker at angive en enkelt værdi af svigtsandsynligheden, hvilket er nødvendigt i en beslutningsmodel, der baserer sig på at bestemme optimal nytte (kapitel 12: "beslutningsfilosofi"), da må man sammenfatte de forskellige værdier af  $p_f(\mu)$  ved et vægtet gennemsnit

$$P_f = \int_{\text{alle } \mu} p_f(\mu) f(\mu) d\mu \quad (4)$$

hvor  $f(\mu) \geq 0$  er en passende vægtfunktion for hvilken

$$\int_{\text{alle } \mu} f(\mu) d\mu = 1 \quad (5)$$

Det ses, at  $f(\mu)$  har egenskaber som en tæthedsfunktion for en stokastisk variabel. Hvis man opfatter  $\mu$  som et udfald af en stokastisk variabel  $M$ , da er  $p_f(\mu)$  netop den betingede svigtsandsynlighed givet af  $M = \mu$ . Den totale svigtsandsynlighed bliver da ifølge sandsynlighedsregningens additionssætning netop

$$P_f = \int_{\text{alle } \mu} p_f(\mu) f_M(\mu) d\mu \quad (6)$$

hvor  $f_M(\mu)$  er tæthedsfunktionen for  $M$ . Vægtfunktionen  $f(\mu)$  kan altså tolkes som en tæthedsfunktion  $f_M(\mu)$  for parameteren  $\mu$  modelleret som en stokastisk variabel  $M$ . Fordelingsegenskaberne hos  $M$  må ligesom (2) og (3) udspringe af den information, som er givet ved stikprøven  $x_1, \dots, x_n$  af udfald af  $X$  og kendskabet til standardafvigelsen  $D[X] = \sigma$ .

Betragtningmåden er nu den, at  $M$ , før stikprøveinformationen er tilgængelig, tillægges en tæthed  $f_M(\mu)$  (a priori-tæthed). Denne tæthed antages at repræsentere den viden, der haves om  $\mu$  før måling af  $x_1, \dots, x_n$ . Da den stokastiske vektor  $(X_1, \dots, X_n)$  har den betingede tæthed

$$f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n | \mu) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i | \mu) \quad (7)$$

ifølge sandsynlighedsregningens multiplikationssætning for uafhængige hændelser, fås den totale tæthed

$$f_{M, X_1, \dots, X_n}(\mu, x_1, \dots, x_n) = f_M(\mu) \prod_{i=1}^n f_X(x_i | \mu) \quad (8)$$

og dermed den betingede tæthed

$$f_M(\mu | x_1, \dots, x_n) \propto f_M(\mu) \prod_{i=1}^n f_X(x_i | \mu) \quad (9)$$

hvor " $\propto$ " betyder proportional med (dvs på nær en normaliserende konstant, der er bestemt ved, at (5) skal gælde). Herved er bestemt en såkaldt a posteriori-tæthed for  $M$  givet stikprøven  $x_1, \dots, x_n$ . Hvis højre side af (9) er proportional med en tæthed, også hvis  $f_M(\mu)$  sættes til 1 eller sættes til en funktion af  $\mu$ , der er svagt varierende i forhold til variationen af

$$\prod_{i=1}^n f_X(x_i | \mu) \quad (10)$$

da kan man benytte en sådan svagt varierende a priori tæthed som model for praktisk taget manglende forhåndsinformation. Produktet (10) betragtes som

funktion af parameteren  $\mu$  kaldes likelihoodfunktionen. Denne formulering af en model for beskrivelse af den statistiske usikkerhed og dens reduktion ved opdatering på grundlag af stikprøveinformation kaldes bayesk efter Thomas Bayes (1764). Formlen (9) er et specialtilfælde af den såkaldte Bayes' formel.

I formlen (4) kan man herefter som funktionen  $f$  bruge den mest opdaterede a posteriori-tæthed for  $M$ .

**Eksempel 3.2** Antag, at  $X$  er normalfordelt med tæthedsfunktion

$$f_X(x | \mu) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right] \quad (11)$$

Likelihoodfunktionen bliver

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n f_X(x_i | \mu) &\propto \prod_{i=1}^n \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right] = \\ &\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2)\right] \propto \exp\left[-\frac{n}{2\sigma^2}(\mu^2 - 2\mu\bar{x} + \bar{x}^2)\right] \propto \varphi\left[\frac{\mu-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \end{aligned} \quad (12)$$

hvor  $\bar{x}$  er gennemsnittet af  $x_1, \dots, x_n$  (sammenlign med (17)). Likelihoodfunktionen er altså proportional med normalfordelingstætheden med middelværdi  $\bar{x}$  og standardafvigelse  $\sigma/\sqrt{n}$ . Derfor bliver højre side af (9) en tæthed, når  $f_M(\mu)$  erstattes med 1. Man siger, at man derved har valgt en a priori-tæthed for  $M$ , der er diffus over hele  $\mathbb{R}$ . A posteriori-tætheden for  $M$  bliver da

$$f_M(\mu | x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \varphi\left[\frac{\mu-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \quad (13)$$

dvs normalfordeling med middelværdi  $\bar{x}$  og standardafvigelse  $\sigma/\sqrt{n}$ . Man bemærker analogien med estimatoren  $\hat{\mu}$  i (2).

Da den betingede fordelingsfunktion af  $X$  er

$$P(X \leq x | \mu) = \Phi \left[ \frac{x - \mu}{\sigma} \right] \quad (14)$$

fås som i (6) den totale a posteriori-fordelingsfunktion

$$P(X \leq x | x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left[ \frac{x - \mu}{\sigma} \right] \varphi \left[ \frac{\mu - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}} \right] d\mu \quad (15)$$

med den tilsvarende tæthedsfunktion

$$f_X(x | x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x} P(X \leq x | x_1, \dots, x_n) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left[ \frac{x - \mu}{\sigma} \right] \varphi \left[ \frac{\mu - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}} \right] d\mu = \frac{1}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \varphi \left[ \frac{x - \bar{x}}{\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} \right] \quad (16)$$

hvor det sidste integral kan udregnes ved brug af de i den efterfølgende bemærkning 3.1 givne standardformler.

A posteriori-tætheden af  $X$  ses at være normal med middelværdi  $\bar{x}$  og standardafvigelse  $\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ . Indflydelsen på  $X$  af den statistiske usikkerhed er altså, at  $X$  i stedet for den ukendte middelværdi  $\mu$  får tillagt middelværdien  $\bar{x}$ , og i stedet for den kendte standardafvigelse  $\sigma$  får tillagt den større standardafvigelse  $\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$ . □

**Bemærkning 3.1** Følgende formler er ofte nyttige ved regning med normalfordelings-tætheder:

$$\varphi \left[ \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right] \varphi \left[ \frac{x - \mu_2}{\sigma_2} \right] = \varphi \left[ \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right] \varphi \left[ \frac{x - \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}{\frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}} \right] \quad (17)$$

$$\frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left[ \frac{x}{\sigma_1} \right] \varphi \left[ \frac{z - x}{\sigma_2} \right] dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \varphi \left[ \frac{z}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right] \quad (18)$$

□

Svigtsandsynligheden kan tolkes som middelværdien af en funktion  $\psi$  af de stokastiske inputvariable, nemlig en funktion, der antager værdien 1, hvis inputvariablene antager værdier, der svarer til et punkt i svigtområdet, og for alle andre punkter antager værdien 0. Lad os for simpelhed skyld antage, at  $X$  er den eneste stokastiske inputvariabel. Vi har da den betingede svigtsandsynlighed

$$p_f(\mu) = E[\psi(X) | \mu] = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_X(x | \mu) dx \quad (19)$$

og dermed ifølge (6) den totale svigtsandsynlighed

$$p_f = \int_{\text{alle } \mu} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_X(x | \mu) dx \right] f_M(\mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \int_{\text{alle } \mu} \left[ f_X(x | \mu) f_M(\mu) d\mu \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) f_X(x | x_1, \dots, x_n) dx \quad (20)$$

Vi kan altså enten først udregne den betingede svigtsandsynlighed givet  $M = \mu$  og derefter indregne den statistiske usikkerhed ved afbetingning gennem brug af a posteriori-tætheden for parameteren  $M$ , eller vi kan indregne den statistiske usikkerhed direkte i inputvariablen  $X$ , før konstruktionsmodellen bringes i anvendelse til beregning af svigtsandsynligheden.

Dette gælder generelt, men det afhænger af de matematiske omstændigheder, hvorvidt den ene fremgangsmåde er mere formålstjenlig end den anden.



**Øvelse 3.1** Antag, at vi kan tillægge  $M$  i eksempel 3.2 en a priori-fordeling, som er normal med parametre  $\mu_0, \sigma_0$ . Vis ved brug af formlerne (17) og (18), at  $X$  har en normal a posteriori-fordeling med parametre

$$\frac{n\bar{x} + r\mu_0}{n+r} \quad \text{og} \quad \sigma \sqrt{\frac{n+r+1}{n+r}} \quad (21)$$

hvor  $r = (\sigma/\sigma_0)^2$ . Ved sammenligning med (16) ses, at den valgte a priori-tæthed giver et informationsbidrag, der i eksempel 3.2 svarer til en stikprøve af "størrelse"  $r$  og med gennemsnit  $\mu_0$ .  $\square$

Bayes'ske metoder til indregning af statistisk usikkerhed i forbindelse med bærende konstruktioners sikkerhed vil blive yderligere behandlet i kapitel 11: "statistisk usikkerhed og modelusikkerhed".

### 3.3 Modelusikkerhed

Ud over den tilfældighed og usikkerhed, der er knyttet til inputvariablene, må sikkerhedsanalysen tage hensyn til modelusikkerhed knyttet til formuleringen af grænsetilstanden. Grænsetilstandsbegrebet blev defineret i afsnit 2.1.

Når et verbalt formuleret grænsetilstandskrav skal omsættes til en matematisk model, gøres et valg blandt de mange fysiske parametre, der kan tænkes at have betydning for, om konstruktionen er i netop den fysiske tilstand, som den verbale formulering beskriver som værende svigt eller ikke svigt. Hvis vi lader  $n$  variable  $x_1, \dots, x_n$  indgå i sikkerhedsproblemets beskrivelse, og der findes flere end disse  $n$  variable, der kan tænkes at have indflydelse, da vil punktet  $(x_1, \dots, x_n)$  ikke med sikkerhed være enten et punkt i svigtområdet eller et punkt i den sikre mængde. Ved realisation af konstruktionen tillægges de negligerede variable værdier, og antages, at denne værditilskrivning har tilfældig natur, vil det altså være en tilfældig hændelse, om det givne punkt  $(x_1, \dots, x_n)$  svarer til svigt eller ej. Man kan gøre sig den forestilling, at hver gang de negligerede variable tillægges værdier, deles rummet af punkter  $(x_1, \dots, x_n)$  op i en sikker mængde og en svigtområde.

Grænsetilstandsfladen realiseres altså som en tilfældig flade fra en vis population af flader, hvor hver enkelt flade udvælges ved tilskrivningen af værdier til de negligerede variable.

Grunden til, at visse fysiske variable negligeres, kan naturligvis være, at man ikke kender disse variable (de er måske hinsides fantasiens muligheder), eller, hvis man har identificeret dem, ikke kender deres virkemåde eller deres samspil med andre variable. Man kan altså i en sådan situation ikke eliminere grænsetilstandsfladens tilfældige fluktuationer fra realisation til realisation blot ved at udvide rummets dimensioner. I almindelighed er det dog principielt muligt at formindske grænsetilstandsfladens fluktuationer ved en dimensionsudvidelse. Denne formindskelse modsvarer naturligvis af, at de ekstra variable tilskrives tilfældigt fluktuerende værdier fra realisation til realisation.

Den matematiske repræsentation af en grænsetilstandsflade giver anledning til usikkerhed ud over de fluktuationer, der skyldes negligerede variable. Grænsetilstandsfladen formuleres i de valgte variable  $x_1, \dots, x_n$  ved brug af en vis mængde kendte matematiske funktioner. Ofte genereres disse funktioner ved hjælp af idealiserede mekaniske modeller for konstruktionen. Måske er de desuden tilpasset eksperimentelt frembragte observationer af svigt-opførslen af visse eksempelkonstruktioner. Den matematiske idealisering indfører en systematisk fejl på ethvert sted af svigtfladen. Denne fejl kan måske formindskes ved en mere detaljeret modeldannelse, men pointen for sikkerhedsanalysen er, at man i praksis altid af både tidsmæssige og operationelle grunde må lade sig nøje med et vist niveau af detaljeringsgrad, og at der derfor altid er en systematisk fejl, hvis størrelse er ukendt. Den må derfor i sikkerhedsanalysen medtages ved hjælp af vurderingsvariable, som af hensyn til sammenregning af de forskellige bidrag til tilfældighed og usikkerhed mest hensigtsmæssigt gives status af stokastiske variable repræsenteret ved en forenet sandsynlighedsfordeling.

Tolkningen af en sandsynlighedsfordeling for en systematisk fejl, der har en bestemt ikke fluktuerende værdi, er egentlig ikke så dybtliggende forskellig fra tolkningen af en sandsynlighedsfordeling for en fluktuerende størrelse. En sandsynlighedsfordeling kan nemlig altid opfattes som en mængde af muligheder, der er relativt vægtet ved hjælp af de tilknyttede sandsynligheder. Det praktiske problem ved formuleringen af en sandsynlighedsmodel

består i at fremskaffe viden, der muliggør et valg af denne mængde af muligheder. Opdatering ved hjælp af ny information består da i at omvægte en del af disse muligheder, og især den del, der strider meget mod den nye information. I det statistiske problem om fremskaffelse af viden om middelværdien  $\mu$  for en stokastisk variabel  $X$ , forestiller man sig, at der kan vælges en mængde af muligheder for  $\mu$  repræsenterende vor viden om  $\mu$  i form af a priori-tætheden  $f_M(\mu)$ . Efter kendskabet til en stikprøve af udfald af  $X$  kan man ved hjælp af sandsynlighedsregningens regler omvægte mængden af muligheder til en vægtet mængde beskrevet ved a posteriori-tætheden  $f_M(\mu|\text{stikprøve})$ .

Hvis vi ser på modelusikkerhedsproblemet, kan bestemmelse af mængden af muligheder, for så vidt den angår den systematiske fejl, i eksperimentelle situationer føres tilbage til bestemmelse af statistisk usikkerhed. Differencen mellem den observerede bæreevne og den ved grænsetilstandsmodellen beregnede bæreevne giver en stikprøve fra en population, hvis middelværdi er udtryk for den systematiske modelfejl. Sådanne rapporterede eksperimentelle undersøgelser kombineret med undersøgelser ved hjælp af mere forfinede mekaniske modeller giver det erfaringsgrundlag og den (kollektive) professionelle indsigt, der i mere generelle situationer kan muliggøre et rimeligt valg af mængden af muligheder. Med en passende probabilistisk modelformulering (naturligvis byggende på visse regularitetshypoteser) er det ligesom for statistisk usikkerhed muligt at opdatere modelusikkerheden for en grænsetilstandsmodel af en given form på grundlag af ny information om den "virkelige" grænsetilstandsflades beliggenhed i middel og dens fluktuationer.

**Bemærkning 3.2** Den anførte tolkning af sandsynlighedsbegrebet som en vægtet mængde af muligheder eksemplificeres klart ved at betragte kast med en terning. A priori består mængden af muligheder af seks tal, nemlig de mulige øjeantal. Hvis terningen antages at være perfekt, har disse muligheder lige vægt, og dermed er sandsynlighedsfordelingen fuldstændig fastlagt, uden at det er nødvendigt at observere et eneste udfald af et terningkast. Modellen er her fuldstændig bestemt ved en symmetribetragtning, der påtrykkes os ved forudsætningen om, at terningen er perfekt.

Antag nu, at denne forudsætning ikke er givet. Lad os forestille os, at en fysiker får detaljerede oplysninger af fysisk art om terningen, såsom masse-tæthedsvariationen, elastiske egenskaber etc. Derefter kastes een og kun een

gang med terningen, uden at fysikeren ser resultatet. Det registreres af en dommer. Fysikeren bliver bedt om at angive en sandsynlighedsfordeling for de seks muligheder. Da han eller hun ved sine fysiske overvejelser har konstateret, at terningens tyngdepunkt er meget skævt beliggende, vil han eller hun næppe foreslå lige stor sandsynligheder på de seks muligheder.

En statistiker får givet resultaterne fra 10 kast med terningen og bliver derefter stillet over for samme spørgsmål som fysikeren. Statistikerens har kun fået at vide, at det ikke er givet, at terningen er perfekt. Hvis statistikerens følger en bayesk fremgangsmåde, vil han eller hun formentlig vælge en a priori-fordeling med lige store sandsynligheder på alle seks muligheder og derefter ændre denne fordeling til en a posteriori-fordeling ved brug af resultaterne fra de 10 kast. Svaret vil næppe være sammenfaldende med fysikerens svar. Begge svar er en vægtet mængde af muligheder for det af dommeren kendte resultat, som ikke lader sig ændre. Hvilket svar, der er det bedste, kan naturligvis kun afgøres, hvis man har vedtaget, hvordan man vil definere den korrekte mængde af vægtede muligheder. I en situation som den betragtede, hvor man kan gentage terningkastet et vilkårligt stort antal gange, er det naturligt at definere den korrekte vægtede mængde af muligheder som den fordeling, hvorom de relative hyppigheder for de forskellige udfald gradvis stabiliserer sig, når antallet af kast vokser. Det er da også netop denne relative hyppighedsfordeling, som statistiske metoder bygget på sandsynlighedsregningen er rettet mod. Under denne definition af den korrekte vægtede mængde af muligheder kan man ledes til at slutte, at statistikerens svar er det bedste. Man må imidlertid være opmærksom på, at resultaterne fra 10 kast kun udgør en lille stikprøve, og at den statistiske usikkerhed derfor er betydelig. Fysikerens svar kan derfor meget vel være bedre end statistikerens. Hvis statistikerens får præsenteret fysikerens fordeling, vil han eller hun formentlig da også bruge denne fordeling som a priori fordeling i stedet for den ligelige fordeling, der repræsenterer statistikerens manglende forhåndsinformation.

De situationer, hvor der a priori kan defineres en korrekt mængde af vægtede muligheder, er specielle. I almindelighed er den korrekte vægtede mængde et ukendt objekt knyttet til et tankeeksperiment, hvori der foretages gentagelser i det uendelige. Dette tankeeksperiment støtter sig til sandsynlighedsregningens egenskaber i retning af at kunne lede til grænsesandsynlig-

hedsfordelinger for følger af stokastiske variable og specielt for følger af relative hyppigheder.

I den fysiske virkelighed er gentagelsesmulighederne under ens omstændigheder sædvanligvis enten meget begrænsede eller principielt udelukket. Fælles for den probabilistiske beskrivelse af et fluktuationsfænomen og af den usikre viden om værdien af en fast størrelse er altså, at beskrivelsen gives i form af en vægtet mængde af muligheder. Forskellen ligger i karakteren af den information, hvorpå den relative vægtning baseres. Sandsynlighedsregningen kan forudsige relative hyppigheder, og derfor har modellen en særlig forudsigelseskraft for tilfældigt fluktuerende fænomener, mod hvilke modelens godhed kan efterprøves. For ukendte, men faste størrelser findes ikke denne direkte sammenligningsmulighed med resultaterne af gentagne identiske eksperimenter.

En efterprøvning af godheden af en vurderingsmetodik, hvis resultater udtrykkes i form af en mængde af vægtede muligheder, må da nødvendigvis bygge på erfaringerne fra gentagne anvendelser af metodikken: Ved hver enkelt anvendelse kan man eksempelvis betragte en for den pågældende anvendelse karakteristisk observerbar hændelse, der er defineret på en sådan måde, at den ved metodikken får tillagt en bestemt sandsynlighed  $p$ . I følgen af anvendelser kan man til enhver tid observere den relative hyppighed, hvormed hændelsen hidtil har forekommet. Afvigelsen mellem  $p$  og den observerede relative hyppighed sammenholdt med antallet af anvendelser siger da noget om vurderingsmetodikkens godhed i relation til den betragtede serie af observerbare hændelser. Hvis der efter mange anvendelser er for stor afvigelse eller manglende tendens til stabilisering, må metodikken betegnes som mindre nyttig eller endog værdiløs. Når dette erkendes gennem de indhøstede erfaringer, vil kravet om rationel opførsel i det lange løb påtvinge en revision af vurderingsmetodikken (selvsagt under hypotesen om, at der er villighed til at lære af erfaringen).

Den omtalte efterprøvning ved sammenligning med observerede data kaldes sædvanligvis verifikation af modellen, selvom verifikation (i modsætning til falsifikation) af en models sandhed i streng forstand principielt ikke er mulig. Verifikationsproblemet for en probabilistisk model, der vedrører usikker viden om en fast størrelse, kan illustreres ved eksemplet med fysikeren og terningen. Antag, at fysikeren gentagne gange stilles over for det

omhandlede vurderingsproblem, men hver gang med en ny terning med dens individuelle fysiske egenskaber. Han eller hun skal hver gang angive sandsynligheden for, at dommeren har registreret en sekser ved det ene kast, der tillades. Fysikeren har efter vurdering af  $n$  terninger angivet sandsynlighederne  $p_1, \dots, p_n$ . Disse er i fysikerens model det samme som middelværdier for henholdsvis  $X_1, \dots, X_n$ , hvor  $X_i$  er en stokastisk variabel, der antager værdien 1, hvis den ite terning viser en sekser og ellers antager værdien 0. Da gælder, at den relative hyppighed af forekomsten af en sekser er repræsenteret ved den stokastiske variabel  $(X_1 + \dots + X_n)/n$ . Denne har middelværdien

$$E\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right] = \frac{1}{n}(p_1 + \dots + p_n) \quad (1)$$

og variansen

$$\text{Var}\left[\frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var} X_i = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i) < \frac{1}{4n} \quad (2)$$

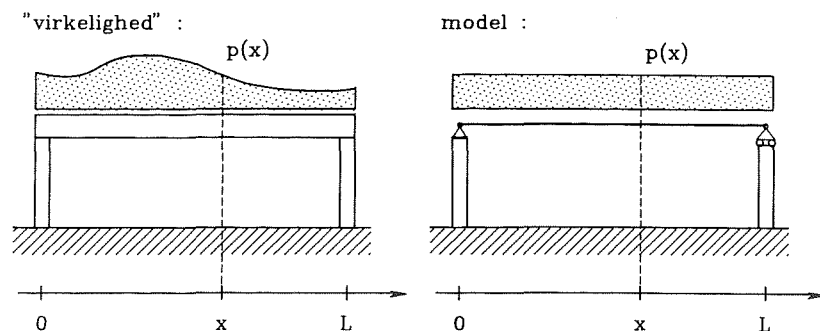
da  $X_1, \dots, X_n$  er indbyrdes uafhængige og

$$\text{Var}[X_i] = E[X_i^2] - E[X_i]^2 = E[X_i] - E[X_i]^2 = p_i - p_i^2 \quad (3)$$

Det følger af (2), at standardafvigelsen på den relative hyppighed for ethvert valg af sandsynlighederne  $p_1, \dots, p_n$  aftager omvendt proportional med  $\sqrt{n}$ . Modellen forudsiger altså, at de relative hyppigheder asymptotisk for  $n \rightarrow \infty$  som funktion af  $n$  er givet ved højre side af (1). Ved sammenligning med de observerede data er det altså muligt for dommeren at vurdere godheden af fysikerens vurderingsmodel.  $\square$

**Eksempel 3.3** Betragt en snebelastet tagdrager, der er lagt af på to søjler som vist i figur 3.1. Analysen af denne bærende konstruktion gennemføres i en idealiseret matematisk model. Drageren antages i modellen at være en simpelt understøttet bjælke påvirket med en ensformigt fordelt lastintensitet. Denne antagelse indebærer to idealiseringer, der har betydning for snitkræf-

terne i drageren og for de kræfter, hvormed drageren påvirker søjlerne. Den ene idealisering vedrører antagelsen om simpel understøtning. Den medfører, at bjælken har normalkraften nul, og at der ikke er vandrette påvirkninger fra bjælken på søjlerne. Da snelasten virker lodret, er den virkelige vandrette påvirkning sædvanligvis beskednen. (Vandrette påvirkninger af søjlerne kan opstå på grund af friktion i understøtningsfladerne aktiveret ved bjælkens deformation frembragt af den lodret virkende last). Der kommer altså tilsyneladende lille modelusikkerhed fra understøtningsantagelsen.



Figur 3.1. Idealiseret model for tagdrager og snelast.

Drageren i den virkelige konstruktion kan imidlertid være udsat for temperaturvariationer eller svind, der medfører længdeændringer af drageren. Hvis forudsætningen om rulleleje ikke er særlig god, kan disse længdeændringer føre til vandrette flytninger af søjletoppene. Uden eksplicit hensyntagen til temperaturvariationerne eller svindet kan modellen med simpel understøtning altså have betydelig usikkerhed. Dens størrelse afhænger naturligvis af indretningen af den virkelige understøtning, af søjlernes stivhed, af dragerens varmeudvidelseskoefficient og dens svindegenskaber samt af de negligerede temperaturvariationers størrelse. Denne modelusikkerhed har mindre betydning for dragerens sikkerhed med hensyn til egen bæreevne, men er særdeles væsentlig for søjlernes sikkerhed.

Den anden idealisering vedrører snelasten. I virkeligheden er den ikke ensformigt fordelt over taget. Den tilhørende modelusikkerhed kan vurderes ved at sammenligne med resultater fra en mere detaljeret lastvariations-

model. Eksempelvis er den lodrette kraft på den højre søjle i modellen lig med  $Lp/2$ , medens den med den "virkelige" lastfordeling bliver

$$F = \frac{1}{L} \int_0^L xp(x) dx = \frac{1}{2} L (p + J_p) \quad (4)$$

hvor

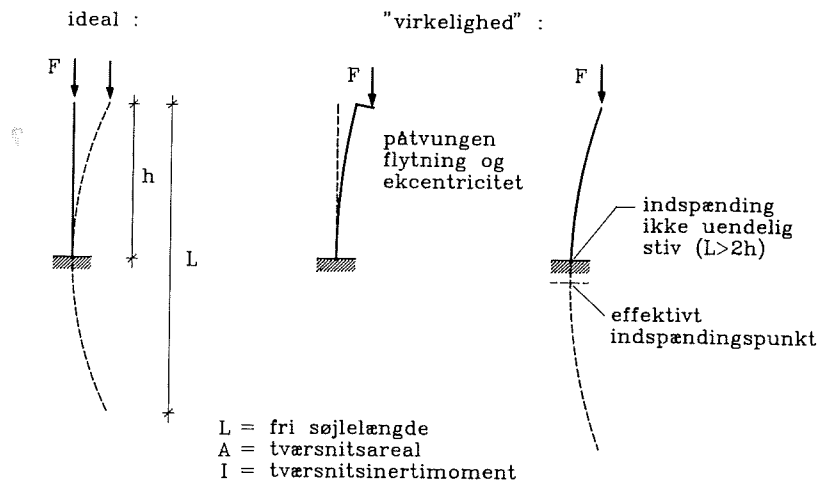
$$J_p = \frac{2}{L^2} \int_0^L x[p(x) - p] dx \quad (5)$$

på nær små fejl ved nedre og øvre integrationsgrænse (hvert sted mangler en integration over den halve vægtykkelse).

Hvis  $p$  er modelleret uafhængigt af den betragtede konstruktion som en stokastisk variabel på grundlag af observationer af jævnt fordelte snelag på jordoverfladen, må de stokastiske egenskaber, der er tillagt  $p$ , altså modificeres med hensyn til modelusikkerhed, før de kan bruges i en sikkerhedsanalyse udført inden for rammerne af den idealiserede model. Denne modelusikkerhed vedrører såvel en systematisk ændring af middelværdien og variansen fra jordoverflade til tagflade som den ujævne fordeling af sneen på tagfladen, og den afhænger iøvrigt af hvilken lasteffekt, der betragtes. Betragtes eksempelvis bøjningsmomentet i bjælkens midtpunkt, skal integranden  $x p(x)$  i (4) erstattes af  $L x p(x)/2$  for  $x \leq L/2$  og  $L(L-x) p(x)/2$  for  $x > L/2$ .

Det usikre kendskab til  $p(x)$  og dermed til korrektionsleddet  $J_p$  kan udmøntes ved at lade  $J_p$  være en stokastisk variabel med middelværdi og varians valgt ved en passende vurdering. Denne vurdering drejer sig om sneens muligheder for uensartet fordeling (drivedannelse) og bortfygning fra taget ved forskellige vindretninger og vindstyrker. Vurderingen kan naturligvis støttes på beregning af  $J_p$  efter (5) med brug af forskellige skønsmæssige valg af  $p(x) - p$ .

Resultatet kan i sin simpleste form udtrykkes ved en middelværdi  $E[J_p]$ , en varians  $\text{Var}[J_p]$  og en kovarians  $\text{Cov}[p, J_p]$ . Sikkerhedsanalysen kan derefter gennemføres inden for rammerne af den simple model ved at erstatte den givne middelværdi  $E[p]$  og den givne varians  $\text{Var}[p]$  af  $p$  med henholdsvis  $E[p] + E[J_p]$  og  $\text{Var}[p] + \text{Var}[J_p] + 2\text{Cov}[p, J_p]$ . Oftest medfører hensyntagen



Figur 3.2. Søjlemodeller med forskellig grad af idealisering.

til modelusikkerhed, at den betragtede inputvariabel, her  $p$ , får tillagt forøget varians.

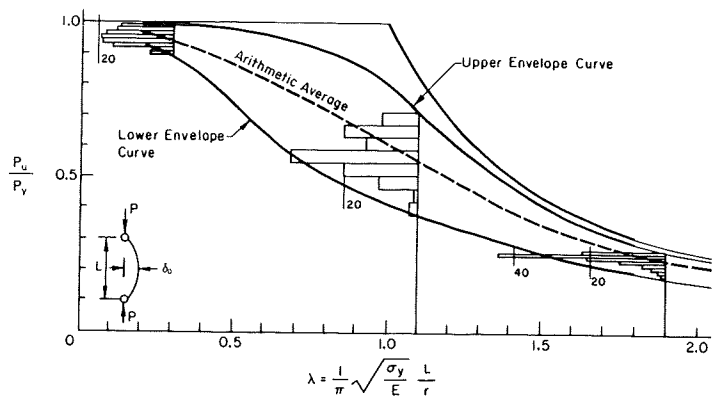
Lad os dernæst se på analysen af den højre søjle i figur 3.1. Den mest vidtgående idealisering fås ved at lade søjlen være en retlinet centralt belastet søjle indspændt for neden og fri for oven, figur 3.2, og ved at antage, at søjlematerialet opfører sig lineærelastisk – idealplastisk under sammentrykning med elasticitetskoefficient  $E$  og trykflydespænding  $\sigma_y$ . Søjleens teoretiske bæreevne  $P_u$  bliver da bestemt ved den såkaldte Eulerkraft  $\pi^2 EI/L^2$ , såfremt denne er mindre end den kraft  $P_y = A\sigma_y$ , der svarer til trykflydning i hele søjletværsnittet.

Den teori for centralt belastede søjler, hvoraf dette resultat følger, forudsætter, at søjlen er retlinet. Hvis søjlen har en blot svag begyndelseskrumning (dette er næsten altid tilfældet for virkelige søjler) eller iøvrigt ikke er nøjagtigt centralt belastet, vil normalkraften ikke kunne vokse i søjlen, uden at bøjningsmomenterne samtidigt vokser. Dette bevirker, at søjlen når en maksimal bæreevne ved en lavere normalkraft end bestemt ved Eulerkraften eller flydespændingen. Desuden forudsætter teorien, at søjlen er fri for egenspændinger, dvs at søjlen er spændingsfri i ubelastet tilstand. Virkelige søjler bliver gennem fremstillingsmetoden påført egenspændinger, som medfører, at

tøjning-spændingsdiagrammet (arbejdslinien) opnået ved gennemsnitsdannelse over hele søjletværsnittet ikke er lineærelastisk-idealplastisk, men at der er en mere eller mindre krum overgang mellem det lineærelastiske område og det idealplastiske område. Tværsnitsarbejdsliniens forløb afhænger altså af egenspændingstilstanden, som derfor også har indflydelse på søjleens bæreevne, idet denne og arbejdsliniens hældning ved bæreevneværdien (den "effektive elasticitetskoefficient") hænger nøje sammen (Engesser-Shanley teori). Figur 3.3 antyder resultatet af 112 beregninger af forholdet  $P_u/P_y$  som funktion af det såkaldte reducerede slankhedsforhold  $\lambda$  (defineret i figuren) for stålsøjler med en række forskellige tværsnitsformer og stålkvaliteter samt en begyndelseskrumning med en pilhøjde på 1/1000 af søjlelængden.

Eulerkraften er i diagrammet repræsenteret ved  $1/\lambda^2$  (øverste højre kurve). De benyttede egenspændingsfordelinger er baseret på målte data tilgængelige i 1972. Beregningerne er udført af R. Bjorhovde [3.1] og er refereret i [3.2], hvorfra figur 3.3 stammer. Beregningsresultaterne er blevet sammenlignet med målte resultater for tilsvarende forsøgssøjler. Det angives, at de fleste målte resultater afviger mindre end 5% fra de beregnede resultater dvs en usikkerhed, der svarer til en halv til en hel enhed (0.1) på ordinataksen i figur 3.3. Hvis man forudsætter, at de 112 beregninger svarer til en repræsentativ stikprøve af de i praksis forekommende virkelige stålsøjler, giver de i figur 3.3 viste histogrammer et indtryk af den modelusikkerhed, som er relevant, hvis man lægger sig fast på en bestemt idealiseret bæreevnekurve, der bestemmer  $P_u/P_y$  entydigt som funktion af  $\lambda$ . Under hensyntagen til afvigelserne mellem de beregnede værdier og de eksperimentelle data bliver modelusikkerheden endda lidt større end antydnet ved histogrammerne.

Modelusikkerhedsproblemet for søjlerne er imidlertid ikke slut hermed. Størrelsen  $L$  er den såkaldte fri søjlelængde. Hvis indspændingen for neden er uendelig stiv, og den øverste ende er helt fri, bliver  $L = 2h$  som vist til venstre i figur 3.2. Hvis indspændingen blot er en smule fleksibel, vokser den fri søjlelængde som antydnet til højre i figur 3.2. Af figur 3.3 ses, at dette medfører en formindsket bæreevne. Indspændingsforudsætningen kan altså give anledning til betydelig modelusikkerhed. Forudsætningen om fri søjleende giver også anledning til modelusikkerhed. De to søjleender er forbundne med bjælken, således at udbøjning af den ene søjleende vil påvirke den anden



Figur 3.3. Statistisk population af bæreevnekurver for stålsøjler med given begyndelseskrumning, fra [3.2].

søjleende, hvis forudsætningen om friktionsfrit rulleleje ikke er god.

Alle disse modelusikkerheder må nødvendigvis indgå i sikkerhedsanalysen i en passende idealiseret form. Resultatet vil blive en konstruktion, som vil have kraftigere dimensioner end krævet, hvis der ofres en større indsats på at formulere en mindre idealiseret model med tilhørende mindre modelusikkerhed. Det er et spørgsmål om økonomi og andre dimensionsgivende hensyn, om det er værd at foretage en sådan mere detaljeret analyse.

Den betydelige modelusikkerhed knyttet til søjleproblemet indbyder naturligvis til mere detaljeret undersøgelse. I mange landes normer for stålkonstruktioner er der da også givet flere søjlekurver. Den nugældende danske stålnorm angiver således 5 kurver, hvor valget af kurve bestemmes af tværsnitsform og fremstillingsmetode (valset eller svejst profil).

Fastsættelsen af den fri søjlelængde ved simple betragtninger vedrørende understøtningsbetingelserne udgør en usikkerhedskilde, der ofte vil dominere over den usikkerhed, der er knyttet til valget af søjlekurve. Dette problem er en kilde ikke blot til betydelig modelusikkerhed, men også til regulære fejltagelser (grove fejl), som skyldes fejlagtige opfattelser af konstruktionens deformationsegenskaber. Sikkerhedsanalysen tager i almindelighed ikke sådanne fejltagelser i regning, fordi de ofte er vanskeligt tilgængelige for kvantitativ probabilistisk modellering. Forekomst af fejltagelser vil vi derfor ikke karakterisere som modelusikkerhed. Forebyggelse må foregå ved kontrol-

foranstaltninger rettet mod selve konstruktionsanalysen. Spørgsmålet om fejltagelser indflydelse behandles nærmere i kapitel 12 om beslutningsfilosofi. I nærværende eksempel og i andre lignende eksempler formindskes faren for, at der begås en fejltagelse vedrørende den fri søjlelængde ved, at også konstruktionen som helhed og ikke de enkelte søjler analyseres med hensyn til stabilitet. Herunder kan virkningen af forskellige understøtningsvilkår studeres. □

Ved enhver nok så forfinet grad af detaljering af den matematisk-mekaniske model forbliver en modelusikkerhed. Denne kan måske gøres så lille, at yderligere formindskelse af modelusikkerheden ikke har mærkbar effekt på det resulterende sikkerhedsmål. Det betyder, at bidragene fra de fysiske fluktuationer og fra andre usikkerhedskilder (valg af sandsynlighedsfordelingstyper, statistisk usikkerhed, måleusikkerhed, udviklingsfremskrivning, etc) dominerer over den mekaniske models usikkerhed i en sådan grad, at den betragtede forfinelse næppe er rimelig, hvis den er fordyrende på projekteringsarbejdet. Information, der kun i lille grad påvirker svaret, må i praksis betragtes som unødvendig information for det givne spørgsmål.

### 3.4 Modelusikkerhedsvurdering og hensyntagen hertil i sikkerhedsanalysen \*

Lad den idealiserede grænsetilstandsflade  $\mathcal{G}_1$  være givet i rummet af inputvariable  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  ved en ligning af formen  $g(\mathbf{x}) = 0$ , dvs

$$\mathcal{G}_1 = \{\mathbf{x} | g(\mathbf{x}) = 0\} \quad (1)$$

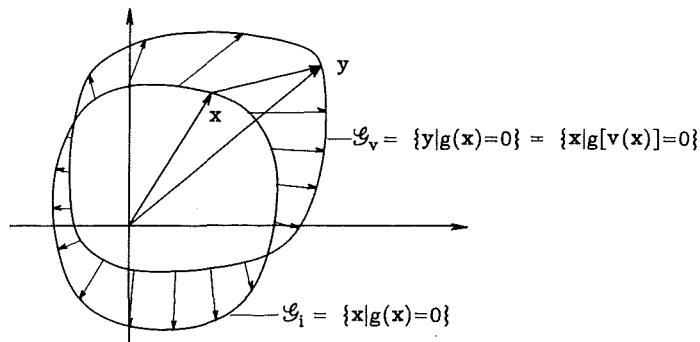
En kontinuert deformeret version (en perturbation) af  $\mathcal{G}_1$  kan frembringes ved hjælp af en kontinuert eenentydig afbildning

$$\mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = \mathbf{v}(\mathbf{y}) \quad (2)$$

af rummet på sig selv, således at billedpunktet  $\mathbf{y}$  af et vilkårligt punkt  $\mathbf{x} \in \mathcal{G}_1$  er passende tæt ved  $\mathbf{x}$ . Billedfladen af  $\mathcal{G}_1$  bliver da, se figur 3.4,

$$\mathcal{G}_v = \{\mathbf{y} | g(\mathbf{x}) = 0 \wedge \mathbf{y} = \mathbf{w}(\mathbf{x})\} = \{\mathbf{y} | g[\mathbf{v}(\mathbf{y})] = 0\} = \{\mathbf{x} | g[\mathbf{v}(\mathbf{x})] = 0\} \quad (3)$$

Vi kan forestille os, at afbildningen er valgt således, at  $\mathcal{G}_V$  bliver den "virkelige" grænsetilstandsflade. Vi har allerede tidligere forestillet os, at den virkelige grænsetilstandsflade kan opfattes som udtrukket tilfældigt fra en population af grænsetilstandsflader. Vi ser her, at dette er ækvivalent med at udtrække afbildningen (2) tilfældigt fra en population af afbildninger.



Figur 3.4. Vektorfeltet  $y - x = w(x) - x = y - v(y)$ , der modellerer modelusikkerheden.

Vi kan altså formulere vurderingsproblemet om modelusikkerhed som et problem om valg af et stokastisk vektorfelt  $W(x) - x = y - V(y)$ , der fører den faste idealiserede grænsetilstandsflade  $\mathcal{G}_1$  over i den stokastiske "virkelige" grænsetilstandsflade  $\mathcal{G}_V$ . Hvis den idealiserede grænsetilstandsflade  $\mathcal{G}_1$  i form og beliggenhed har nogenlunde lighed med de virkelige grænsetilstandsflader, vil det stokastiske vektorfelt i middel være tæt ved et vektorfelt af nulvektorer, og det vil have små standardafvigelse, hvis modelusikkerheden er lille.

Lad  $\mathcal{X}_1$  og  $\mathcal{X}_V$  betegne henholdsvis den idealiserede og den virkelige svigthændelse. Det ses da, at

$$x \in \mathcal{X}_V \Leftrightarrow V(x) \in \mathcal{X}_1 \quad (4)$$

Vi kan altså ved at ændre inputvariablene  $x$  til de modificerede stokastiske "inputvariable"  $V(x)$  fastholde svigthændelsen  $\mathcal{X}$  som den idealiserede svigthændelse  $\mathcal{X}_1$  og grænsetilstandsfladen  $\mathcal{G}$  som den idealiserede grænsetilstandsflade  $\mathcal{G}_1$ .

Den simpleste form for modelusikkerhedsvektorfelt fås ved at definere

$$V(x) = x + J \quad (5)$$

hvor  $J$  er en stokastisk vektor, der er uafhængig af  $x$ . Dette svarer til, at den virkelige grænsetilstandsflade fås ved en tilfældig parallelforskydning af den idealiserede grænsetilstandsflade. Den stokastiske inputvektor  $X$  erstattes da i sikkerhedsanalysen med den stokastiske vektor  $X + J$ .

En mere fleksibel og mindre idealiseret modelusikkerhedsrepræsentation fås ved definitionen

$$V(x) = Hx + J \quad (6)$$

hvor  $J$  er som i (5), medens  $H$  er en stokastisk matrix, der er uafhængig af  $x$ . Dette svarer til, at den virkelige grænsetilstandsflade fås ved en tilfældig parallelforskydning kombineret med en tilfældig affin afbildning af den idealiserede grænsetilstandsflade. Den stokastiske inputvektor  $X$  erstattes altså i sikkerhedsanalysen med den modificerede stokastiske inputvektor  $HX + J$ .

Disse eksempler repræsenterer åbenbart de "virkelige" grænsetilstandsflader ved flader, der i deres form er lige så idealiserede som den idealiserede grænsetilstandsflade selv. Som vi skal se i det følgende, er dette imidlertid mindre væsentligt for sikkerhedsmålet. Det væsentligste modelusikkerhedsbidrag viser sig i en vis forstand at komme fra repræsentationen af den tilfældige beliggenhed. Dette hænger sammen med en gennemsnitsdannelse, der udjævner tilfældige variationer i grænsetilstandsfladens detaljerede form.

Lad os antage, at  $X$  har sandsynlighedstætheden  $f_X(x)$ , og at det stokastiske vektorfelt  $V(x)$  for ethvert  $x$  har en veldefineret sandsynlighedsfordeling. Det er da muligt i princippet at udregne svigtsandsynligheden

$$p(x) = P[V(x) \in \mathcal{X}] \quad (7)$$

for enhver given værdi  $x$  af  $X$ . Den ubetingede svigtsandsynlighed bliver

$$P[V(X) \in \mathcal{F}] = \int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad (8)$$

Dette integral kan udregnes på en særlig måde. Lad os for et vilkårligt  $u \in [0,1]$  definere punktmængden

$$\mathcal{F}(u) = \{\mathbf{x} | p(\mathbf{x}) \geq u\} \quad (9)$$

som illustreret i figur 3.5.

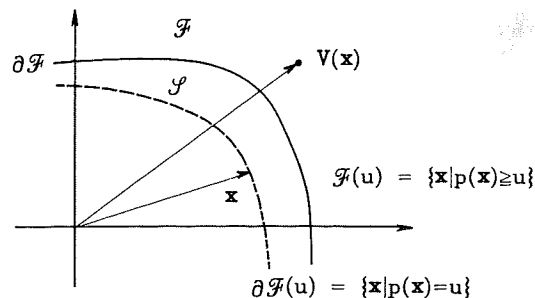
Intervalltet  $[0,1]$  inddeler vi herefter i  $k$  lige store dele, og vi indfører funktionen  $p_k(\mathbf{x})$  defineret ved, se figur 3.6,

$$p_k(\mathbf{x}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \mathbf{1}_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}(i/k)} \quad (10)$$

hvor  $\mathbf{1}_{\text{"udsagn"}}$  = 1 hvis "udsagn" er sand, og  $\mathbf{1}_{\text{"udsagn"}}$  = 0 hvis "udsagn" er falsk. Vi har da åbenbart, at

$$0 < p(\mathbf{x}) - p_k(\mathbf{x}) < \frac{1}{k} \quad (11)$$

for alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  og alle  $k$ . Vi får derfor en fejl, der er mindre end  $1/k$ , hvis vi

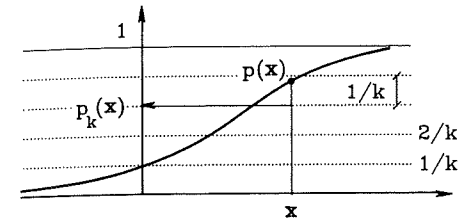


Figur 3.5. Mængden  $\mathcal{F}(u)$  af de  $\mathbf{x}$  for hvilke svigtsandsynligheden pga modelusikkerhed er større end  $u$ .

erstatte  $p(\mathbf{x})$  med  $p_k(\mathbf{x})$  i (8). Dette giver

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \simeq \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}(i/k)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^k \frac{1}{k} \int_{\mathcal{F}(i/k)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad (12)$$

eller, for  $k \rightarrow \infty$ ,



Figur 3.6. Definition af funktionen  $p_k(\mathbf{x})$ .

$$\int_{\mathbb{R}^n} p(\mathbf{x}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int_0^1 du \int_{\mathcal{F}(u)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

Det inderste integral på højre side af (13)

$$\int_{\mathcal{F}(u)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

kan tolkes som svigtsandsynligheden svarende til en antagelse om, at  $\mathcal{F}(u)$  er svigtmængden. I stedet for at betragte den totale population af mulige grænsetilstandsflader kan vi altså ifølge (13) nøjes med at arbejde med en enparameterpopulation af "grænsetilstandsflader" defineret ved

$$\partial \mathcal{F}(U) = \{\mathbf{x} | p(\mathbf{x}) = U\} \quad (15)$$

hvor  $U$  er en stokastisk variabel, der er ensformigt fordelt i intervallet  $]0,1[$ .

Det er nu nærliggende at identificere fladepopulationen (15) med fladepopulationen, se (3),



$$\{\mathbf{x} | g[\mathbf{v}(\mathbf{x}; U)] = 0\} \quad (16)$$

hvor  $\mathbf{v}(\mathbf{x}; U)$  er et særligt simpelt vektorfelt, nemlig et sådant hvor udfaldsfeltet er fastlagt, når værdien af  $U$  er fastlagt.

Ifølge (9) gælder, at

$$u_1 \leq u_2 \Rightarrow \mathcal{F}(u_1) \supset \mathcal{F}(u_2) \quad (17)$$

altså at  $\mathcal{F}(u)$  er dalende for  $u$  voksende. Vektorfeltet  $\mathbf{v}(\mathbf{x}; u)$  skal derfor som funktion af  $u$  tilfredsstille en tilsvarende betingelse.

Vi skal se i kapitel 6: "det generaliserede sikkerhedsindeks", at det kun er visse i en bestemt forstand centralt beliggende lokale dele af grænsetilstandsfladen, der bidrager væsentligt til svigtsandsynligheden. Det er derfor ofte tilstrækkeligt at betragte restriktioner af modelusikkerhedsvektorfeltet til lokale områder, der indeholder disse centrale dele af grænsetilstandsfladen. I et sådant lokalt område kan man sædvanligvis nøjes med at benytte et vektorfelt af formen, se (5),

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}; U) = \mathbf{x} + \mathbf{J} z(U) \quad (18)$$

hvor  $z(u)$  er en passende valgt voksende funktion af  $u \in ]0, 1[$ , medens  $\mathbf{J}$  er en konstant vektor, se figur 3.7. Den stokastiske variabel  $Z = z(U)$  har fordelingsfunktionen

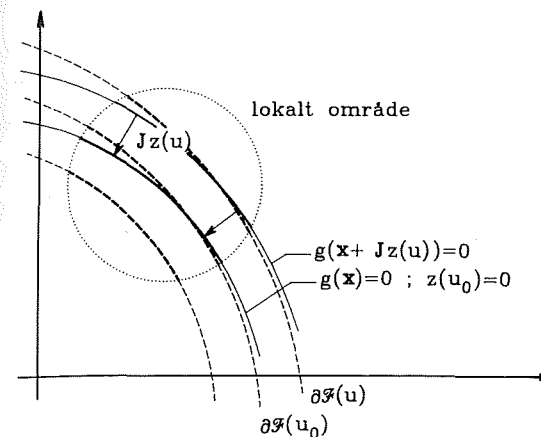
$$F_Z(x) = P(Z \leq x) = P[U \leq z^{-1}(x)] = z^{-1}(x) \quad (19)$$

med den omvendte funktion

$$z(u) = F_Z^{-1}(u) \quad (20)$$

og  $Z$  er uafhængig af den stokastiske inputvektor  $\mathbf{X}$ .

Vi kan altså konkludere, at vi i det væsentlige kan tage hensyn til modelusikkerhed alene ved en simpel modifikation af inputvektorens fordelingsgenskaber. Efter at vi i de næstfølgende kapitler har fået mere hold på den



Figur 3.7. Modelusikkerhedens indflydelse gør sig i et givet sikkerhedsproblem kun væsentligt gældende inden for et lokalt område af grænsetilstandsfladen.

elementære sikkerhedsanalyser begreber og metoder, vender vi tilbage til sikkerhedsvurdering under hensyntagen til modelusikkerhed.

Udøvelse af den kvantitative vurdering af modelusikkerhed i specifikke eksempler hører til sikkerhedsanalyserens vanskeligere dele. Dette skyldes modelusikkerhedens natur af samspil mellem mange faktorer, samt at information om den ofte er sparsom og fragmentarisk. Det vil i praksis normalt være vanskeligt for den enkelte ingeniør at udøve kvalificerede vurderinger uden besiddelse af betydelig faglig specialindsigt. Modelusikkerhedsproblemet kan imidlertid ikke negligeres, og det er derfor nødvendigt, at retningslinier for vurderingsudøvelsen sammen med kvantitative angivelser for de hyppigst benyttede mekaniske modeller og svigtkriterier er afstukket i en reference-norm for professionen.

### 3.5 Sikkerhedsanalyserens objektivitet \*

En konstruktions sikkerhed med hensyn til en grænsetilstand udtrykkes kvantitativt ved et tal fra en passende skala, der er relateret til en tidsperiode af given varighed. Idet det tages for givet, at sikkerhedsvurderingen baseres på probabilistiske modeller, er sikkerhedsmålet entydigt forbundet med svigtsandsynligheden, dvs sandsynligheden for at grænsetilstanden overskrides inden for den betragtede tidsperiode.

Svigtsandsynligheden beregnes som beskrevet i de følgende kapitler på basis af de forskellige modeller, der er formuleret for de forskellige relevante tilfældigheder og usikkerheder beskrevet i de foregående afsnit af dette kapitel. Adskillige af disse delmodeller må nødvendigvis indeholde skønsmæssigt valgte elementer inklusive skønnede parameterværdier. De er af personalistisk (subjektiv) natur. Denne kendsgerning kan give det vildledende indtryk, at den samlede probabilistiske sikkerhedsvurderingsmetode savner objektivitet, og at sikkerhedsmålet blot er resultatet af en slags akademisk hokus pokus.

Pointen er imidlertid, at modellens objektivitet ikke anfægtes af den kendsgerning, at dens elementer vælges på grundlag af skønsmæssig vurdering og derfor nødvendigvis til en vis grad må være arbitrære. For at have mening kræver denne påstand en definition af objektivitetsbegrebet. Ifølge G. Matheron [3.3] (som støtter sig til K.R. Popper's "Logic of Scientific Discovery" [3.4]) er det afgørende kriterium for objektivitet af et udsagn, at udsagnet i princippet kan falsificeres. En model, som er formuleret med den hensigt, at den skal afspejle virkelige fænomener, er et sammensat udsagn, som nødvendigvis må tilfredsstille det krav, at det kan underkastes et falsifikationstest. Hvis ikke, kan udsagnet ikke indeholde information af empirisk værdi.

Der opstår her et filosofisk problem om, hvordan man falsificerer en probabilistisk model. Matheron foreslår pragmatisk at bruge princippet i statistisk hypoteseprøvning: Hvis en forud specificeret hændelse, der har relevans for anvendelserne af modellen, har en meget lille beregnet sandsynlighed, da må modellen betragtes som falsificeret med hensyn til den betragtede hændelse, hvis hændelsen faktisk forekommer i det tilsvarende virkelige eksperiment. Da de relevante uønskede hændelser, der betragtes i analysen af konstruktioners sikkerhed, ved dimensionering gives meget små sandsynligheder, bør en probabilistisk sikkerhedsmodel anses for at være falsificeret med hensyn til dens tilstræbte anvendelsesområde, hvis en af de uønskede hændelser indtræffer samtidig med eller efter etableringen af den virkelige konstruktion. Tolkningen af dette er, at hvis den indtrufne uønskede hændelse efter nærmere undersøgelser ikke kan henføres til en grov fejl, som har forårsaget afvigelsen fra den planlagte konstruktion, da er sikkerhedsmodellen falsificeret, dvs den indeholder efter alt at dømme en grov fejl.

Det ses, at falsifikationsbegrebet for en probabilistisk model får en noget svagere mening end for en deterministisk model. Dette svagere begreb kan kaldes "pragmatisk falsifikation". En probabilistisk model udelukker naturligvis ikke forekomsten af en specificeret hændelse, der har meget lille sandsynlighed. I princippet kan modellen være gyldig, selv om hændelsen forekommer. (I klassisk statistisk hypoteseprøvning kaldes dette en "fejl af første art", dvs forkastelse af en sand hypotese). Derfor betyder falsifikation af modellen ikke, at den umiddelbart forkastes, men snarere, at den bør underkastes et kritisk studium, der muligvis vil føre til en revision af modellen. Det filosofiske problem om falsifikation af en probabilistisk model er ganske enkelt elimineret ved at fastslå, at *en probabilistisk model er objektiv, hvis den kan underkastes et pragmatisk falsifikationstest*. Dette er tilstrækkeligt til at sikre, at modellen kan indeholde information af empirisk værdi, og det er en betingelse for, at princippet om revision i det lange løb kan anvendes (se bemærkning 3.2).

Modeller for konstruktioners sikkerhed adskiller sig fra andre typer af probabilistiske modeller ved, at interessen samler sig om hændelser, der har meget lille sandsynlighed for at forekomme. Den praktiske vanskelighed med direkte at gennemføre det pragmatisk falsifikationstest med sådanne meget sjældne kritiske hændelser påtvinger princippet om anticipatorisk modelformulering [3.3]. Stræben efter objektivitet nødvendiggør, at den totale sikkerhedsmodel opbygges af delmodeller, der langt lettere end den totale model kan underkastes det pragmatisk falsifikationstest, og som kombineres ved brug af operationelle regler, der kan påstås at være objektive, dvs naturlige, geometriske regler, sandsynlighedsregningens regneregler, etc.

Lad os antage, at en ingeniør konsistent bruger sikkerhedsanalyse baseret på princippet om anticipatorisk modelformulering og på egne vurderinger med det formål at træffe rationelle dimensioneringsbeslutninger. På grund af den store sjældenhed af de relevante uønskede hændelser, er det i praksis umuligt for denne ingeniør personligt at opnå tilstrækkelig erfaring til at opfølge princippet om revision i det lange løb. På trods heraf må den probabilistiske sikkerhedsanalyse stadig betragtes som et rationelt formelt værktøj til sammenfatning af forskellige typer af personalistisk viden om konstruktionen og dens påvirkninger resulterende i et enkelt for beslutningstagen nyttigt personalistisk sikkerhedsmål. Denne påstand støttes på det anvendte princip

om anticipatorisk modelformulering. Det er imidlertid klart, at det er af interesse for samfundet, at erfaringer fra hele ingeniørprofessionens aktivitet bliver sammenfattet, således at princippet om revision i det lange løb kan blive effektivt. Det er desuden nødvendigt for samfundet at kunne beskytte menneskeliv og ejendomme mod mindre hensigtsmæssige konstruktive konsekvenser af arbitrære og dårligt funderede vurderingsresultater og af uprofessionelle gæt. Derfor opstilles spilleregler for professionen i en autoriseret norm. Indtil i dag har konstruktive normer verden over været af deterministisk form som beskrevet i kapitel 2: "partialkoefficientsmetoden". Princippet om revision i det lange løb sammenholdt med de stadig stigende krav om at kunne opføre mere økonomiske og mere elegante konstruktioner vil uden tvivl inden mange år føre til formuleringer af normer for probabilistisk sikkerhedsanalyse. Internationalt arbejde i denne retning foregår i øjeblikket for eksempel i *Joint Committee of Structural Safety*, som har basis i adskillige internationale professionelle foreninger.

Det er afgørende for princippet om revision i det lange løb og for beskyttelsen af offentligheden, at sikkerhedsanalysen holdes fri for arbitrære valg af elementer med hensyn til hvilke, sikkerhedsmålet er følsomt. Kun empirisk eller såkaldt indre objektive [3.3] valg af elementer bør overlades til den projekterende ingeniør. Dette indebærer, at normen bør indeholde standardiseringer af visse elementer. Disse standardiseringer bør i det mindste omfatte visse antagelser om typerne af de sandsynlighedsfordelinger, der skal bruges i sikkerhedsanalysen.

Normrevisioner bør kun gennemføres med passende store tidsmellemlum, for at en rimelig mængde af erfaringer kan blive indsamlet og bearbejdet. På grund af de nødvendige standardiseringer og de mere eller mindre tilstræbte kraftige idealiseringer får den normgivne sikkerhedsmodel karakter af et formelt system for logisk informationsbehandling, i hvilket de absolutte svigtsandsynlighedsværdier indeholder begrænset forudsigelseskraft. Hvad angår empirisk information, bliver sandsynlighederne formelle, og de får næsten udelukkende deres informationsmæssige betydning som sammenligningsmål med hensyn til sikkerheden mod forskellige uønskede hændelser for den samme eller for forskellige konstruktive løsninger til et givet byggeanlægsproblem. Hermed menes, at sandsynlighederne for de uønskede hændelser primært tjener som indikatorer for en ordning af mængden af par af kon-

struktioner og grænsetilstande med hensyn til sikkerhed. Denne ordning gør det muligt at formulere et udsagn som "disse to konstruktioner er lige sikre med hensyn til den uønskede hændelse A". Det punkt, der deler sandsynlighedsskalaen i de tilstrækkeligt sikre og de utilstrækkeligt sikre konstruktioner med hensyn til hændelsen A fastlægges ved at erklære en sammenligningsstandard for at være netop tilstrækkelig sikker med hensyn til hændelsen A. Sammenligningsstandarden er en specifik grænsetilstand for en specifik konstruktion, og erklæringen er afgivet på basis af generel enighed inden for en autoriseret normkomite. Den numeriske værdi af demarkationspunktet på sandsynlighedsskalaen afhænger naturligvis af den valgte probabilistiske sikkerhedsmodel.

Det ses her, at objektivitetskriteriet om muligheden for pragmatisk falsifikation kræver en udvidelse, der specificerer operationelt, hvordan den ved modellen inducerede ordning med hensyn til sikkerhed kan falsificeres. Objektivitetskravet kan tilfredsstilles i det lange løb ved, at normkomiteen følger en passende handlingsstrategi, der før eller siden medfører, at sikkerhedsmodellen underkastes et pragmatisk falsifikationstest. En sådan handlingsstrategi, og måske den eneste ansvarlige strategi, er gradvis at ændre sammenligningsstandarden i retning af mindre sikkerhed. Til sidst vil sikkerhedsmodellen føre til konstruktioner, der med observerbar hyppighed vil udvise uønsket opførsel (en hyppighed der dog stadig kan være langt mindre end den aktuelle hyppighed af uønsket opførsel, der kan føres tilbage til grove fejl). Ved brug af data fra observationer af sådanne uønskede hændelser er det i princippet muligt at gennemføre et pragmatisk falsifikationstest af sikkerhedsordningsrelationen. På dette grundlag kan princippet om revision i det lange løb blive effektivt.

## Referencer

- 3.1 R. Bjorhovde: *Deterministic and probabilistic approaches to the strength of steel columns*, Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, Lehigh University, Bethlehem, PA, USA, 1972.
- 3.2 W.F. Chen and D.J. Han: *Tubular members in offshore structures*. Pitman Advanced Publishing Program, 1985, p. 72.

- 3.3 G. Matheron: *Estimating and Choosing* (transl. by A.M. Hasofer), Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 1989.
- 3.4 K.R. Popper: *The logic of scientific discovery*. Hutchinson, London, 1972.

## 4. DET SIMPLE SIKKERHEDSINDEKS

### 4.1 Begrænset probabilistisk information

I dette og de nærmest følgende kapitler vil vi indføre et sikkerhedsbegreb for bærende konstruktioner, der benytter sig af et lige netop nødvendigt mindstemål af begreber fra sandsynlighedsregningen, for at man kan tale om en model, der muliggør rationel regning med usikkerheder.

Vi vil således indtil videre antage, at de stokastiske inputvariable kun er beskrevne ved deres såkaldte "andenmomentrepræsentation", dvs alene ved deres middelværdier, varianser og kovarianser. Herved gøres der kun meget svage direkte antagelser om typen af deres sandsynlighedsfordelinger, nemlig kun antagelser om eksistens af middelværdier og varianser.

Dette er hensigtsmæssigt, fordi det i de fleste praktiske usikkerhedsvurderinger vil være udelukket at vælge fordelingstyper på grundlag af solid data-information. Pragmatiske principper eller normforskrifter bliver afgørende for valget af fordelingstyperne. En usikkerhedsanalyse, der fritager fra sådanne valg, er derfor ikke uden interesse.

Hertil kommer, at den simple på andenmomentrepræsentationer opbyggede sikkerhedsanalyse viser sig at føre til regnemetoder, der med stor effektivitet også lader sig anvende i sikkerhedsanalyser, der udnytter fuld probabilistisk information. Det er derfor nyttigt at gøre sig fortrolig med den grundlæggende algebra for andenmomentrepræsentationer. Også hertil tjener dette kapitel.

### 4.2 Regning med lineære sikkerhedsmargener

Vi vil i dette kapitel se på det tilsyneladende specielle tilfælde, hvor grænsetilstandsligningen  $g(x_1, \dots, x_n) = 0$  er lineær i inputvariablene  $x_1, \dots, x_n$ . Det betyder, at ligningen har formen

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0 \quad , \quad b > 0 \quad (1)$$

hvor  $a_1, \dots, a_n, b$  er givne konstanter. I overensstemmelse med definitionen i

afsnit 2.1 vil vi lade den sikre mængde være mængden af de punkter i  $\mathbb{R}^n$  for hvilke

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b > 0 \quad (2)$$

Den flade, der er bestemt ved ligningen (1) er en ret linie for  $n = 2$  og en plan for  $n = 3$ . For vilkårligt  $n$  kaldes den en hyperplan.

Sædvanligvis er en grænsetilstandsflade for et praktisk sikkerhedsanalyseproblem ikke en hyperplan. Vi skal imidlertid i senere kapitler se, at man ofte kan opnå særdeles gode tilnærmelser ved på særlig måde at approksimere den givne ikke plane grænsetilstandsflade med en eller flere hyperplaner. De herved vundne simplifikationer er så betydelige, at det er værd at ofre indsats på studiet af forholdene for grænsetilstandsflader, der er sammensat af højst endelig mange hyperplaner. Den ved en sådan grænsetilstandsflade afgrænsede sikre mængde siges at være polyhedral. I kapitlet "det generaliserede sikkerhedsindeks" vises det, at specielt simple forhold fås for polyhedrale sikre mængder, der er konvekse. Dette er specielt heldigt, fordi særligt valgte konvekse polyhedrale mængder ofte er hensigtsmæssige i sikkerhedsanalysen som approksimationer til den givne ikke nødvendigvis konvekse svigt mængde. (En mængde siges at være konvex, hvis punktet  $\alpha x + (1-\alpha)y$  tilhører mængden for ethvert valg af punkterne  $x, y$  inden for mængden og for ethvert  $\alpha \in [0,1]$ ).

I dette kapitel vil vi derfor koncentrere os om geometriske beregninger, der vedrører hyperplaner. Disse geometriske beregninger vil imidlertid blive iklædt sandsynlighedsregningens- og sikkerhedsanalysens sprog.

Antag nu, at inputvariablene  $x_1, \dots, x_n$  tillægges usikkerhed ved, at de modelleres som stokastiske variable  $X_1, \dots, X_n$  med givne middelværdier

$$E[X_1], \dots, E[X_n] \quad (3)$$

og kovarianser defineret ved

$$\text{Cov}[X_i, X_j] = E[X_i X_j] - E[X_i] E[X_j] \quad (4)$$

Disse størrelser udgør tilsammen det, der betegnes som andenmomentrepræ-

sentationen for den stokastiske vektor  $X = (X_1, \dots, X_n)$ . De specielle kovarianser, der svarer til  $i = j$ , er varianserne

$$\text{Var}[X_i] = \text{Cov}[X_i, X_i] = E[X_i^2] - E[X_i]^2, \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

Vektoren af middelværdier betegnes  $E[X]$ , medens matricen af kovarianser bekvemt skrives

$$\text{Cov}[X, X'] = E[XX'] - E[X] E[X'] \quad (6)$$

med bevarening af matrixregningens regneregler.

**Bemærkning 4.1** Regnereglerne for middelværdier (forventningsværdier, expectations) udspringer af definitionen af  $E[\cdot]$  som en positiv lineær funktional, der afbilder 1 i 1. Funktionalen er defineret på et lineært rum af stokastiske variable (symboliseret ved store bogstaver), konstanterne (symboliseret ved små bogstaver) inklusive. Regnereglerne er da

$$E[1] = 1 \quad (7)$$

$$E[aX] = a E[X] \quad (8)$$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \quad (9)$$

$$X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0 \quad (10)$$

Regnereglerne for kovarianser følger direkte af disse regler gennem brug af definitionen (4). Det ses, at kovariansen  $\text{Cov}[\cdot, \cdot]$  er en symmetrisk bilinear funktional. Regnereglerne er

$$\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[Y, X] \quad (11)$$

$$\text{Cov}[aX, Y] = a \text{Cov}[X, Y] \quad (12)$$

$$\text{Cov}[X, Y+Z] = \text{Cov}[X, Y] + \text{Cov}[X, Z] \quad (13)$$

der helt svarer til regnereglerne for et indre produkt (skalarprodukt) mellem to vektorer. Hertil kommer reglen

$$\text{Cov}[a, X] = 0 \quad (14)$$

samt ikke-negativitetsreglen

$$\text{Var}[X] = \text{Cov}[X, X] \geq 0 \quad (15)$$

Denne sidste regel følger af (14) og definitionen (4) ved at skrive

$$\text{Cov}[X, Y] = \text{Cov}[X-a, Y-b] = E[(X-a)(Y-b)] - E[X-a] E[Y-b] \quad (16)$$

og vælge  $a = E[X]$  og  $b = E[Y]$ . Da fås

$$\text{Cov}[X, Y] = E[(X-E[X])(Y-E[Y])] \quad (17)$$

som for  $X = Y$  og med brug af (10) giver

$$\text{Cov}[X, X] = E[(X-E[X])^2] \geq 0 \quad (18)$$

Det ses, at konstanterne under additionsoperationer svarer til nulvektoren, når kovariansen opfattes som et indre produkt i vektorrummet af stokastiske variable.

For vektorer af stokastiske variable udmønter regnereglerne sig ved brug af matrixregningens regneregler i de simple formler

$$E[a'X] = a' E[X] \quad (19)$$

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \quad (20)$$

$$\text{Cov}[X, Y]' = \text{Cov}[Y, X'] \quad (21)$$

$$\text{Cov}[a'X, Y'] = a' \text{Cov}[X, Y'] \quad (22)$$

$$\text{Cov}[X, Y'+Z'] = \text{Cov}[X, Y'] + \text{Cov}[X, Z'] \quad (23)$$

$$\text{Cov}[X, X'] \geq 0 \quad (24)$$

hvor  $\geq 0$  her betyder, at kovariansmatricen  $\text{Cov}[X, X']$  er ikke-negativ (alle  $n$  egenverdier er ikke-negative).

Af disse formler følger yderligere

$$\text{Cov}[a'X, Y'b] = a' \text{Cov}[X, Y'] b \quad (25)$$

$$\text{Cov}[AX, Y'B'] = A \text{Cov}[X, Y'] B' \quad (26)$$

hvor  $A$  og  $B$  er konstante matricer.  $\square$

Ligningen (1) giver anledning til at indføre en stokastisk variabel

$$M = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + b = a'X + b \quad (27)$$

hvor  $a' = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Den ved (27) eksemplificerede selvindlysende notation, hvor elementbetegnelser på en naturlig måde forkortes til vektorbetegnelser, vil blive benyttet i det følgende uden eksplicit udskrift af matricerne. For udfald af  $X$  henholdsvis i det indre af den sikre mængde, på grænsetilstandsfladen, og i det indre af svigtområdet er  $M > 0$ ,  $M = 0$  og  $M < 0$ . Denne stokastiske variable kaldes en sikkerhedsmargen eller, mere specifikt, en lineær sikkerhedsmargen. Dens fortegn angiver, om der er svigt eller ej. Dens absolutte størrelse er imidlertid arbitrær, da ligningen (1) stadig gælder efter multiplikation med en arbitrær positiv konstant. Af samme grund er middelværdien

$$E[M] = a' E[X] + b \quad (28)$$

arbitrær. Hvis man imidlertid dividerer  $E[M]$  med standardafvigelsen  $D[M]$ , der fås som kvadratroden af variansen,

$$\text{Var}[M] = a' \text{Cov}[X, X'] a \quad (29)$$

fås et tal

$$\beta = \frac{E[M]}{D[M]} = \frac{\mathbf{a}'E[\mathbf{X}] + b}{\sqrt{\mathbf{a}'\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}'] \mathbf{a}}} \quad (30)$$

der er uforandret efter multiplikation af sikkerhedsmargenen med en arbitrær positiv konstant. Tallet  $\beta$  er endda uforandret under enhver regulær inhomogen lineær afbildning af den stokastiske vektor  $\mathbf{X}$  over i en anden stokastisk vektor  $\mathbf{Y}$  ved

$$\mathbf{X} = \mathbf{B} \mathbf{Y} + \mathbf{c}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{c}) \quad (31)$$

fordi  $M$  forbliver den samme stokastiske variabel, hvadenten den skrives på formen (27) eller på formen

$$M = (\mathbf{a}'\mathbf{B}) \mathbf{Y} + (b + \mathbf{a}'\mathbf{c}) = \mathbf{a}'_1 \mathbf{Y} + b_1 \quad (32)$$

Hvis man specielt vælger  $\mathbf{B}$  og  $\mathbf{c}$  således, at

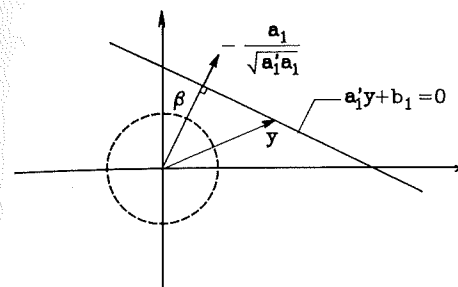
$$E[\mathbf{Y}] = \mathbf{0}, \quad \text{Cov}[\mathbf{Y}, \mathbf{Y}'] = \mathbf{I} (= \text{enhedsmatricen}) \quad (33)$$

fås

$$\beta = \frac{\mathbf{a}'_1 E[\mathbf{Y}] + b_1}{\sqrt{\mathbf{a}'_1 \text{Cov}[\mathbf{Y}, \mathbf{Y}'] \mathbf{a}_1}} = \frac{b_1}{\sqrt{\mathbf{a}'_1 \mathbf{a}_1}} \quad (34)$$

Det skalære produkt mellem stedvektoren til et vilkårligt punkt  $\mathbf{x}$  på en hyperplan og planens bort fra nulpunktet rettede enhedsnormalvektor er det samme som planens afstand fra nulpunktet. Normalvektoren til planen (1) er  $-\mathbf{a}/\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{a}}$ , således at afstanden bliver  $\mathbf{a}'\mathbf{x}/\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{a}} = b/\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{a}}$ .

Tallet  $\beta$  er altså afstanden mellem nulpunktet og grænsetilstandshyperplanen i det specielle billedrum, der svarer til (33), se figur 4.1. Dette rum kaldes indtil videre *det normaliserede rum*.



Figur 4.1. Geometrisk tolkning af det simple sikkerhedsindeks.

Dette rum er rotationssymmetrisk med hensyn til andenmomentrepræsentation, idet enhver drejning omkring nulpunktet givet ved en ortogonal matrix  $\mathbf{A}$  fører  $\mathbf{Y}$  over i  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{A} \mathbf{Y}$  med kovariansmatricen

$$\text{Cov}[\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}'_1] = \mathbf{A} \text{Cov}[\mathbf{Y}, \mathbf{Y}'] \mathbf{A}' = \mathbf{A} \mathbf{I} \mathbf{A}' = \mathbf{A} \mathbf{A}' = \mathbf{I} \quad (35)$$

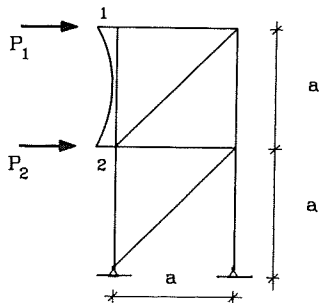
Det invariante tal  $\beta$  kan opfattes som et simpelt mål for sikkerhed mod overskridelse af grænsetilstanden. Ifølge sin definition (30) måler det afstanden fra grænsetilstanden repræsenteret ved  $M = 0$  til middelværdien  $E[M]$  med standardafvigelsen  $D[M]$  som enhed. Af hensyn til senere udvidelser betegner vi  $\beta$  som *det simple sikkerhedsindeks*. I dette kapitel vil vi dog ofte undlade ordene "det simple". Hvis to grænsetilstande givet ved to forskellige hyperplaner har samme sikkerhedsindeks, tillægges de altså herved formelt samme sikkerhed. En betingelse for, at dette afspejler en ingeniørmæssig rimelig sammenligning mellem de to grænsetilstande i sikkerhedsmæssig henseende er, at rotationssymmetrien med hensyn til andenmomentrepræsentation i det normaliserede rum også afspejler rotationssymmetri med hensyn til opfattelse af sikkerhed. Med den gjorte forudsætning om, at den eneste til rådighed værende information om inputvariablene  $\mathbf{X}$  er deres andenmomentrepræsentation, må denne rotationssymmetri i opfattet sikkerhed dog nødvendigvis være til stede. I modsat fald ville der jo foreligge en information om  $\mathbf{X}$ , på grundlag af hvilken en sådan usymmetri kunne beskrives og inddrages i sikkerhedsvurderingen. Det skal her fremhæves, at den blotte viden om, at der er usymmetri, uden at denne usymmetris form og retning kendes, ikke

ændrer ved påstanden om rotationssymmetri i sikkerhedsmæssig henseende. Vi skal i kapitel 7: "transformation" se, hvordan der kan tages højde for dokumenteret usymmetri ved brug af passende transformationer, der fjerner denne usymmetri.

**Eksempel 4.1** Gittertårnet i figur 4.2 bærer en parabolantenne, der indgår i en transmissionskæde. Den pseudostatistiske last  $(P_1, P_2)$  er et korreleret par af stokastiske variable, der balancerer det stokastiske vindtryk på antennen [4.1]. For at antennen kan fungere effektivt kræves det, at drejningen af den transmitterede radiostråle holdes under en vis størrelse, der er afhængig af afstanden til det næste tårn i kæden. Da lasten er stokastisk, bliver drejningen også stokastisk, og den er proportional med differencen  $R$  mellem de vandrette flytninger af punkterne 1 og 2. Det antages, at alle stænger er af det samme elastiske materiale med elasticitetskoefficient  $E$  og med samme tværsnitsareal  $A$ . Ved en elementær mekanisk beregning findes da at

$$R = [(5+2\sqrt{2})P_1 + P_2] \frac{a}{EA} \quad (36)$$

Om de stokastiske egenskaber af  $P_1$  og  $P_2$  antages, at de har fælles middelværdi  $\mu$  og standardafvigelse  $\sigma$  samt kovarians  $\sigma^2\rho$ , hvor  $\rho$  er den såkaldte korrelationskoefficient  $\text{Cov}[P_1, P_2]/(D[P_1] D[P_2])$ . Korrelationskoefficienten afspejler graden af vindhastighedsfeltets rumlige homogenitet. For eksempel,



Figur 4.2. Gittertårn med stokastiske laster fra vindbelastet parabolantenne.

hvis  $\rho = 1$  betyder det, at  $\text{Var}[P_1 - P_2] = 0$ . Den stokastiske "rotation"  $R$  har middelværdien

$$E[R] = (6+2\sqrt{2}) \frac{a\mu}{EA} \quad (37)$$

og variansen

$$\text{Var}[R] = [((5+2\sqrt{2})^2 + 1 + 2(5+2\sqrt{2})\rho)] \left[ \frac{a\sigma}{EA} \right]^2 \quad (38)$$

og dermed standardafvigelsen

$$D[R] = \sqrt{62.3+15.7\rho} \frac{a\sigma}{EA} \quad (39)$$

Kvadratrodnen varierer fra 6.82 til 7.90 til 8.83 for henholdsvis  $\rho = -1, 0$  og  $1$ . For disse samme tre værdier og for variationskoefficienten  $V_{P_1} = \sigma/\mu = 0.20$  er variationskoefficienten  $V_R = D[R]/E[R]$  henholdsvis  $0.15, 0.18$  og  $0.20 \leq V_{P_1} = V_{P_2}$ . Gittertårnet har altså den effekt, at det dæmper usikkerheden.

Dimensioneringspecificationer kan eksempelvis være formuleret således: Vælg tværsnitsarealet  $A$  således, at tallene  $E[R] - \beta D[R]$  og  $E[R] + \beta D[R]$  for en given værdi af det simple sikkerhedsindeks  $\beta$  begge tilhører et givet interval  $[-\theta, \theta]$ . Jo større værdi af  $\beta$  der specificeres, des mindre er risikoen for, at "rotationen"  $R$  i en given storm kommer ud uden for intervallet  $[-\theta, \theta]$ . Ved løsning ses, at den øvre grænse  $\theta$  er den mest kritiske, og man finder, at kravet medfører, at

$$A \geq (8.83 + \beta \frac{\sigma}{\mu} \sqrt{62.3+15.7\rho}) \frac{a\mu}{E\theta} \quad (40)$$

For  $\beta = 3$  og  $\sigma/\mu = 0.2$  varierer det netop krævede tværsnitsareal fra 12.9 til 13.6 til 14.1 gange  $a\mu/E\theta$  for henholdsvis  $\rho = -1, 0$  og  $1$ . I dette tilfælde er dimensioneringsresultatet ret ufølsomt over for værdien af korrelationskoefficienten  $\rho$ . □

Vi slutter dette afsnit med at se på to lineære sikkerhedsmargener



$$M_1 = \mathbf{a}_1' \mathbf{X} + b_1, \quad M_2 = \mathbf{a}_2' \mathbf{X} + b_2 \quad (41)$$

De står i en vis relation til hinanden ved at være korrelerede med kovariansen

$$\text{Cov}[M_1, M_2] = \text{Cov}[\mathbf{a}_1' \mathbf{X}, \mathbf{a}_2' \mathbf{X}] = \mathbf{a}_1' \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}] \mathbf{a}_2 \quad (42)$$

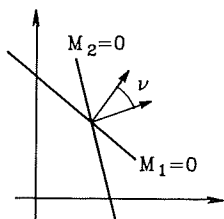
I mange sammenhænge har *korrelationskoefficienten* defineret ved

$$\rho[M_1, M_2] = \frac{\text{Cov}[M_1, M_2]}{\sqrt{D[M_1] D[M_2]}} = \frac{\mathbf{a}_1' \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}] \mathbf{a}_2}{\sqrt{\mathbf{a}_1' \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}] \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2' \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}] \mathbf{a}_2}} \quad (43)$$

særlig interesse. Ligesom det simple sikkerhedsindeks er korrelationskoefficienten invariant over for en inhomogen lineær afbildning af  $\mathbf{X}$  over i  $\mathbf{Y}$ . Med valget af den specielle afbildning, der fører over i det normaliserede rum, fås

$$\rho[M_1, M_2] = \left[ -\frac{\mathbf{a}_1}{\sqrt{\mathbf{a}_1' \mathbf{a}_1}} \right]' \left[ -\frac{\mathbf{a}_2}{\sqrt{\mathbf{a}_2' \mathbf{a}_2}} \right] \quad (44)$$

hvor  $\mathbf{a}_1$  og  $\mathbf{a}_2$  her betyder de transformerede koefficienter i sikkerhedsmargenerne  $M_1$  og  $M_2$ . Heraf ses, at korrelationskoefficienten er den geometriske størrelse



Figur 4.3. Geometrisk tolkning af korrelationskoefficienten  $\rho$  mellem to lineære sikkerhedsmargener som  $\rho = \cos \nu$ .

$$\rho[M_1, M_2] = \cos \nu \quad (45)$$

hvor  $\nu$  er vinklen mellem normalvektorerne til de to hyperplaner, der svarer til sikkerhedsmargenerne. Begge normalvektorer er rettet bort fra nulpunktet. Med angivelse af de to sikkerhedsindeks  $\beta_1$  og  $\beta_2$  samt korrelationskoefficienten  $\rho[M_1, M_2]$  er de to hyperplaner altså fuldstændigt fastlagt i forhold til hinanden og til nulpunktet i det normaliserede rum.

### 4.3 Lineær regression

I næste afsnit skal vi se på nogle vigtige geometriske resultater, der kan opnås ved brug af lineær regression på lineære sikkerhedsmargener. Selvom begrebet lineær regression måtte være læseren bekendt fra elementær sandsynlighedsregning, vil vi i dette afsnit give det en indføring fra grunden, omend en smule mere generelt end sædvanligt. Denne indføring forudsætter alene kendskab til regning med andenmomentrepræsentationer, som repeteret i bemærkning 4.1, og til elementær matrixregning.

Uden at vi her vil binde os til, at de i det følgende betragtede stokastiske vektorer står for vektorer af inputvariable, ser vi på et par  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$  af stokastiske vektorer. Vi vil approksimere  $\mathbf{Y}$  lineært ved  $\mathbf{X}$ , således at afvigelsen i en vis forstand bliver så lille som mulig. For en vilkårlig koefficientmatrix  $\mathbf{A}$  bliver afvigelsen  $\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}$ . Denne stokastiske vektor har kovariansmatricen

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{Y}' - \mathbf{X}'\mathbf{A}'] &= \\ \text{Cov}[\mathbf{Y}, \mathbf{Y}'] - \text{Cov}[\mathbf{Y}, \mathbf{X}'] \mathbf{A}' - \mathbf{A} \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}'] + \mathbf{A} \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}] \mathbf{A}' & \quad (1) \end{aligned}$$

Variansen af det ite element fås heraf ved at erstatte  $\mathbf{Y}$  med  $Y_i$  og  $\mathbf{A}$  med den ite række  $\mathbf{a}_i'$ :

$$\text{Var}[Y_i - \mathbf{a}_i' \mathbf{X}] = \text{Var}[Y_i] - 2\text{Cov}[Y_i, \mathbf{X}'] \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i' \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}] \mathbf{a}_i \quad (2)$$

Den bedste approksimation defineres naturligt som den, for hvilken variansen (2) er mindst mulige. Partiel differentiation af (2) med hensyn til det ite element  $a_{ij}$  i  $\mathbf{a}_i$  giver ligningen

$$-2\text{Cov}[Y_i, X_j] + \text{Cov}[X_j, X^1] a_i + a_i^1 \text{Cov}[X, X_j] = 0 \quad (3)$$

eller, på samlet form for alle  $j$ ,

$$\text{Cov}[X, X^1] a_j = \text{Cov}[X, Y_j] \quad (4)$$

som på samlet form for alle  $i$  giver

$$A' = \text{Cov}[X, X^1]^{-1} \text{Cov}[X, Y^1] \quad (5)$$

idet det forudsættes, at  $\text{Cov}[X, X^1]$  er regulær. Selvom varianserne af elementerne i  $Y - A X$  med dette valg af  $A$  bliver mindst mulig (de entydigt bestemte stationære værdier kan naturligvis ikke være maksima), kan vi addere en vilkårlig konstant vektor, uden at disse varianser ændres. Vi vil vælge denne konstante vektor  $a_0$  således, at middelværdivektoren af afvigelsen bliver nul, altså således at

$$E[Y - A X - a_0] = 0 \quad (6)$$

hvoraf

$$a_0 = E[Y] - A E[X] \quad (7)$$

Den på denne måde bestemte lineære approksimation kaldes *den lineære regression af Y på X*, og den skrives  $\hat{E}[Y|X]$ . Vi har altså

$$\hat{E}[Y|X] = E[Y] + \text{Cov}[Y, X^1] \text{Cov}[X, X^1]^{-1} (X - E[X]) \quad (8)$$

Afvigelsen  $Y - \hat{E}[Y|X]$  kaldes *residualvektoren*. Kovariansmatricen (1) af residualvektoren bliver

$$\begin{aligned} &\text{Cov}[Y - \hat{E}[Y|X], (Y - \hat{E}[Y|X])'] = \\ &\text{Cov}[Y, Y^1] - \text{Cov}[Y, X^1] \text{Cov}[X, X^1]^{-1} \text{Cov}[X, Y^1] \end{aligned} \quad (9)$$

og den betegnes som *residualkovariansmatricen* eller den *partielle kovariansmatrix*. Det ses ved brug af (8), at denne matrix også er  $\text{Cov}[Y - \hat{E}[Y|X], Y^1]$ .

Det følger da af (9), at  $\text{Cov}[Y - \hat{E}[Y|X], \hat{E}[Y|X]^1] = 0$ .

Desuden gælder, at

$$\text{Cov}[Y - \hat{E}[Y|X], X^1] = 0 \quad (10)$$

der direkte eftervises ved at indsætte (8). Omvendt kan (10) tages som en betingelse, som den lineære regression skal opfylde. Indsættes nemlig  $A X$  for  $\hat{E}[Y|X]$ , fås løsningen (5). Den lineære regression af  $Y$  på  $X$  er altså på nær konstantleddet den entydigt bestemte lineære funktion af  $X$ , der er ukorreleret med residualvektoren.

Notationen  $\hat{E}[Y|X]$  er brugt, fordi middelværdifunktionalens lineære egenskaber også gælder for den lineære regression:

$$\hat{E}[a|X] = a \quad (11)$$

$$\hat{E}[a^1 Y|X] = a^1 \hat{E}[Y|X] \quad (12)$$

$$\hat{E}[Y+Z|X] = \hat{E}[Y|X] + \hat{E}[Z|X] \quad (13)$$

Positivitetsegenskaben (4.2.10) overføres dog ikke. Desuden gælder selvfølgelig

$$\hat{E}[X|X] = X \quad (14)$$

Det følger af (8), at

$$E[Y] = E[\hat{E}[Y|X]] \quad (15)$$

og at det sidste led i (9) på nær fortegnet er kovariansmatricen for  $\hat{E}[Y|X]$ .

Af (9) følger derfor, at

$$\text{Cov}[Y, Y'] = \text{Cov}[\hat{E}[Y|X], \hat{E}[Y|X]'] + \text{Cov}[Y - \hat{E}[Y|X], (Y - \hat{E}[Y|X])'] \quad (16)$$

**Eksempel 4.2** Lad os se på måleusikkerhedsproblemet i eksempel 3.1. Vi ønsker at måle en størrelse  $X$ , men observerer  $Z = X + Y$ , hvor  $Y$  er målefejlen. I eksempel 3.1 blev det antaget, at  $X$  og  $Y$  er uafhængige. Her vil vi opgive denne forudsætning og i stedet antage, at den lineære regression

$$\hat{E}[Y|X] = aX + b \quad (17)$$

og residualvariansen

$$\text{Var}[Y - \hat{E}[Y|X]] = \sigma^2 \quad (18)$$

kendes. Det følger da ved brug af (13), (14) og (15), at

$$E[Z] = E[X + \hat{E}[Y|X]] = (1+a) E[X] + b \quad (19)$$

og ved brug af (16), at

$$\text{Var}[Z] = \text{Var}[X + \hat{E}[Y|X]] + \sigma^2 = (1+a)^2 \text{Var}[X] + \sigma^2 \quad (20)$$

Ligningerne (19) og (20) giver

$$E[X] = \frac{E[Z] - b}{1+a} \quad (21)$$

$$\text{Var}[X] = \frac{\text{Var}[Z] - \sigma^2}{(1+a)^2} \quad (22)$$

Vi har altså herved statistisk set rensset målingen for målefejl. Denne metode er dog ikke problemfri, fordi den lineære regression (dvs konstanterne  $a$  og  $b$ ) og residualvariansen kan afhænge af sandsynlighedsfordelingen for  $X$ .

Metoden kan derfor kun anvendes, hvis der er rimelig grund til at antage, at der ikke er en sådan afhængighed.  $\square$

**Bemærkning 4.2** I sandsynlighedsregningen indføres begrebet betinget middelværdivektor  $E[Y|X]$  af  $Y$  givet  $X$ . For denne gælder ud over (11) og (13) en mere generel form af (12), nemlig

$$E[g(X)' Y | X] = g(X)' E[Y | X] \quad (23)$$

hvor  $g(\cdot)$  er en vektor af næsten vilkårlige funktioner. For den lineære regression gælder (23) selvsagt ikke for andre  $g(\cdot)$  end de konstante vektorer. Hvis  $E[Y|X]$  er lineær i  $X$ , da gælder at  $E[Y|X] = \hat{E}[Y|X]$ .

Vi skal se nedenfor, at den betingede middelværdi  $E[\cdot | \cdot]$  i det vigtige tilfælde, hvor  $(X, Y)$  har en flerdimensional normalfordeling, er en udvidelse af den lineære regression. Hermed menes, at  $E[\cdot | \cdot]$  falder sammen med  $\hat{E}[\cdot | \cdot]$ , når reglen (23) kun bruges i formen (12).

De til (15) og (16) analoge formler bliver

$$E[Y] = E[E[Y|X]] \quad (24)$$

$$\text{Cov}[Y, Y'] = \text{Cov}[E[Y|X], E[Y|X]'] + E[\text{Cov}[Y, Y' | X]] \quad (25)$$

hvor  $\text{Cov}[Y, Y' | X]$  er den betingede kovariansmatrix for  $Y$  givet  $X$ . I modsætning til residualkovariansmatrixen kan den betingede kovariansmatrix afhænge af  $X$ . Hvis både  $E[Y|X] = \hat{E}[Y|X]$  og den betingede kovariansmatrix er uafhængige af  $X$ , da er den betingede kovariansmatrix lig med residualkovariansmatrixen.

Den lineære regression af  $Y$  på  $X$  med tilhørende residualkovariansmatrix er åbenbart globale størrelser, der kan afhænge af fordelingen af  $X$ , hvorimod den betingede middelværdivektor  $E[Y|X]$  og den betingede kovariansmatrix  $\text{Cov}[Y, Y' | X]$  er lokale størrelser, der kan afhænge af  $X$ , men ikke af fordelingen af  $X$ .  $\square$

**Eksempel 4.3** Med henvisning til bemærkning 4.2 kan vi nu se, at problemet

med metoden til rensning for målefejl i eksempel 4.2 ligger i den globale karakter af den lineære regression. Antager vi derimod, at vi kender de lokale størrelser  $E[Y|X]$  og  $\text{Var}[Y|X]$  som funktioner af  $X$ , forsvinder dette problem. For at kunne benytte (24) og (25) uden indførelse af antagelser om sandsynlighedsfordelinger, må  $E[Y|X]$  have den lineære form

$$E[Y|X] = aX + b \quad (26)$$

der fører til (21), medens  $\text{Var}[Y|X]$  højst kan være kvadratisk i  $X$ , dvs

$$\text{Var}[Y|X] = \alpha X^2 + \beta X + \gamma \quad (27)$$

Det overlades til læseren som øvelse at bestemme den til (22) analoge formel for  $\text{Var}[X]$  ved brug af (24) – (27). □

**Eksempel 4.4** Lad os forestille os, at der med henblik på udvikling af en ikke-destruktiv prøvningsmetode for konstruktionslementer af beton er blevet målt tøjnings-spændingskurver (arbejdslinier) for et stort antal prøve-cylindre [4.1]. Disse prøvecylindre er alle fremstillet efter den samme betonopskrift, men hver fra sin blanding. Fra hver arbejdslinie er bestemt en observation af sættet  $(X_1, X_2, X_3, Y)$ , hvor  $X_1$ ,  $X_2$  og  $X_3$  som vist i figur 4.4 er spændingerne svarende til henholdsvis 0.2, 0.4 og 0.6 o/oo tøjning, medens  $Y$  er cylindernes trykstyrke. Ved statistisk behandling af disse resultater blev beregnet følgende andenmomentrepræsentation:

$$E[[X_1 \ X_2 \ X_3 \ Y]] = [475 \ 893 \ 1250 \ 2295] \text{ N/cm}^2 \quad (28)$$

$$D[[X_1 \ X_2 \ X_3 \ Y]] = [35 \ 63 \ 90 \ 178] \text{ N/cm}^2 \quad (29)$$

$$\rho[\mathbf{X}, \mathbf{X}'] = \begin{bmatrix} 1 & 0.843 & 0.762 \\ 0.843 & 1 & 0.967 \\ 0.762 & 0.967 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\rho[Y, \mathbf{X}'] = [0.387 \ 0.751 \ 0.835] \quad (31)$$

hvor vi har indført notationen  $D[\mathbf{X}]$  (eller  $D[\mathbf{X}']$ ) for den diagonalmatrix, der har standardafvigelse af elementerne i  $\mathbf{X}$  i diagonalen. Med denne skrivemåde har vi

$$\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}'] = D[\mathbf{X}] \rho[\mathbf{X}, \mathbf{X}'] D[\mathbf{X}'] \quad (32)$$

$$\text{Cov}[\mathbf{X}, Y] = D[\mathbf{X}] \rho[\mathbf{X}, Y] D[Y] \quad (33)$$

Vi vil udregne den lineære regression af  $Y$  på  $\mathbf{X}$ . Faktoren til  $\mathbf{X} - E[\mathbf{X}]$  i (8) bliver

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Y, \mathbf{X}'] \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}']^{-1} &= D[Y] \rho[Y, \mathbf{X}'] \rho[\mathbf{X}, \mathbf{X}']^{-1} D[\mathbf{X}]^{-1} = \\ D[Y] [-0.639 \ 0.175 \ 1.153] D[\mathbf{X}]^{-1} & \end{aligned} \quad (34)$$

og dermed

$$\begin{aligned} \hat{E}[Y|\mathbf{X}] &= 2295 + 178 \left[ -0.639 \frac{X_1 - 475}{35} + 0.175 \frac{X_2 - 893}{63} + 1.153 \frac{X_3 - 1250}{90} \right] \\ &= 547 - 3.250 X_1 + 0.494 X_2 + 2.280 X_3 \quad \text{N/cm}^2 \end{aligned} \quad (35)$$

Residualvariansen følger af (9) som

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y - \hat{E}[Y|\mathbf{X}]] &= \text{Var}[Y] (1 - \rho[Y, \mathbf{X}'] \rho[\mathbf{X}, \mathbf{X}']^{-1} \rho[\mathbf{X}, Y]) = \\ \text{Var}[Y] (1 - \rho[\mathbf{X}, Y]^2) & \end{aligned} \quad (36)$$

hvor

$$\rho[\mathbf{X}, Y] = \sqrt{\rho[Y, \mathbf{X}'] \rho[\mathbf{X}, \mathbf{X}']^{-1} \rho[\mathbf{X}, Y]} \quad (37)$$

der også skrives  $\rho[Y, \mathbf{X}]$ , kaldes den multiple korrelationskoefficient mellem  $\mathbf{X}$  og  $Y$ . I dette eksempel får vi  $\rho[\mathbf{X}, Y]^2 = 0.847$ , således at reduktionsfaktoren

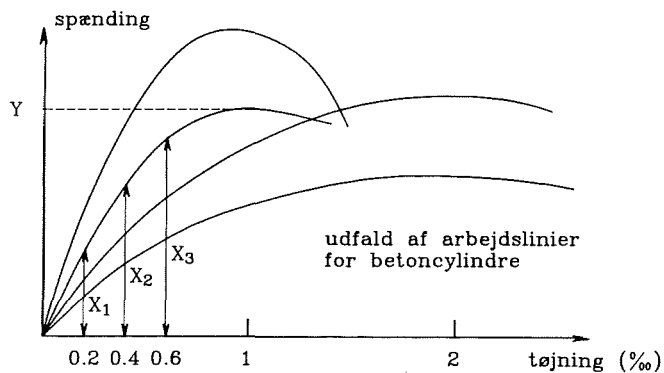
på standardafvigelsen  $D[Y]$  bliver

$$\frac{D[Y - \hat{E}[Y|X]]}{D[Y]} = \sqrt{1 - 0.847} = 0.391 \quad (38)$$

En kort betonpille er fremstillet efter den samme opskrift og er dimensioneret til at bære en given last med et simpelt sikkerhedsindeks, der netop har værdien 4. For den givne last er spændingen i søjlen derfor lig med middelværdien - 4 gange standardafvigelsen af trykstryken, dvs  $2295 - 4 \cdot 178 = 1583 \text{ N/cm}^2$ . Efter at betonpillen er blevet støbt, men før lasten er blevet påført, rejses der tvivl om, at sikkerhedskravet om et simpelt sikkerhedsindeks på mindst 4 er tilfredsstillet. Det besluttet at udføre en prøvebelastning af pillen op til en tøjning på 6 o/oo. Herved fik man observationen  $(X_1, X_2, X_3) = (353, 655, 958) \text{ N/cm}^2$ . Den lineære regression giver da forudsigelsen  $1908 \text{ N/cm}^2$  for pillens trykstyrke, og det simple sikkerhedsindeks bliver

$$\beta = \frac{1908 - 1583}{0.391 \cdot 178} = 4.67 \quad (39)$$

Dette er mere end stort nok, skønt den forudsagte styrke er ca 17% mindre end dimensioneringsmiddelstyrken på  $2295 \text{ N/cm}^2$ .



Figur 4.4. Fremskrivning af betonarbejdslinier ud fra målte værdier for små tøjninger.

Den samme fremgangsmåde kan anvendes, hvis der af en eller anden grund ønskes forøget last på et konstruktionselement. □

**Øvelse 4.1** Lad  $X_0$  være en delvektor af  $X$  (dvs  $X_0$  har højst dimension som  $X$ , og alle elementer i  $X_0$  er også elementer i  $X$ ). Vis, at

$$\hat{E}[X_0|X] = X_0 \quad (40)$$

og dernæst, at

$$\hat{E}[\hat{E}[Y|X_0]|X] = \hat{E}[Y|X_0] \quad (41)$$

□

#### 4.4 Geometriske beregninger i lineære rum ved brug af lineær regression

Vi har i afsnit 4.2 set, at det simple sikkerhedsindeks

$$\beta = \frac{E[M]}{D[M]} \quad (1)$$

har den geometriske egenskab at være afstanden fra nulpunktet til den ved  $M = 0$  bestemte hyperplan  $H$  i det normaliserede rum. Stedvektoren til nulpunktets projektion på hyperplanen er  $\beta\alpha$ , hvor  $\alpha = -a/\sqrt{a'a}$  er den bort fra nulpunktet rettede normalenhedsvektor til hyperplanen  $H$ .

Dette projektionspunkt er det punkt i det normaliserede rum, der naturligt kan betegnes som det mest centrale udfald af den stokastiske vektor  $X$ , forudsat at det er givet, at den lineære sikkerhedsmargen

$$M = a'X + b \quad (2)$$

antager værdien  $M = 0$ . Det er derfor af interesse at se efter, hvordan dette naturlige valg af det mest centrale punkt på hyperplanen stemmer overens med den approksimation til  $X$ , som den lineære regression af  $X$  på  $M$  giver. Vi har ifølge (4.3.8) at

$$\hat{E}[X|M] = E[X] + \frac{\text{Cov}[X,M]}{\text{Var}[M]} (M - E[M]) \quad (3)$$

og dermed

$$\hat{E}[X|M=0] = E[X] - \frac{\text{Cov}[X,M]}{\text{Var}[M]} E[M] = E[X] - \frac{\text{Cov}[X,X']}{\sqrt{\mathbf{a}'\text{Cov}[X,X']}\mathbf{a}} \mathbf{a}\beta \quad (4)$$

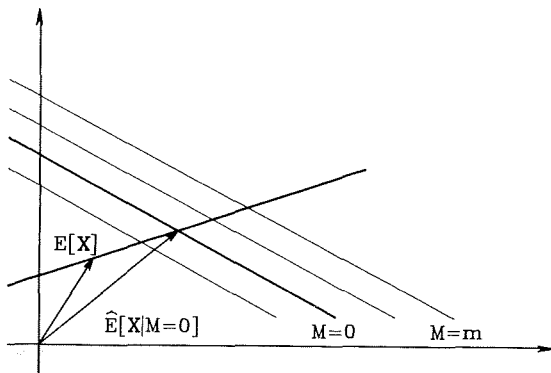
Specielt når rummet er normaliseret, altså når  $E[X] = 0$  og  $\text{Cov}[X,X'] = I$  fås

$$\hat{E}[X|M=0] = -\beta \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{\mathbf{a}'\mathbf{a}}} \quad (5)$$

Dette er netop projektpunktet på hyperplanen  $H$  givet ved  $M = 0$ . Uden nødvendigvis at knytte begreberne alene til det normaliserede rum, vil vi fremover betegne punktet bestemt ved (4) som *det centrale svigt punkt* på den plane grænsebetingelse givet ved  $M = 0$ .

Lineær regression kan bruges til beregning af stedvektoren ikke blot fra nulpunktet til det nærmeste punkt på en hyperplan  $H$  i det normaliserede rum, men mere almindeligt til beregning af stedvektoren fra nulpunktet til det nærmeste punkt  $\mathbf{x}_0$  i fællesmængden (mængden af skæringspunkter)  $H_1 \cap \dots \cap H_p$  mellem  $p$  hyperplaner

$$H_i : M_i = 0 \quad i = 1, \dots, p \quad (6)$$



Figur 4.5. Geometrisk tolkning af den lineære regression  $\hat{E}[X|M=0]$

hvor  $M_1, \dots, M_p$  er de tilsvarende lineære sikkerhedsmargener. Samles disse i vektoren  $\mathbf{M}$ , har vi, at stedvektoren er, se (4.3.8),

$$\hat{E}[X|M=0] = -\text{Cov}[X,M'] \text{Cov}[M,M']^{-1} E[M] \quad (7)$$

idet vi forudsætter, at kovariansmatricen  $\text{Cov}[M,M']$  mellem sikkerhedsmargenerne er regulær. Dette gælder, når rangen af koefficientmatricen  $\mathbf{A}$  i

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \mathbf{X} + \mathbf{b} \quad (8)$$

er den maksimale rang  $p$ , hvilket betyder, at ingen af hyperplanerne  $H_1, \dots, H_p$  kan fjernes fra fællesmængden  $H_1 \cap \dots \cap H_p$ , uden at denne bliver større.

At (7) er det samme som  $\mathbf{x}_0$  ses ved at bestemme  $\mathbf{x}_0$  som det punkt  $\mathbf{x}$ , for hvilket  $\mathbf{x}'\mathbf{x}$  er minimum under bibetingelserne  $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ . Med brug af Langrangemultiplikatorer  $\lambda$  bestemmes dette betingede minimum som det ubetingede minimum af funktionen

$$g(\mathbf{x}, \lambda) = \mathbf{x}'\mathbf{x} + 2(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})' \lambda \quad (9)$$

Vi har

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g(\mathbf{x}, \lambda)}{\partial x_i} \right\} = \mathbf{x} + \mathbf{A}'\lambda = \mathbf{0} \quad (10)$$

som ved multiplikation med  $\mathbf{A}$  og benyttelse af (8) giver

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{A}'\lambda = -\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{A}'\lambda = \mathbf{0} \quad (11)$$

eller, da  $\mathbf{A}\mathbf{A}'$  er regulær,  $\lambda = (\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1} \mathbf{b}$ , og dermed fra (10)

$$\mathbf{x}_0 = -\mathbf{A}'(\mathbf{A}\mathbf{A}')^{-1} \mathbf{b} \quad (12)$$

Da vi i det normaliserede rum har  $\text{Cov}[X,M'] = \text{Cov}[X,X'] \mathbf{A}' = \mathbf{A}'$ ,  $\text{Cov}[M,M'] = \mathbf{A} \text{Cov}[X,X'] \mathbf{A}' = \mathbf{A}\mathbf{A}'$  og  $E[M] = \mathbf{A} E[X] + \mathbf{b} = \mathbf{b}$ , ses, at (7)

og (12) er identiske i dette rum.

Vi kan yderligere almindeliggøre formlen (7), således at vi ved brug af lineær regression kan bestemme stedvektoren fra punktet  $\hat{E}[X|M=0]$  i fællesmængden  $H_1 \cap \dots \cap H_p$  til det ved dette punkt nærmeste punkt i fællesmængden  $H_1 \cap \dots \cap H_p \cap H_{p+1} \cap \dots \cap H_{p+q}$ , hvor  $H_{p+1}, \dots, H_{p+q}$  er  $q$  hyperplaner bestemt ved sikkerhedsmargenerne  $N_1, \dots, N_q$  samlet i vektoren  $N$ . Denne stedvektor bliver

$$\hat{E}[X - \hat{E}[X|M=0] | M=0, N=0] = \hat{E}[X|M=0, N=0] - \hat{E}[X|M=0] \quad (13)$$

hvor højre side følger af formlerne (4.3.13) og (4.3.41).

I det specielle tilfælde, hvor  $q = 1$ , kan længden i det normaliserede rum af vektoren (13) bestemmes som *det betingede sikkerhedsindeks*

$$\beta_{N|M=0} = \frac{\hat{E}[N|M=0]}{D[N|M=0]} \quad (14)$$

hvor vi har sat  $N_1 = N$ . Tælleren bestemmes af den lineære regression

$$\hat{E}[N|M] = E[N] + \text{Cov}[N, M'] \text{Cov}[M, M']^{-1} (M - E[M]) \quad (15)$$

ved at sætte  $M = 0$ , medens nævneren  $\hat{D}[N|M=0]$  er kvadratroden af residualvariansen, se (4.3.36), (4.3.37),

$$\hat{\text{Var}}[N|M] = \text{Var}[N] (1 - \rho[N; M]^2) \quad (16)$$

hvor

$$\rho[N; M]^2 = \frac{\text{Cov}[N, M'] \text{Cov}[M, M']^{-1} \text{Cov}[M, N]}{\text{Var}[N]} \quad (17)$$

er kvadratet på den såkaldte multiple korrelationskoefficient mellem sikkerhedsmargenen  $N$  og vektoren af sikkerhedsmargener  $M$ . Det bemærkes, at

(16) er uafhængig af værdien af  $M$ . Desuden bemærkes, at  $\beta_{N|M}$  er invariant på samme måde som det simple sikkerhedsindeks er invariant.

#### 4.5 Den standardiserede flerdimensionale normale fordeling

Lad  $X_1, \dots, X_n$  være indbyrdes uafhængige stokastiske variable, der alle hver især er fordelte med den standardiserede normale tæthed

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2} x^2] \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Den fælles tæthed af alle variablene er da

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^n \exp[-\frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)], \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

Denne tæthed kaldes den *standardiserede normale tæthed i det  $n$ -dimensionale rum* (centreret i nulpunktet). Den ses at være konstant på hyperkuglen  $x'x = r^2$  med centrum i nulpunktet og radius  $r$ . Den varierer med afstanden  $\|x\|$  fra nulpunktet proportional med den standardiserede endimensionale normale tæthed. Restriktionen af tæthedsfunktionen til et vilkårligt lineært underrum af  $\mathbb{R}^n$  varierer derfor på samme måde med afstanden fra nulpunktet. Hvis mængden af punkter i det betragtede underrum, som jo indeholder nulpunktet, parallelforskydes med en vektor  $x_0$ , der er ortogonal på alle stedvektorer i underrummet, ses, at restriktionen af (2) til denne parallelforskudte mængde ligeledes varierer på denne måde med afstanden fra punktet  $x_0$ . Dette følger af identiteten

$$\exp[-\frac{1}{2} \|x\|^2] = \exp[-\frac{1}{2} (\|x_0\|^2 + \|x - x_0\|^2)] \propto \exp[-\frac{1}{2} \|x - x_0\|^2] \quad (3)$$

Hermed har vi vist, at den standardiserede normale  $n$ -dimensionale tæthed som tæthed for den stokastiske vektor  $X$  har den egenskab, at den betingede fordeling af  $X$  givet at

$$\mathbf{AX} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4)$$

er den standardiserede normale  $m$ -dimensionale tæthed centreret i  $\mathbf{x}_0$ . Dimensionen  $m$  er  $n$  minus rangen  $p$  af matricen  $\mathbf{A}$ , medens  $\mathbf{x}_0$  er nulpunktets ortogonale projektion på det forskudte  $m$ -dimensionale underrum  $H_1 \cap \dots \cap H_p$  bestemt ved betingelsen

$$\mathbf{Ax} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (5)$$

hvis  $i$ te ligning definerer hyperplanen  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, p$  (forudsat at antallet af ligninger er lig med rangen  $p$ ). Vi kan skrive denne betingede tæthed som

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x} | \mathbf{M}=\mathbf{0}) = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^m \exp\left[-\frac{1}{2} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2\right], \mathbf{x} \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax}+\mathbf{b}=\mathbf{0}\} \quad (6)$$

hvor  $\mathbf{M} = \mathbf{AX}+\mathbf{b}$  og  $\mathbf{x}_0$  er det punkt i mængden  $H_1 \cap \dots \cap H_p$ , der er nærmest ved nulpunktet, altså punktet  $\mathbf{x}_0 = \hat{\mathbf{E}}[\mathbf{X} | \mathbf{M}=\mathbf{0}]$  givet ved (4.4.7). Det er af symmetri Grunde klart, at  $\mathbf{x}_0$  også er den betingede middelværdivektor  $\mathbf{E}[\mathbf{X} | \mathbf{M}=\mathbf{0}]$ , hvormed påstanden i bemærkning 4.2 er bevist.

Den betingede kovariansmatrix hørende til den betingede tæthed (6) er bestemt ved

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}' | \mathbf{M}=\mathbf{0}] &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \int_{\mathbf{A}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=\mathbf{0}} (\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)' e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|^2} = \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \int_{\mathbf{A}(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)=\mathbf{0}} (\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)(\mathbf{z}-\mathbf{z}_0)' e^{-\frac{1}{2} \|\mathbf{z}-\mathbf{z}_0\|^2} = \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}' | \mathbf{M}=\mathbf{m}] \end{aligned} \quad (7)$$

hvor vi har indført substitutionen  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0$  med  $\mathbf{z}_0 = \hat{\mathbf{E}}[\mathbf{X} | \mathbf{M}=\mathbf{m}]$ , hvor  $\mathbf{m}$  er en vilkårlig vektor. Den betingede kovariansmatrix for  $\mathbf{X}$  givet  $\mathbf{M}$  er altså uafhængig af værdien af  $\mathbf{M}$ . Bemærk, at dette ikke medfører at  $\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}' | \mathbf{M}]$  er identisk med  $\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}']$ . Benyttes (4.3.25) på residualkovariansmatricen fås herved

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\mathbf{X}-\hat{\mathbf{E}}[\mathbf{X} | \mathbf{M}], (\mathbf{X}-\hat{\mathbf{E}}[\mathbf{X} | \mathbf{M}])'] &= \mathbf{E} \left[ \text{Cov}[\mathbf{X}-\hat{\mathbf{E}}[\mathbf{X} | \mathbf{M}], (\mathbf{X}-\hat{\mathbf{E}}[\mathbf{X} | \mathbf{M}])' | \mathbf{M}] \right] = \\ &= \mathbf{E} \left[ \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}' | \mathbf{M}] \right] = \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}' | \mathbf{M}] \end{aligned} \quad (8)$$

Vi har altså det vigtige resultat, at den betingede kovariansmatrix og residualkovariansmatricen er identiske.

**Øvelse 4.2** Lad  $\mathbf{X}$  være  $n$ -dimensionalt standardiseret normalfordelt og definer den stokastiske vektor  $\mathbf{Y} = \mathbf{TX} + \boldsymbol{\mu}$ , hvor  $\mathbf{T}$  og  $\boldsymbol{\mu}$  er vilkårlige konstante matricer af henholdsvis type  $(m, n)$  og  $(m, 1)$ . Da siges  $\mathbf{Y}$  at være  $m$ -dimensionalt normalfordelt med middelværdivektor  $\boldsymbol{\mu}$  og kovariansmatrix  $\mathbf{T}\mathbf{T}'$ . Lad  $\mathbf{M} = \mathbf{AY} + \mathbf{b}$ , hvor  $\mathbf{A}$  og  $\mathbf{b}$  er vilkårlige tilladelige matricer, og  $\mathbf{A}$  har fuld rang. Vis, at  $\hat{\mathbf{E}}[\mathbf{Y} | \mathbf{M}] = \mathbf{E}[\mathbf{Y} | \mathbf{M}]$  og at  $\text{Cov}[\mathbf{Y}, \mathbf{Y}' | \mathbf{M}]$  er identisk med residualkovariansmatricen  $\text{Cov}[\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{E}}[\mathbf{Y} | \mathbf{M}], (\mathbf{Y}-\hat{\mathbf{E}}[\mathbf{Y} | \mathbf{M}])']$ . □

**Øvelse 4.3** Lad  $(X, Y)$  være to-dimensionalt normalfordelt og lad  $\mathbf{E}[Y | X] = \rho X$ ,  $\text{Var}[Y | X] = 1 - \rho^2$ ,  $\mathbf{E}[X] = 0$ ,  $\text{Var}[X] = 1$ . Vis, at  $(X, Y)$  har tætheden

$$\varphi_2(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right] \quad (9)$$

og vis, at

$$\frac{\partial^2 \varphi_2(x, y; \rho)}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial \varphi_2(x, y; \rho)}{\partial \rho} \quad (10)$$

Benyt denne identitet til at bevise formelen

$$\Phi_2(x, y; \rho) = \Phi(x)\Phi(y) + \int_0^\rho \varphi_2(x, y; t) dt \quad (11)$$

hvor  $\Phi_2(x, y; \rho)$  er den til tætheden  $\varphi_2(x, y; \rho)$  svarende fordelingsfunktion for



den todimensionale normale fordeling med middelværdier  $(0,0)$ , variansen  $(1,1)$  og korrelationskoefficient  $\rho$ .  $\square$

## Referencer

4.1 Ove Ditlevsen: *Uncertainty Modeling*. McGraw-Hill, New York, 1981.

## 5. DET GEOMETRISKE SIKKERHEDSINDEKS

### 5.1 Ikke-lineær sikkerhedsmargen. Lineariseringsproblemet

Grænsetilstande for bærende konstruktioner er sjældent formuleret sådan, at de er lineære i alle inputvariablene  $x_1, \dots, x_n$ . I de tidlige forsøg på at vurdere sikkerheden ved brug af probabilistiske begreber gjorde man det nærliggende at definere en sikkerhedsmargen  $M$  ved hjælp af grænsetilstandsfunktionen  $g(x_1, \dots, x_n)$ . For at være en sikkerhedsmargen skal  $M$  være en stokastisk variabel, der opfylder kravet, at  $M > 0$  i det indre af den sikre mængde,  $M = 0$  i grænsetilstanden og  $M < 0$  i svigtområdet. Dette krav opfylder grænsetilstandsfunktionen, når  $X$  indsættes for  $x$ . Man definerede da

$$M = g(X_1, \dots, X_n) \quad (1)$$

og man ønskede at beregne et sikkerhedsindeks ved formlen

$$\beta = \frac{E[M]}{D[M]} \quad (2)$$

Vi har set i kapitel 4: "det simple sikkerhedsindeks", at dette indeks er entydigt defineret, hvis grænsetilstanden er en hyperplan, og såfremt kun lineære sikkerhedsmargener benyttes ved beskrivelsen af grænsebetingelsen. Med  $\beta$  defineret ved (1) og (2) stod man imidlertid i den situation, at  $\beta$  ikke lader sig beregne alene ved brug af andenmomentrepræsentationen af  $X$ . Der kræves fordelingsantagelser. For at omgå dette problem i en formulering, der tilstræbes at være baseret udelukkende på information om andenmomentrepræsentationen, erstattede man grænsetilstandsfunktionen  $g(x_1, \dots, x_n)$  med en lineær approksimation til  $g$ .

Som man gør det i den sædvanlige fejlanalyse, der velbegrunder bruges i forbindelse med måleteknik (eksperimentel fysik, landmåling etc), erstattes  $g(X)$  med sin første ordens Taylorudvikling i middelværdien  $\mu = E[X]$ :

$$g(X) \stackrel{\approx}{=} g(\mu) + \sum_{i=1}^n g_{,i}(\mu) (X_i - E[X_i]) \quad (3)$$

("μ" betyder lig med op til første ordens led ved Taylorudvikling fra punktet μ). Højre side af (3) vil vi kalde den i punktet μ *lineært associerede* til g(X). Den har form som en lineær sikkerhedsmargen, som vi vil betegne ved M<sub>μ</sub>. Det tilsvarende simple sikkerhedsindeks β<sub>μ</sub> kan herefter udregnes alene ved brug af andenmomentrepræsentationen for X. Man antog i de tidlige bestræbelser, at

$$\beta_{\mu} = \frac{g(\mu)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{,i}(\mu) g_{,j}(\mu) \text{Cov}[X_i, X_j]}} \quad (4)$$

er en rimelig approksimation til β. Der melder sig imidlertid det problem, at grænsetilstandsfunktionen g er arbitrær på nær det krav, at den givne grænsetilstand skal være defineret som mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(x_1, \dots, x_n) = 0\} \quad (5)$$

Eksempelvis er denne mængde identisk med mængden

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g(x_1, \dots, x_n)^3 = 0\} \quad (6)$$

og g(X)<sup>3</sup> opfylder de krav, der stilles til en sikkerhedsmargen. Med brug af grænsetilstandsfunktionen h(x) = g(x)<sup>3</sup> i stedet for g(x) bliver højre side af (4) imidlertid

$$\frac{g(\mu)^3}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 3g(\mu)^2 g_{,i}(\mu) g_{,j}(\mu) \text{Cov}[X_i, X_j]}} = \frac{1}{3} \beta_{\mu} \quad (7)$$

hvor β<sub>μ</sub> er det ved (4) givne simple sikkerhedsindeks. Vi får altså vidt forskellige værdier for β defineret ved (2) afhængig af det arbitrære valg af

grænsetilstandsfunktionen.

Den manglende såkaldte *formuleringsinvarians* knyttet til sikkerhedsindeksdefinitionen (2) er ikke blot et spørgsmål om den fejl, der opstår på grund af lineariseringen. Dette ses af, at lineariseringsfejlen bliver forsvindende, når standardafvigelseerne af X<sub>1</sub>, ..., X<sub>n</sub> bliver små. Faktoren på 1/3 fra (4) til (7) består uafhængigt heraf.

Formuleringsinvarians opnås naturligvis, hvis man forkaster (2) og i stedet bruger sandsynligheden P(M>0) som mål for sikkerhed. Et sådant skridt vil imidlertid medføre, at tanken om at opbygge en simpel sikkerhedsanalysemodel, der kun arbejder med andenmomentrepræsentationer, må forlades. Det viser sig dog ikke at være nødvendigt. Som set i mange andre eksempler på begrebsudvidelser knyttet til matematiske modeldannelser skyldes problemet forkert valg af egenskab til generalisering. Det simple sikkerhedsindeks blev på naturlig måde defineret ved formlen (2). En formuleringsinvariant udvidelse af (2) eksisterer imidlertid ikke. Derimod har det simple sikkerhedsindeks β den formuleringsinvariante egenskab, at β er afstanden fra nulpunktet til grænsetilstandsplanen i det normaliserede rum. Denne egenskab kan derfor tages som grundlag for generalisering til grænsetilstandsflader, der ikke er plane.

**Eksempel 5.1** De tidlige anvendelser af det simple sikkerhedsindeks byggede på en opdeling af grænsetilstandsfunktionen i to led, betegnet som henholdsvis en modstandsevne R og en lastvirkning S, og man arbejdede med sikkerhedsindices som, se eksempel 2.4,

$$\beta_C = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (8)$$

eller som, se øvelse 2.1,

$$\beta_{ER} = \frac{\mu \log R - \mu \log S}{\sqrt{\sigma_{\log R}^2 + \sigma_{\log S}^2}} \approx \frac{\log \frac{\mu_R}{\mu_S}}{\sqrt{V_R^2 + V_S^2}} \quad (9)$$

For de anvendelser, der blev gjort af disse sikkerhedsindices, var deres manglende formuleringsinvarians af mindre betydning. Anvendelserne drejede sig i det væsentlige om sammenlignende studier inden for et snævert konstruktivt variationsområde. Det kunne eksempelvis dreje sig om kalibrering af en norm for anvendelsen af en given bæreevneformel. Der søges en dimensioneringsformalisme med foreskrevne sikkerhedsfaktorer fastsat således, at sikkerhedsindekset varierer så lidt som muligt over det praktiske variationsområde for formlen. Sikkerhedsindekset bliver altså herved brugt helt lokalt til sikring af ensartet pålidelighed med den stiltiende forudsætning, at svigtsandsynligheden er en eller anden ukendt funktion af sikkerhedsindekset.

Den større ambition om at kunne retfærdiggøre sammenligninger af mere global rækkevidde har tilskyndet til udviklingen beskrevet i det følgende.

## 5.2 Det geometriske sikkerhedsindeks

Lad grænsetilstandsfladen i rummet af inputvariable  $x_1, \dots, x_n$  være givet ved ligningen

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (1)$$

og lad inputvariablene være stokastiske variable samlet i vektoren  $\mathbf{X}$  med andenmomentrepræsentationen  $E[\mathbf{X}]$  og  $\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}']$ . For at kunne generalisere det simple sikkerhedsindeks indføres de normaliserede stokastiske variable  $Y_1, \dots, Y_n$  ved en passende eenentydig inhomogen lineær afbildning  $\mathbf{X} = L(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{Y} = L^{-1}(\mathbf{X})$ , for eksempel sammensat af en parallelforskydning og drejning af koordinatsystemet efterfulgt af en akseret affinitet, se bemærkning 5.1. Det tilsvarende normaliserede rum af punkter  $\mathbf{y}$  er da defineret ved transformationen

$$\mathbf{x} = L(\mathbf{y}) \quad , \quad \mathbf{y} = L^{-1}(\mathbf{x}) \quad (2)$$

Grænsetilstandsfladens ligning (1) afbildes herved i ligningen

$$h(y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (3)$$

hvor funktionen  $h$  er defineret ved

$$h(\mathbf{y}) = g(L(\mathbf{y})) \quad (4)$$

Ligningen (3) definerer grænsetilstandsfladen i det normaliserede rum, og den deler dette i den sikre mængde og i svigtområdet. Middelværdien af  $\mathbf{Y}$  er nulpunktet, og projektionen af  $\mathbf{Y}$  på en vilkårlig ret linie gennem nulpunktet er en stokastisk variabel med standardafvigelsen 1. Det *geometriske sikkerhedsindeks*  $\beta$  defineres som afstanden i det normaliserede rum fra nulpunktet til grænsetilstandsfladen, altså som

$$\beta = \min\{\sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}} \mid h(\mathbf{y})=0\} \quad (5)$$

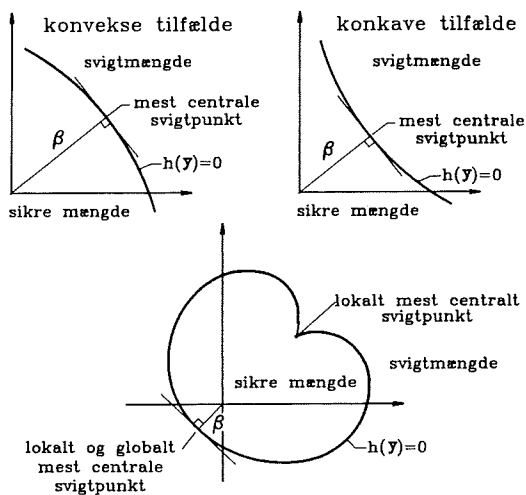
hvor minimum af afstanden  $\sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}}$  fra nulpunktet til  $\mathbf{y}$  tages for  $\mathbf{y}$  løbende over hele grænsetilstandsfladen  $h(\mathbf{y}) = 0$ . (Da grænsetilstandsfladen sædvanligvis er en afsluttet mængde i  $\mathbb{R}^n$ , har vi skrevet "min" i stedet for det mere generelle "inf" (infimum = største nedre tal)). Det punkt  $\mathbf{y}$  på grænsebetingelsen, for hvilket  $\beta = \sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}}$ , kaldes *det globalt mest centrale grænsetilstandspunkt*. Der kan naturligvis være flere sådanne globalt mest centrale grænsetilstandspunkter. Specielt kan grænsetilstandsfladen have uendelig mange punkter fælles med en kugleflade med centrum i nulpunktet og med radius  $\beta$ .

Et punkt  $\mathbf{z}$  med den egenskab, at der findes en åben omegn  $N(\mathbf{z})$  af  $\mathbf{z}$ , således at

$$\sqrt{\mathbf{z}'\mathbf{z}} = \min\{\sqrt{\mathbf{y}'\mathbf{y}} \mid \mathbf{y} \in N(\mathbf{z}), h(\mathbf{y})=0\} \quad (6)$$

kaldes et *lokalt mest centralt grænsetilstandspunkt*, se figur 5.1. Det er klart, at de globalt mest centrale grænsetilstandspunkter skal søges blandt de lokalt mest centrale grænsetilstandspunkter.

**Bemærkning 5.1** Den lineære transformation  $\mathbf{X} = L(\mathbf{Y})$  er defineret ved en matrix  $\mathbf{T}$  og en vektor  $\boldsymbol{\mu}$  som



Figur 5.1. Lokalt og globalt mest centrale grænsetilstandspunkter.

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu} \quad (7)$$

hvor

$$\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{X}] \quad (8)$$

og  $\mathbf{T}$  tilfredsstiller betingelsen

$$\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}'] = \mathbf{T} \mathbf{T}' \quad (9)$$

Spaltningen af kovariansmatricen for  $\mathbf{X}$  i produktet af en kvadratisk matrix  $\mathbf{T}$  og dens transponerede matrix  $\mathbf{T}'$  er ikke entydig. Hvis kovariansmatricen er regulær, er det ofte beregningsmæssigt simplest at bestemme  $\mathbf{T}$  som en nedre triangulær matrix (dvs alle elementer over diagonalen er nul) ved Cholesky–Banachiewicz' metode, der er beskrevet i de fleste lærebøger i matrixregning.

En anden mulighed er at benytte sig af diagonalisering af kovariansmatricen. Der findes altid en ortogonal matrix  $\mathbf{V}$  og en diagonalmatrix  $\boldsymbol{\Lambda}$ , således at

$$\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}'] = \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{V}' \quad (10)$$

hvor elementerne i diagonalen i  $\boldsymbol{\Lambda}$  er de reelle egenverdier (taget i arbitrær rækkefølge) til kovariansmatricen, medens søjlerne i  $\mathbf{V}$  er de tilsvarende egenvektorer taget i den ved egenverdierne bestemte rækkefølge. En matrix  $\mathbf{T}$ , der tilfredsstiller (9), er da

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} \boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

hvor  $\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$  er diagonalmatricen med elementerne  $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$  i diagonalen. Da kovariansmatricer kun har ikke-negative egenverdier (påtvunget af forventningsværdifunktionalens egenskab  $X \geq 0 \Rightarrow E[X] \geq 0$ , der medfører  $\text{Var}[X] \geq 0$ ), bliver  $\mathbf{T}$  en reel matrix.  $\square$

De punkter i  $\mathbf{x}$ -rummet, der svarer til de lokalt eller globalt mest centrale grænsetilstandspunkter i det normaliserede rum, og som bestemmes ved transformationen  $\mathbf{x} = \mathbf{L}(\mathbf{y})$ , betegnes som de lokalt eller globalt mest centrale grænsetilstandspunkter i  $\mathbf{x}$ -rummet. I den specielle metrik i  $\mathbf{x}$ -rummet, der genereres af den sædvanlige euklidiske metrik i det normaliserede rum ved invariansen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{y}} &= \sqrt{\mathbf{y}' \mathbf{y}} = \sqrt{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' (\mathbf{T}^{-1})' \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})} = \\ &= \sqrt{(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}']^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})} = \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}\|_{\mathbf{X}} \end{aligned} \quad (12)$$

er det globalt mest centrale grænsetilstandspunkt det punkt på grænsetilstandsfladen, der er nærmest ved middelværdipunktet  $\boldsymbol{\mu} = E[\mathbf{X}]$ .

### 5.3 Bestemmelse af lokalt mest centralt grænsetilstandspunkt ved brug af lineær regression

Lad os antage, at grænsetilstandsfladen  $\mathcal{G}$  med ligningen (5.2.1) er en

differentiabel flade med en kontinuert vektor af partielle afledede

$$\text{grad } g = (g_{,1}(\mathbf{x}), \dots, g_{,n}(\mathbf{x})) \quad , \quad \mathbf{x} \in \mathcal{G} \quad (1)$$

som intet sted på  $\mathcal{G}$  er nulvektoren. Vektoren (1) er vinkelret på tangenthyperplanen til  $\mathcal{G}$  i punktet  $\mathbf{x}$ .

Antag, at  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{G}$  er et lokalt mest centralt punkt på  $\mathcal{G}$ . Tangenthyperplanen til  $\mathcal{G}$  i  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$  har ligningen

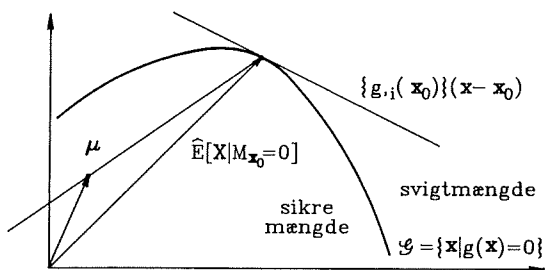
$$\sum_{i=1}^n g_{,i}(\mathbf{x}_0)(x_i - x_{0i}) = 0 \quad (2)$$

der definerer den i punktet  $\mathbf{x}_0$  til  $\mathcal{G}$  lineært associerede sikkerhedsmargen

$$M_{\mathbf{x}_0} = \{g_{,i}(\mathbf{x}_0)\}'(X - \mathbf{x}_0) \quad (3)$$

hvor  $\{g_{,i}(\mathbf{x}_0)\}$  er en kort skrivemåde for den søjlematrix, der svarer til vektoren (1) af partielle afledede. Det gælder da, at  $\mathbf{x}_0$  også er et lokalt mest centralt punkt på tangenthyperplanen defineret ved (2) (naturligvis det eneste på hyperplanen), se figur 5.2. Men heraf følger fra (4.4.4), at

$$\mathbf{x} = \hat{E}[X | M_{\mathbf{x}_0} = 0] \quad (4)$$



Figur 5.2. Karakterisering af lokalt mest centralt grænsetilstandspunkt ved brug af den lineære regression  $E[X | M_{\mathbf{x}_0} = 0]$ .

Vi kan altså formulere følgende:

**SÆTNING 5.1** *Punktet  $\mathbf{x}$  er et lokalt mest centralt punkt på grænsetilstandsfladen  $\mathcal{G}$  hvis og kun hvis*

$$\mathbf{x} = \hat{E}[X | M_{\mathbf{x}} = 0] \quad (5)$$

hvor  $M_{\mathbf{x}}$  er den til  $\mathcal{G}$  i punktet  $\mathbf{x}$  lineært associerede sikkerhedsmargen. Det tilsvarende lokale geometriske sikkerhedsindeks er da

$$\beta_{\mathbf{x}} = \frac{E[M_{\mathbf{x}}]}{D[M_{\mathbf{x}}]} \quad (6)$$

Vi har i sætning 5.1 indført begrebet lokalt geometrisk sikkerhedsindeks. Det (globale) geometriske sikkerhedsindeks er det mindste af disse.

Betingelsen (5) anviser direkte et iterationsprincip til bestemmelse af lokalt mest centrale punkter på  $\mathcal{G}$ : Lad  $\mathbf{x}_1$  være et vilkårligt punkt på  $\mathcal{G}$  eller i rimelig nærhed af  $\mathcal{G}$ . Beregn

$$\mathbf{x}_2 = \hat{E}[X | M_{\mathbf{x}_1} = 0] \quad (7)$$

hvor

$$M_{\mathbf{x}_1} = g(\mathbf{x}_1) + \{g_{,i}(\mathbf{x}_1)\}'(X - \mathbf{x}_1) \quad (8)$$

Hvis  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$ , da er  $\mathbf{x}_1$  et lokalt mest centralt punkt på  $\mathcal{G}$ . Ellers erstat  $\mathbf{x}_1$  med  $\mathbf{x}_2$  og begynd forfra med (7). På denne måde konstrueres en følge  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m, \dots$  af punkter. Hvis følgen er konvergent med grænsen  $\mathbf{x}$ , da er  $\mathbf{x}$  et lokalt mest centralt punkt på  $\mathcal{G}$ .

For at bevise dette behøver vi blot at bemærke, at funktionen

$$\psi(\mathbf{x}) = \hat{E}[X | M_{\mathbf{x}} = 0] \quad (9)$$

er kontinuert. Da gælder, at  $\{\mathbf{X}_n\} \rightarrow \mathbf{x}$  medfører  $\{\psi(\mathbf{x}_n)\} \rightarrow \psi(\mathbf{x})$ , og da de to

følger er identiske på nær det første element i  $\{x_m\}$  gælder, at  $x = \psi(x)$ .

Herefter er det let at indse, at  $g(x) = 0$ , altså at  $x \in \mathcal{G}$ . Med notationen

$$\nabla g = \{g_{,i}(x)\} \quad (\text{søjlematrix}) \quad (10)$$

har vi jo, at ligningen  $x = \psi(x)$  kan skrives

$$x - E[X] = -\frac{\text{Cov}[X, X'] \nabla g}{\nabla g' \text{Cov}[X, X'] \nabla g} [g(x) + \nabla g'(E[X] - x)] \quad (11)$$

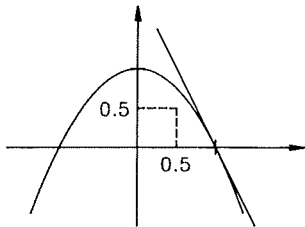
Ved skalær multiplikation med  $\nabla g'$  ses da, at  $g(x) = 0$ .

Det er ikke altid sikkert, at den konstruerede følge er konvergent. Under de givne forudsætninger har ligningen (5) imidlertid altid en eller flere løsninger. Mange forskellige numeriske metoder kan bringes i anvendelse til bestemmelse af disse løsninger. Tolkningen af løsningerne som lokale løsninger til et optimeringsproblem givet ved (5) eller (6) med (5.2.12) indsat giver naturligvis herudover adgang til brug af optimeringsalgoritmer.

**Eksempel 5.2** Antag, at grænsetilstandskurven er en parabel med ligningen

$$g(x, y) = 1 - x^2 - y = 0 \quad (12)$$

og at  $E[X] = E[Y] = 0.5$ ,  $D[X] = D[Y] = 1$ , samt  $\text{Cov}[X, Y] = 0.5$ , se figur 5.3. Vi vil illustrere den på sætning 5.1 baserede iterationsmetode til bestemmelse af det geometriske sikkerhedsindeks. Vi har



Figur 5.3. Parabolisk grænsetilstandskurve givet ved (5.3.12).

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = -2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = -1 \quad (13)$$

således at

$$M_{(x, y)} = -2x(X-x) - (Y-y) + 1 - x^2 - y \quad (14)$$

Til brug for udregning af den lineære regression af  $(X, Y)$  på  $M_{(x, y)}$  behøver vi, se (4.4.3),

$$E[M_{(x, y)}] = -2x(E[X]-x) - (E[Y]-y) + 1 - x^2 - y = x^2 - x + 0.5 \quad (15)$$

$$\text{Var}[M_{(x, y)}] = 4x^2 \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 4x \text{Cov}[X, Y] = 4x^2 + 2x + 1 \quad (16)$$

og

$$\text{Cov}\left[\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, M_{(x, y)}\right] = -2x \text{Cov}\left[\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, X\right] - \text{Cov}\left[\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, Y\right] = \begin{bmatrix} -2x & -0.5 \\ -x & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Dermed fås

$$\hat{E}\left[\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \mid M_{(x, y)}=0\right] = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x+0.5 \\ x+1 \end{bmatrix} \frac{x^2-x+0.5}{4x^2+2x+1} \quad (18)$$

medens

$$\beta_{(x, y)} = \frac{x^2-x+0.5}{\sqrt{4x^2+2x+1}} \quad (19)$$

Højresiderne ses kun at afhænge af  $x$ . Vi kan derfor nøjes med at udføre iterationen i den første koordinat:

$$\hat{E}[X \mid M_{(x, y)}=0] = 0.5 + (2x+0.5) \frac{x^2-x+0.5}{4x^2+2x+1} \quad (20)$$

Lad os vælge  $x_1 = 0.5$  som startpunkt for iterationen. I første skridt har vi da (med  $\beta_x = \beta_{(x,y)}$ )

$$\beta_{0.5} = \frac{1}{4\sqrt{3}} = 0.1443, \quad x_2 = 0.5 + 1.5 \frac{0.25}{3} = 0.625 \quad (21)$$

Andet skridt giver  $\beta_{0.625} = 0.1360$ ,  $x_3 = 0.6219$ . Tredie skridt giver  $\beta_{0.6219} = 0.1360$ ,  $x_4 = 0.6218$ .  $\square$

Vi slutter dette afsnit med at se på det tilfælde, hvor grænsebetingelsen ikke er differentiabel overalt, men hvor den er sammensat af  $p$  differentiable flader

$$\mathcal{G}_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) = 0\}, \quad i = 1, \dots, p \quad (22)$$

hvor hver af funktionerne  $g_1, \dots, g_p$  opfylder de krav, der blev stillet til  $g$  ovenfor. Det er da muligt, at fællesmængden

$$\mathcal{K} = \mathcal{G}_1 \cap \dots \cap \mathcal{G}_p \quad (23)$$

hvis den ikke er tom, indeholder et lokalt mest centralt punkt for den sammensatte grænsebetingelsesflade. Relativt til  $\mathcal{K}$  selv findes altid et lokalt mest centralt punkt i  $\mathcal{K}$ , nemlig det punkt, der ved afbildningen ind i det normaliserede rum kommer nærmest ved nulpunktet. Med støtte i formel (4.4.7) kan sætning 5.1 uden videre almindeliggøres til

**SÆTNING 5.2** *Punktet  $x$  er et lokalt mest centralt punkt i  $\mathcal{K} = \mathcal{G}_1 \cap \dots \cap \mathcal{G}_p$ , hvis og kun hvis*

$$x = \hat{E}[X \mid M_x^{(1)} = 0, \dots, M_x^{(p)} = 0] \quad (24)$$

hvor  $M_x^{(i)}$  er den i punktet  $x$  til  $\mathcal{G}_i$  hørende lineært associerede sikkerhedsmargen,  $i = 1, \dots, p$ .

Iterationsprincippet beskrevet ovenfor til løsning af ligningen (5) generaliseres uden videre til løsning af ligningen (24).

**Eksempel 5.3** Vi vil beregne projektionen af nulpunktet på den rette linie bestemt ved ligningerne

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 3 \\ 3x + y + 4z &= 2 \end{aligned} \quad (25)$$

ved brug af sætning 5.2. Lad  $X$  være en stokastisk vektor med  $E[X] = \mathbf{0}$  og  $\text{Cov}[X, X'] = I$  (enhedsmatricen), og definer vektoren

$$M = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} X \quad (26)$$

Den har kovariansmatricen

$$\text{Cov}[M, M'] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 17 \\ 17 & 26 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Desuden har vi

$$E[M] = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \text{Cov}[X, M'] = - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (28)$$

således at den lineære regression af  $X$  på  $M$  bliver

$$\hat{E}[X \mid M] = - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{75} \begin{bmatrix} 26 & -17 \\ -17 & 14 \end{bmatrix} (M - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}) \quad (29)$$

eller

$$\hat{E}[X \mid M=0] = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \\ 8 \end{bmatrix} \quad (30)$$

#### 5.4 Historiske og bibliografiske noter

Brug af korrekt regning med middelværdier og standardafvigelser for styrker, laster og geometristørrelser til bestemmelse af sikkerhedsfaktoren i forbindelse med simple bæreevneformler blev foreslået allerede i 1920'erne af *M. Mayer* [5.9]. Grundlaget herfor var direkte til rådighed blandt datidens bygningsingeniører, der var grundigt trænet i landmålingens fejlære. Den i forhold til landmålingen langt større kompleksitet af problemstillingen vedrørende bærende konstruktioner og specielt forekomsten af mange relevante, men tilsyneladende usammenlignelige usikkerhedskilder holdt imidlertid udviklingen tilbage i flere årtier. Sikkerhedsindeksideen forsøges først taget op igen omkring 1960 af *E. Basler* [5.1], men får dog ikke for alvor vind i sejlene før med acceptering af den klassiske, men længe blandt positivister kasserede brede bayeske opfattelse af sandsynlighedsbegrebet.

Den bayeske opfattelse tillader indførelse af stokastiske vurderingsvariable, der ikke udviser fluktuationer i fysisk forstand, men som har et usikkerhedsmæssigt informationsindhold. Herved muliggøres, at bidrag fra usikkerhedskilder af helt forskellig art uden filosofiske problemer kan sammenregnes i en probabilistisk model. Denne tankegang kom i 1960'erne ind i bygningsingeniøruddannelsen ved flere af de førende nordamerikanske ingeniørskoler. Bærende konstruktioners sikkerhed var et oplagt anvendelsesområde og sikkerhedsindeksideen blev genfødt med betydelig overbevisende kraft. Blandt pionererne kan nævnes *C.A. Cornell* [5.2] ( $\beta_C$  i eksempel 5.1), *L. Esteva* og *E. Rosenblueth* [5.5] ( $\beta_{ER}$  i eksempel 5.1), *C. Turkstra* [5.10]. Udviklingen blev fremmet stærkt af igangværende sikkerhedsnormsarbejde i både Nordamerika og i Europa, specielt i det skandinaviske samarbejde. Dette normarbejde viste, at der var et påtrængende behov for etablering af et rationelt grundlag for bestemmelse af de sikkerhedsfaktorer, der skulle gives i normerne.

Formuleringsinvariansproblemet blev pointeret i 1972 af *OD* [5.3] og af *N. Lind*, som i 1974 sammen med *A.M. Hasofer* bragte det geometriske sikkerhedsindeks i forslag [5.7] som et formuleringsinvariant, praktisk anvendeligt sikkerhedsmål. Den geometriske egenskab hos det simple sikkerhedsindeks var demonstreret i et eksempel i en større artikel om konstruktioners sikkerhed af *A.M. Freudenthal* i 1956 [5.6]. Freudenthals sikkerhedsbetragtninger

var baseret på komplette sandsynlighedsmodeller, der på det tidspunkt var vanskeligt anvendelige både på grund af regnetekniske problemer og på grund af den anvendte snævre sandsynlighedsbegrebsopfattelse. Fra slutningen af 1940'erne og begyndelsen af 1950'erne foreligger der iøvrigt flere arbejder med fuldt sandsynlighedsbaserede sikkerhedsbetragtninger. Blandt disse skal her fremhæves en interessant afhandling af *A.J. Johnson* [5.8].

Den specielle brug af lineær regression af  $X$  på  $M$  til bestemmelse af såvel det mest centrale grænsetilstandspunkt som det geometriske sikkerhedsindeks er *OD's* påfund brugt blandt andet i [5.4], hvori den første version af den i afsnit 3.4 givne model for repræsentation af modelusikkerhed blev fremsat.

#### Referencer

1. E. Basler: Untersuchungen über der Sicherheitsbegriff von Bauwerken. *Schweizer Archiv*, vol.27, 1961.
2. C.A. Cornell: A Probability-Based Structural Code. *ACI-Journal*, 1969.
3. O. Ditlevsen: *Structural Reliability and the Invariance Problem*. Report No. 22, University of Waterloo, Solid Mechanics Division, Waterloo, Canada, 1973.
4. O. Ditlevsen: Model Uncertainty in Structural Reliability. *Structural Safety*, vol.1, 1982.
5. L. Esteva and E. Rosenblueth: Reliability Basis for Some Mexican Codes. *ACI publication SP-31*, American Concrete Institute, Detroit, Michigan, 1971.
6. A.M. Freudenthal: Safety and the Probability of Structural Failure. *Trans. ASCE*, vol.121, 1956.
7. A.M. Hasofer and N.C. Lind: An Exact and Invariant First-Order Reliability Format, *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.100, 1974.
8. A.I. Johnson: *Strength, Safety and Economical Dimensions of Structures*. Statens Kommitté för Byggnadsforskning. Meddelanden nr. 22. Stockholm 1953.
9. M. Mayer: *Die Sicherheit der Bauwerke*. Springer Verlag, Berlin 1926.



10. C. Turkstra: *Applications of Bayesian Decision Theory*. Study No. 3: Structural Reliability and Codified Design. University of Waterloo, Solid Mechanics Division, Waterloo, Canada, 1970.

## 6. DET GENERALISEREDE SIKKERHEDSINDEKS

### 6.1 Mangler ved det geometriske sikkerhedsindeks

Det geometriske sikkerhedsindeks er matematisk set en meget lidt struktureret udvidelse af det simple sikkerhedsindeks fra mængden af plane grænsetilstandsflader til mængden af vilkårlige grænsetilstandsflader. Det skelner således ikke mellem grænsetilstandsflader, der rører hinanden i et fælles nærmeste punkt til nulpunktet i det normaliserede rum. Disse grænsetilstandsflader tillægges altså alle samme sikkerhed. Man ledes derfor til at rejse det spørgsmål, om et sådant sikkerhedsindeks i almindelighed har en tilstrækkelig opløsningsevne til at tilfredsstille ingeniørmæssige formål.

Selvom dette spørgsmål melder sig, er det geometriske sikkerhedsindeks nyttigt, fordi mange grænsetilstandsflader for realistiske konstruktioner er næsten plane i den forstand, at de i en sikkerhedsmæssig væsentlig omegn af det mest centrale punkt afviger meget lidt fra den i punktet tangerende hyperplan. Det simple sikkerhedsindeks hørende til denne tangenthyperplan viser sig derfor at være et tilstrækkeligt godt sikkerhedsmål. Anvendelsesområdet for det geometriske sikkerhedsindeks er altså de i den antydne forstand næsten plane grænsetilstandsflader. Metoden udpeger simpelt hen entydigt en sikkerhedsmæssigt "ækvivalent" plan grænsetilstandsflade, hvis simple sikkerhedsindeks bruges som sikkerhedsmål for den ikke plane, men næsten plane grænsetilstandsflade. Afgrænsningen er på dette stadiu særdeles upræcis. En kvantitativ vurdering kræver en udvidelse af sikkerhedsindeksdefinitionen, som inddrager grænsetilstandsfladens afvigelse fra planhed. Vi vil nedenfor indføre en sådan udvidelse til et generaliseret sikkerhedsindeks, som løser dette problem. Det geometriske sikkerhedsindeks bevarer herunder sin store praktiske betydning ved at være en god approksimation til det generaliserede sikkerhedsindeks for "næsten plane" grænsetilstandsflader. Herudover får det en væsentlig betydning som en regnemæssig karakteristisk størrelse i forbindelse med beregning af det generaliserede sikkerhedsindeks.

Vi vil herefter se på de krav, som et ingeniørmæssigt rimeligt sikkerhedsmål bør opfylde.

Lad  $a, b, c, \dots$  være konstruktioner med tilhørende grænsetilstande, der kan repræsenteres i det normaliserede rum af inputvariable. Lad  $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c, \dots$  være de tilsvarende sikre mængder. Et rimeligt krav til en sikkerhedsanalysemodel er, at den er i stand til at ordne konstruktionerne i rækkefølge med hensyn til sikkerhed. Vi ønsker derfor at definere en ordningsrelation " $<$ " inden for mængden af konstruktioner således, at udsagnet  $a < b$  er ensbetydende med udsagnet "b er mindst ligeså sikker som a med hensyn til de betragtede grænsetilstande". Denne ordningsrelation skal naturligvis være transitiv ( $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ ) og refleksiv ( $a < b \wedge b < a \Leftrightarrow a \sim b$ ). Ækvi-valensrelationen  $a \sim b$  udtrykkes i ord ved udsagnet "a og b er lige sikre".

En umiddelbart rimelig egenskab er

$$\mathcal{S}_a \subset \mathcal{S}_b \Rightarrow a < b \quad (1)$$

Under den udtrykkelige forudsætning, at der ikke er anden information til rådighed end inputvariablenes andenmomentrepræsentation, må det normaliserede rums rotationssymmetri i usikkerhedsmæssig henseende accepteres. Dermed må vi acceptere den mere generelle egenskab:

$$\text{Hvis den sikre mængde } \mathcal{S}_a \text{ ved en rotation omkring nulpunktet kan bringes over i en delmængde } \mathcal{S}'_a \text{ af } \mathcal{S}_b, \text{ da gælder } a < b \quad (2)$$

Det gælder naturligvis per definition, at et skalært pålidelighedsmål  $\beta$  er en ordensbevarende afbildning fra mængden af konstruktioner ind i de reelle tal. Hver konstruktion er her tænkt tillagt netop een sikker mængde. Vi har

$$a < b \Leftrightarrow \beta(a) \leq \beta(b) \quad (3)$$

og specielt

$$a \sim b \Leftrightarrow \beta(a) = \beta(b) \quad (4)$$

Hvis mængden af konstruktioner svarer alene til mængden af plane grænsetilstandsflader, er det simple sikkerhedsindeks åbenbart et sådant sikkerhedsmål. For mere generelle mængder af grænsetilstandsflader kan vi, som

gjort i forrige kapitel, lade det geometriske sikkerhedsindeks være et sikkerhedsmål for hvilket (3) og (4) skal gælde. Herved induceres ordningsrelationen  $<$  i den tilsvarende mængde af konstruktioner. Et enkelt blik på figur 6.1 afslører imidlertid, at den definition let kommer i konflikt med rimelig ingeniørmæssig bedømmelse af sikkerheden. Denne uhensigtsmæssighed er blevet kaldt mangel på dimensionsinvarians [6.10], et begreb der skal forstås som forklaret i det følgende. Det simple sikkerhedsindeks kan opfattes som knyttet til et endimensionalt problem. Kun projektionen af inputvektoren på grænsetilstandshyperplanens normal har betydning for sikkerheden. Hvis grænsetilstandsfladen derimod krummer som en cylinderflade, bliver problemet todimensionalt, idet kun projektionen på cylinderfladens normalsnitsplan tæller i sikkerhedsmæssig henseende. Alt afhængig af grænsetilstandsfladens krumningsegenskaber er problemet altså af en dimension mellem 1 og  $n$  inklusive. Dette afspejles ikke af en tilsvarende variation af det geometriske sikkerhedsindeks.

**Eksempel 6.1** Mangelen på dimensionsinvarians hos det geometriske sikkerhedsindeks illustreres klart ved at udregne sandsynligheden for, at inputvektoren  $\mathbf{X}$  får et udfald inden for en cirkulær cylinder med ligningen

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 = \beta^2 \quad (5)$$

hvor  $r \in \{1, \dots, n\}$ , når det forudsættes, at vektoren  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  har en standardiseret normalfordeling. Den omtalte hændelse kan skrives

$$X_1^2 + \dots + X_r^2 \leq \beta^2 \quad (6)$$

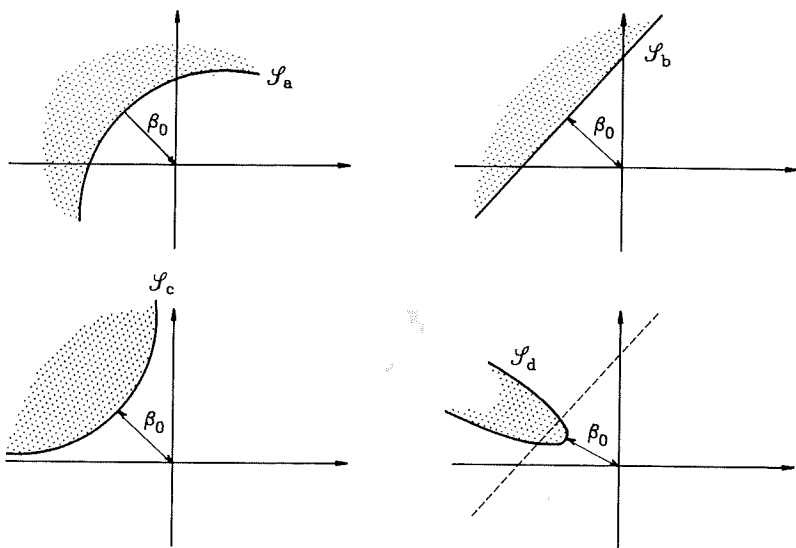
hvor venstre side har en  $\chi^2$ -fordeling med  $r$  frihedsgrader. Venstre side har middelværdien  $r$  og variansen  $2r$ . For store værdier af  $r$  går  $\chi^2$ -fordelingen asymptotisk over i normalfordelingen. For store  $r$  har vi derfor

$$F_{X_1^2 + \dots + X_r^2}(\beta^2) \simeq \Phi\left[\frac{\beta^2 - r}{\sqrt{2r}}\right] \rightarrow \Phi(-\infty) = 0 \text{ for } r \rightarrow \infty \quad (7)$$

for ethvert  $\beta$ . Når dimensionen vokser, bliver mere og mere af sandsynlighedsmassen altså flyttet uden for cylinderen med den faste radius  $\beta$ .

Dette eksempel går naturligvis langt ud over den grænse, inden for hvilken det geometriske sikkerhedsindeks med rimelighed er tænkt anvendt ved praktisk sikkerhedsvurdering.

I afsnit 6.4 vil der blive givet kriterier for bedømmelse af anvendeligheden af det geometriske sikkerhedsindeks. Forinden sådanne kriterier kan formuleres, må vi imidlertid konstruere en udvidelse af det simple sikkerhedsindeks til et generaliseret sikkerhedsindeks, som er dimensionsinvariant.



Figur 6.1. Illustration af eksempler på sikre mængder ( $\mathcal{S}_a, \mathcal{S}_b, \mathcal{S}_c$ ) hvor det geometriske sikkerhedsindeks ikke har sikkerhedsmæssig opløsningssevne og af et eksempel ( $\mathcal{S}_d$ ), hvor det måske er i direkte modstrid med ingeniørmæssig bedømmelse.

## 6.2 Det generaliserede sikkerhedsindeks

Vi vil forlange, at det generaliserede sikkerhedsindeks  $\beta$  skal tilfredsstille følgende tre basale regler:

1. Det generaliserede sikkerhedsindeks er en udvidelse af det simple sikkerhedsindeks fra mængden af plane grænsetilstandsflader til mængden af stykkevis differentiable grænsetilstandsflader.
2. Den ved det generaliserede sikkerhedsindeks inducerede ordning af grænsetilstandsfladerne har rotationsegenskaben (6.1.2).
3. Hvis  $\mathcal{S}_a$  i (6.1.2) er en ægte delmængde af  $\mathcal{S}_b$ , altså hvis  $\mathcal{S}_a \subset \mathcal{S}_b \wedge \mathcal{S}_a \neq \mathcal{S}_b$ , da gælder  $\beta(a) < \beta(b)$  (hvilket udelukker muligheden  $a \sim b$ ).

Det er nærliggende at konstruere et skalært sikkerhedsmål, der tilfredsstiller reglerne 2 og 3, ved at lade målet være relateret til den sikre mængdes volumen. Volumenmålet kan ikke anvendes direkte, da det ikke for alle delmængder af  $\mathbb{R}^n$  er begrænset. Derimod kan vi anvende et vægtet volumenmål ved at indføre en passende vægtfunktion  $\psi_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , som er positiv overalt, og som tillægger enhver passende pæn delmængde  $A$  af  $\mathbb{R}^n$  et endeligt mål bestemt ved integralet af  $\psi_n$  over  $A$ . Da det relative mål (ordningsegenskaben) ikke ændrer sig ved multiplikation af alle mål med en konstant, kan vi uden indskrænkning af mulighederne normalisere  $\psi_n$  således, at hele  $\mathbb{R}^n$  tillægges målet 1. Herved får  $\psi_n$  egenskaber som en sandsynlighedstæthed i  $\mathbb{R}^n$ . Da der skal være rotationssymmetri omkring nulpunktet, kan  $\psi_n$  kun være en funktion af  $r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ .

For at få reglen 1 til at passe må vi ved en passende voksende funktion  $G$ , der afbilder intervallet  $[0,1]$  på hele  $\mathbb{R}$ , definere sikkerhedsindekset ved formelen

$$\beta(a) = G \left[ \int_{\mathcal{S}_a} \psi_n \right] \quad (1)$$

Hvis  $\psi_n$  er valgt, bliver  $G$  entydigt bestemt af reglen 1. Principielt kan vi lægge enhver rotationssymmetrisk sandsynlighedstæthed  $\psi_n$  til grund for definitionen af det generaliserede sikkerhedsindeks gennem formelen (1). Vi behøver endog ikke at forlange, at sandsynlighedstætheden  $\psi_n$  har momenter

af første og anden orden. Hvis den har disse momenter, behøver vi ikke at forlange, at kovariansmatricen netop er enhedsmatricen. Af rotationssymmetrien følger jo kun, at kovariansmatricen, hvis den eksisterer, er proportional med enhedsmatricen.

Af simpelhedsgrunde vil vi imidlertid yderligere kræve følgende regler opfyldt for  $\psi_n$ :

4. Funktionen  $\psi_n$  er kontinuert og den tilhørende andenmomentmatrix er enhedsmatricen.

5. For alle  $n$  og  $m < n$  gælder produktreglen

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = \psi_m(x_1, \dots, x_m) \psi_{n-m}(x_{m+1}, \dots, x_n) \quad (2)$$

Reglen 5 medfører den særdeles bekvemme egenskab

$$\int_{\mathbf{x} > \mathbf{x}_0} \psi_n = \prod_{i=1}^n \left[ \int_{x_i > x_{0i}} \psi_1 \right] \quad (3)$$

for alle  $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$ . På grund af rotationssymmetrien gælder denne formel også efter en vilkårlig drejning af koordinatsystemet.

Det kan vises, at disse regler medfører, at  $\psi_1$  er entydigt bestemt som er den endimensionale standardiserede normale tæthed  $\varphi$ , og dermed at

$$\psi_n(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi(x_n) \quad (4)$$

Herefter indses det let, at  $G$  i (1) er den inverse funktion  $\Phi^{-1}$  til den standardiserede normale fordelingsfunktion  $\Phi$ . De stillede krav fører altså entydigt til definitionen

$$\beta(\mathbf{a}) = \Phi^{-1} \left[ \int_{\mathcal{S}_a} \varphi(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi(x_n) \right] \quad (5)$$

af det generaliserede sikkerhedsindeks. I det følgende vil vi for kortheds skyld almindeligvis stryge ordene "det generaliserede". Man kan opfatte integralet over  $\mathcal{S}_a$  i (5) som en sandsynlighed

$$p = \int_{\mathcal{S}_a} \varphi(x_1) \cdot \dots \cdot \varphi(x_n) \quad (6)$$

og sikkerhedsindekset  $\beta$  som den til  $p$  svarende fraktil

$$\beta = \Phi^{-1}(p) \quad (7)$$

i den standardiserede normalfordeling. Det skal imidlertid endnu engang understreges, at tilordningen af tætheden  $\psi_n$  defineret ved (4) ikke er et udtryk for brug af information af fordelingsmæssig art om inputvariablene  $\mathbf{X}$ . Kun andenmomentrepræsentationen af  $\mathbf{X}$  afspejler virkeligheden. Tilordningen af tætheden (4) er alene et matematisk formelt redskab, der muliggør en rationel udvidelse af det simple sikkerhedsindeks til en større klasse af grænsetilstandsflader. Udvidelsen er en af mange mulige, og den er derfor arbitrær. Ved at forlange (2) opfyldt, opnås imidlertid en entydig udvidelse af særlig simpelhed i beregningsmæssig henseende. Det er altså ikke herved hævdet, at  $\mathbf{X}$  er normalfordelt i den forstand, at en sådan egenskab er baseret på data. Matematisk kan vi kort beskrive tilordningen af (4) ved at sige, at  $\mathbf{X}$  er normalfordelt. Vi skal blot huske, at dette udsagn ikke afspejler information om virkeligheden.

**Bemærkning 6.1** Antag, at der er tilstrækkelig datainformation til rådighed til ikke blot at vælge andenmomentrepræsentationen for  $\mathbf{X}$ , men også til at fastslå at en antagelse om, at  $\mathbf{X}$  er normalfordelt, er i god overensstemmelse med data. Da vil  $p$  beregnet ved (6) være tolkelig som den relative frekvens af forekomsten af hændelsen  $\mathcal{S}_a$ . Hvis  $p$  derimod har den formelle rolle som en regnestørrelse, der indgår i definitionen af det generaliserede sikkerhedsindeks, er en sådan tolkning fejlagtig eller i det mindste tvivlsom.

Da den ovenfor omtalte fordelingsstypeinformation er lagt oven i andenmomentinformationen, strider det mod ingeniørmæssig sund fornuft at påstå,

at der er samme sikkerhed mod overskridelse af grænsetilstanden, som hvis kun andenmomentinformation er til rådighed. At  $p$  ved (1) udregnes til samme værdi er irrelevant for dette sikkerhedsvurderingsproblem. Sagens kerne er, at man ikke kan bruge (1) i både den ene situation og i den anden situation med det formål at sammenligne resultaterne og derved bestemme en ordning med hensyn til sikkerhed. Der er tale om to forskellige sikkerhedsmodeller, som ikke bør sammenblandes.

Enhver sikkerhedsmodel er afgrænset til at rumme og bearbejde visse typer af elementer af information. Inden for samme model afspejles varierende informationsmængder på rationel vis i varierende sikkerhedsmål. Information, der ikke kan repræsenteres ved hjælp af modellens elementer kan naturligvis ikke udnyttes ved brug af modellen. Hvis ingeniørmæssige overvejelser fører til, at den ikke repræsenterede information er af væsentlig teknisk betydning, må modellen erstattes af en mere omfattende model. Herved kan der almindeligvis kun drages sammenligninger mellem de forskellige modeller gennem studiet af de af modellerne flydende tekniske konsekvenser. Man må ty til det i kapitel 1 omtalte konsekvensberegningsskema. Det er klart, at modelvalget herved bliver et spørgsmål om fastlæggelse af normer for sikkerhedsvurdering. □

**Eksempel 6.2** En konstruktion belastes successivt med en ukorreleret følge af stokastiske laster  $X_1, X_2, \dots, X_m, \dots$  alle med middelværdi  $\mu_X$  og standardafvigelsen  $\sigma_X$ . Konstruktionen har en stokastisk modstandsevne  $Y$  mod svigt. Dette skal forstås således, at svigt tidligst indtræder ved lastpåførsel nr  $(m + 1)$  hvis og kun hvis

$$Y - X_1 > 0, Y - X_2 > 0, \dots, Y - X_m > 0 \quad (8)$$

Modstandsevnen  $Y$  har middelværdi  $\mu_Y$ , standardafvigelse  $\sigma_Y$  og er ukorreleret med lasterne. Vi ønsker at udregne det generaliserede sikkerhedsindeks med hensyn til svigt før lastpåførsel nr  $(m + 1)$  [4.1]. Vi forudsætter derfor, at  $X_1, \dots, X_m$  og  $Y$  er normalfordelte. Den betingede svigtsandsynlighed for givet  $Y = y$  bliver åbenbart

$$1 - \Phi\left[\frac{y - \mu_X}{\sigma_X}\right]^m = \Phi\left[-\beta_m(u)\right] \quad (9)$$

hvor  $\beta_m(u)$  er det betingede generaliserede sikkerhedsindeks for givet  $Y = y$  udtrykt som funktion af

$$u = \frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \quad (10)$$

Vi kan skrive

$$\beta_1(u) = \frac{y - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} u + \frac{\mu_Y - \mu_X}{\sigma_X} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} u + \beta_1 \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}\right)^2} \quad (11)$$

hvor det simple sikkerhedsindeks

$$\beta_1 = \frac{E[Y - X_1]}{D[Y - X_1]} = \frac{\mu_Y - \mu_X}{\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}} \quad (12)$$

er sammenfaldende med det generaliserede sikkerhedsindeks for  $m = 1$ . Af (9) følger, at

$$\beta_m(u) = \Phi^{-1}\{\Phi[\beta_1(u)]^m\} \quad (13)$$

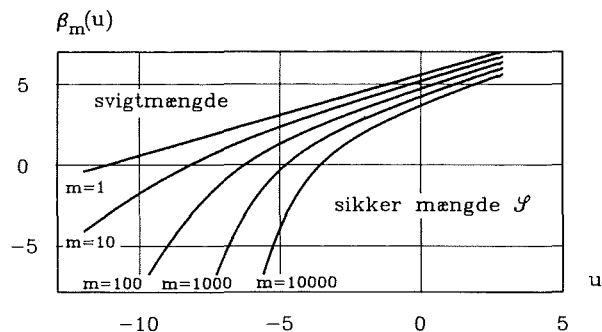
Lad os antage, at  $\sigma_X/\sigma_Y = 2$ , og at konstruktionen er dimensioneret således, at  $\beta_1 = 5$ . Da specialiseres (13) til

$$\beta_m(u) = \Phi^{-1}\left\{\Phi\left[\frac{1}{2}u + \frac{5\sqrt{5}}{2}\right]^m\right\} \quad (14)$$

Graferne for denne funktion er vist for  $m = 1, 10, 100, 1000$ , og  $10000$  i figur 6.2.

Den totale formelle sandsynlighed for at konstruktionen overlever de  $m$  første lastpåførsler bliver herefter

$$\Phi(\beta_m) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi[\beta_m(u)]\varphi(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} du \int_{-\infty}^{\beta_m(u)} \varphi(u)\varphi(v)dv = \int_{\mathcal{S}} \varphi(u)\varphi(v) \quad (15)$$



Figur 6.2. Betinget generaliseret sikkerhedsindeks  $\beta_m(u)$  for given modstandsevne  $Y = \sigma_Y u + \mu_Y$  og  $m$  uafhængige lastgentagelser.

Hermed er det oprindelige  $(m + 1)$ -dimensionale problem reduceret til et 2-dimensionalt problem for de indbyrdes uafhængige standardiserede normalfordelte stokastiske variable  $U$  og  $V$ , hvor uligheden  $v \leq \beta_m(u)$  definerer den sikre mængde  $\mathcal{S}$ . Af grænsetilstandskurvernes konvekse krumningsegenskaber følger, at det geometriske sikkerhedsindeks beregnet i dette 2-dimensionale rum er en øvre grænse til det generaliserede sikkerhedsindeks  $\beta_m$  defineret ved (16).

Ved at approksimere grænsetilstandskurverne i figur 6.2 med deres krumningscirkler i punkterne  $(0, \beta_m(0))$  og beregne afstandene fra nulpunktet til disse cirkler efterfulgt af rækkeudvikling ved brug af Taylors formel fås

$$\beta_m \lesssim \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta'^2}} \left\{ 1 + \frac{\beta\beta''\beta'^2}{2[\beta\beta'' + (1+\beta'^2)^2]} \right\} \quad (16)$$

hvor  $\beta = \beta_m(0)$ ,  $\beta' = \beta'_m(0)$ ,  $\beta'' = \beta''_m(0)$ . Formlen (16) gælder alment for konvekse grænsetilstandskurver med et kvalitativt forløb som i figur 6.2.

I nærværende eksempel finder vi de i nedenstående tabel givne værdier. Den sidste søjle i tabellen er en udregning af det generaliserede sikkerhedsindeks under den ukorrekte forudsætning, at  $Y - X_1, \dots, Y - X_m$  er indbyrdes uafhængige. Afhængigheden gennem det fælles led  $Y$  ses i dette tilfælde at have en meget lille indflydelse på det generaliserede sikkerhedsindeks. Denne lille indflydelse af afhængighed mellem forskellige svigtmuligheder viser sig

under visse forudsætninger at være af generel natur.

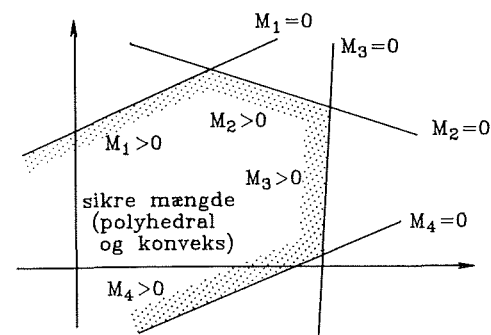
$m$	$\beta$	$\beta/\sqrt{1+\beta'^2}$	$\{1+\dots\}$	$\beta_m \lesssim$	$\Phi^{-1}[\Phi(\beta_1)^m]$
1	5.590	5.000	1	5.00	5.00
10	5.175	4.562	0.994	4.53	4.54
100	4.727	4.084	0.989	4.04	4.02
1000	4.236	3.560	0.981	3.49	3.44
10000	3.687	2.976	0.966	2.88	2.76

Medens det geometriske sikkerhedsindeks i det oprindelige formuleringsrum er uafhængigt af  $m$  og lig med 5, aftager det generaliserede sikkerhedsindeks med  $m$ .  $\square$

### 6.3 Grænser for sikkerhedsindekset for konvekse polyhedral sikker mængde

Som et vigtigt eksempel på de praktiske muligheder for at udregne sikkerhedsindekset betragtes det tilfælde, hvor den sikre mængde er polyhedral og konvekse. Lad grænsebetingelsen være opbygget af  $m$  hyperplaner, således at den sikre mængde er defineret som fællesmængden af de  $m$  halvrum bestemt ved betingelserne

$$M_1 > 0, \dots, M_m > 0 \quad (1)$$



Figur 6.3. Polyhedral og konvekse sikker mængde.

hvor  $M_i$  er den lineære sikkerhedsmargen svarende til den  $i$ te hyperplan, se figur 6.3.

Den formelle sansynlighedsmasse på den sikre mængde

$$p = P(M_1 > 0, \dots, M_m > 0) = P(-M_1 < 0, \dots, -M_m < 0) \quad (2)$$

er bestemt ved, at inputvariablene  $X_1, \dots, X_n$  formelt er tillagt normalfordeling. Som inhomogene lineære funktioner af  $X_1, \dots, X_n$  bliver sættet af sikkerhedsmargener  $M_1, \dots, M_m$  da også normalfordelt. Det fremgår af (2), at  $p$  netop er værdien af fordelingsfunktionen i  $(0, \dots, 0)$  for  $(-M_1, \dots, -M_m)$ . Vi har åbenbart

$$p = \Phi_m(\beta; P_M) \quad (3)$$

hvor  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$  er vektoren af simple sikkerhedsindeks

$$\beta_i = \frac{E[M_i]}{D[M_i]} \quad (4)$$

og  $P_M = \{\rho[M_i, M_j]\}$  er korrelationsmatricen for  $M$ , dvs matricen af korrelationskoefficienterne hørende til  $M = (M_1, \dots, M_m)$ . Funktionen  $\Phi_m(x; P)$  er den  $m$ -dimensionale normale fordelingsfunktion svarende til, at alle middelværdier er nul, alle varianser er 1 og korrelationsmatricen er  $P$ .

Hvis  $P$  er regulær, siges normalfordelingen at være regulær og i modsat fald at være singulær. Hvis  $m > n$  er normalfordelingen altid singulær, men den kan naturligvis også være singulær for  $m \leq n$ . Når fordelingen er singulær er hele sansynlighedsmassen koncentreret på et underrum til det  $m$ -dimensionale rum. Dette underrum har dimension lig med rangen af korrelationsmatricen (eller, hvad der er det samme, rangen af kovariansmatricen  $\text{Cov}[M, M']$ ).

Sikkerhedsteoriens praktiske anvendelighed på problemer, der går ud over de problemer, der svarer til "næsten plane" grænsetilstandsflader, er altså betinget af mulighederne for at udregne værdier af den  $m$ -dimensionale normale fordelingsfunktion  $\Phi_m(x; P)$  for enhver korrelationsmatrix  $P$ . Specielt gælder dette for punkter  $x = \beta$ , hvor elementerne i  $\beta$  har passende

store positive værdier, således at den formelle svigtsandsynlighed  $1 - p = 1 - \Phi_m(\beta; P)$  er lille.

Vi vil både i dette og i næste kapitel behandle forskellige metoder til tilnærmet udregning af  $\Phi_m(x; P)$ . I dette afsnit vil vi specielt udlede en eksakt afgrænsning af  $1 - p$  både nedefra og oppefra. Hertil er det bekvemt at arbejde med mængdeindikatorfunktioner (nul – et variable). Vi definerer

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } A \text{ sand for } x \text{ (eller hvis } x \in A) \\ 0 & \text{ellers} \end{cases} \quad (5)$$

hvor  $A$  enten er et udsagn som for eksempel  $M_1 > 0$  eller en mængde. Indikatorfunktionen for den sikre mængde  $\mathcal{S}$  defineret ved at alle udsagnene i (1) er sande, bliver da bestemt ved produktet

$$1_{\mathcal{S}} = 1_{\mathcal{S}_1} \cdot \dots \cdot 1_{\mathcal{S}_m} \quad (6)$$

hvor  $1_{\mathcal{S}_i} = 1_{M_i > 0}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . For kortheds skyld vil vi skrive  $1_{\mathcal{S}_i}$  som  $1_i$  i de nærmest følgende ligninger. Vi har da

$$1 - 1_{\mathcal{S}} = 1 - 1_1 \cdot \dots \cdot 1_m = 1 - 1_1 + 1_1(1 - 1_2) + 1_1 1_2(1 - 1_3) + \dots + 1_1 1_2 \cdot \dots \cdot 1_{m-1}(1 - 1_m) \quad (7)$$

Det gælder åbenbart, at

$$1_1 \cdot \dots \cdot 1_i \begin{cases} = \max\left\{1 - \sum_{j=1}^i (1 - 1_j), 0\right\} \\ \leq 1_j \quad \text{for } j \leq i \end{cases} \quad (8)$$

hvor den nederste ulighed er triviell. Højre side af den øverste lighed har højst værdien 1, og det kun, når  $1_j = 1$  for alle  $j$ . Men i det tilfælde har venstre

side også værdien 1. I alle andre tilfælde er både højre og venstre side nul.

Indsættes (8) i (7) fås dels

$$1 - 1_{\mathcal{A}} = 1 - 1_1 + \sum_{i=2}^m \max \left\{ \left[ 1 - \sum_{j=1}^{i-1} (1 - 1_j) \right] (1 - 1_i), 0 \right\} \quad (9)$$

og dels

$$\begin{aligned} 1 - 1_{\mathcal{A}} &\leq 1 - 1_1 + \sum_{i=2}^m \left[ (1 - 1_i) \min \{ 1_1, 1_2, \dots, 1_{i-1} \} \right] = \\ &1 - 1_1 + \sum_{i=2}^m \left[ (1 - 1_i) (1 - \max_{j < i} \{ 1 - 1_j \}) \right] = \\ &\sum_{i=1}^m (1 - 1_i) - \sum_{i=2}^m \max_{j < i} \{ (1 - 1_i)(1 - 1_j) \} \end{aligned} \quad (10)$$

eller

$$1_{\mathcal{A}} \begin{cases} = 1_{\mathcal{A}_1} + \sum_{i=2}^m \max \left\{ 1_{\mathcal{A}_i} - \sum_{j=1}^{i-1} 1_{\mathcal{A}_i} 1_{\mathcal{A}_j}, 0 \right\} \\ \leq \sum_{i=1}^m 1_{\mathcal{A}_i} - \sum_{i=2}^m \max_{j < i} \{ 1_{\mathcal{A}_i} 1_{\mathcal{A}_j} \} \end{cases} \quad (11)$$

hvor  $1_{\mathcal{A}} = 1 - 1_{\mathcal{A}^c}$  er indikatorfunktionen for komplementærmængden til  $\mathcal{A}$  og tilsvarende for de indicerede mængder.

Da det generelt gælder for stokastiske variable  $X$  og  $Y$ , at  $X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$  (forventningsværdifunktionalens positivitetsegenskab (4.2.10)) giver (11) sandsynlighedsulighederne

$$P(\mathcal{A}) \geq P(\mathcal{A}_1) + \sum_{i=2}^m \max \left\{ P(\mathcal{A}_i) - \sum_{j=1}^{i-1} P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j), 0 \right\} \quad (12a)$$

$$P(\mathcal{A}) \leq \sum_{i=1}^m P(\mathcal{A}_i) - \sum_{i=2}^m \max_{j < i} \{ P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j) \} \quad (12b)$$

Det er her benyttet, at forventningsværdien af en stokastisk indikatorfunktion  $1_A$  er det samme som sandsynligheden  $P(A)$  for hændelsen  $A$ .

Ulighederne (12) gælder for en vilkårlig sandsynlighedsfordeling. Ved definitionen af sikkerhedsindekset har vi formelt indlagt en normalfordeling i rummet af inputvariable, således at denne normalfordeling har samme andentmomentrepræsentation som inputvariablene  $X$ . Vi kan derfor benytte (12) til afgrænsning af sikkerhedsindekset

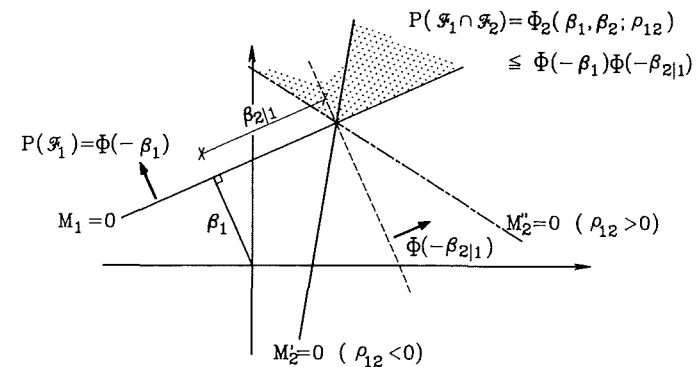
$$\beta = -\Phi^{-1}(P(\mathcal{A})) \quad (13)$$

ved at sætte

$$P(\mathcal{A}_i) = \Phi(-\beta_i) \quad (14)$$

$$P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j) = \Phi_2(-\beta_i, -\beta_j; \rho_{ij}) \quad i, j = 1, \dots, m, \quad (15)$$

hvor funktionen  $\Phi_2(x, y; \rho)$  er fordelingsfunktionen hørende til den todimensionale normale fordeling med middelværdier  $(0, 0)$ , varianser  $(1, 1)$  og korrelationskoefficient  $\rho$  (øvelse 4.3).



Figur 6.4. Geometrisk illustration af det normaliserede rum med bevis for (6.3.16) og (6.3.17).



Det følger umiddelbart ved betragtning af figur 6.4, at

$$\Phi_2(-\beta_i, -\beta_j; \rho_{ij}) \begin{cases} \geq \max\{\Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_j | i), \Phi(-\beta_j)\Phi(-\beta_i | j)\} \\ \leq \Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_j | i) + \Phi(-\beta_j)\Phi(-\beta_i | j) \end{cases} \quad (16)$$

for  $\rho_{ij} > 0$ , medens

$$\Phi_2(-\beta_i, -\beta_j; \rho_{ij}) \leq \min\{\Phi(-\beta_i)\Phi(-\beta_j | i), \Phi(-\beta_j)\Phi(-\beta_i | j)\} \quad (17)$$

for  $\rho_{ij} < 0$ . Det betingede sikkerhedsindeks  $\beta_{i|j}$  er, se (4.4.16),

$$\beta_{i|j} = \frac{\hat{E}[M_i | M_j = 0]}{\hat{D}[M_i | M_j = 0]} = \frac{E[M_i] - \frac{\text{Cov}[M_i, M_j]}{\text{Var}[M_j]} E[M_j]}{\sqrt{\text{Var}[M_i](1 - \rho[M_i, M_j]^2)}} = \frac{\beta_i - \rho_{ij}\beta_j}{\sqrt{1 - \rho_{ij}^2}} \quad (18)$$

Dette kan naturligvis også ses geometrisk i figur 6.4 ved brug af, at korrelationskoefficienten  $\rho[M_i, M_j]$  er  $\cos\nu$ , hvor  $\nu$  er vinklen mellem de to udadrettede normalvektorer til hyperplanerne.

Det er i mange praktiske situationer tilstrækkeligt at benytte (16) og (17) til vurdering af leddene  $P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j)$  på højre side af (12).

**Eksempel 6.3** Fig 6.5 viser et stål-gitterspær belastet af egenvægt  $q_1$  og snelast  $q_2$  [4.1]. Lasterne betragtes som konstanter, medens stangflydekræfterne er stokastiske med givne middelværdier og standardafvigelse. Flydekræfterne antages at være enskorrelerede med korrelationskoefficienten  $\rho \geq 0$ . Enskorrelation kan stamme fra et fælles stokastisk led (fælles på nær proportionalitet), medens variationen ud over bidraget fra dette fælles led repræsenteres ved indbyrdes uafhængige stokastiske variable.

Flydning af en vilkårlig af de 13 stænger definerer en svigtmåde for spæret. De tilsvarende sikkerhedsmargener er lineære. For simpelhed skyld vil vi antage, at det ved konstruktive midler er sikret, at trykstængerne ikke kan svigte ved tab af stabilitet. Opgaven er da at dimensionere stængerne således, at det generaliserede sikkerhedsindeks med hensyn til vilkårligt svigt af spæret får en specificeret værdi  $\beta_{\text{spær}}$ . For yderligere at simplificere eksemplet, indskrænkes dimensioneringsproblemet her til det specielle tilfælde, hvor stangtværnsnitsarealerne vælges sådan, at alle svigtmåder får fælles simpelt sikkerhedsindeks  $\beta$ . Dermed er problemet reduceret til bestemmelse af  $\beta$  for en given værdi af  $\beta_{\text{spær}}$ .

De  $m = 13$  lineære sikkerhedsmargener bliver

$$M_i = Y_i - a_1 q_1 - b_1 q_2, \quad i = 1, \dots, 13 \quad (19)$$

hvor  $a_i, b_i$  er influenskoefficienter, medens  $Y_i$  er flydekræften for den  $i$ te stang (tryk eller træk afhængigt af, hvad der er relevant). Da lasterne er konstante bliver sikkerhedsmargenerne enskorrelerede med korrelationskoefficienten  $\rho$ . Vi har da, at

$$P(\mathcal{A}_i) = \Phi(-\beta) \quad (20)$$

og ifølge (18), at

$$\beta_{i|j} = \beta \sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}} \quad (21)$$

således at (15) og (16) giver

$$1 \leq \frac{P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j)}{\Phi(-\beta)\Phi(-\beta\sqrt{\frac{1 - \rho}{1 + \rho}})} \leq 2 \quad (22)$$

Det følger herefter af (12), at

$$\begin{aligned}
\frac{P(\mathcal{F})}{\Phi(-\beta)} &\geq 1 + \sum_{i=2}^m \max \left\{ 1 - 2(i-1)\Phi \left[ -\beta \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right], 0 \right\} \\
&= \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \sum_{i=1}^j \left\{ 1 - 2(i-1)\Phi \left[ -\beta \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right] \right\} \\
&= \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \left\{ j \left[ 1 - (j-1)\Phi \left[ -\beta \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right] \right] \right\} \quad (23)
\end{aligned}$$

hvor den maksimale værdi antages for  $j$  lig med det heltal, der er nærmest ved tallet

$$\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\Phi \left[ -\beta \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right]} \right] \quad (24)$$

Desuden giver (12) den øvre grænse

$$\frac{P(\mathcal{F})}{\Phi(-\beta)} \leq m - (m-1)\Phi \left[ -\beta \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right] \quad (25)$$

Specielt for  $\rho = 0$  fås, at det generaliserede sikkerhedsindeks  $\beta_{\text{spær}}$  er afgrænset således:

$$-\Phi^{-1} \{ \Phi(-\beta)[13-12\Phi(-\beta)] \} \leq \beta_{\text{spær}} \leq -\Phi^{-1} \{ \Phi(-\beta)[13-156\Phi(-\beta)] \} \quad (26)$$

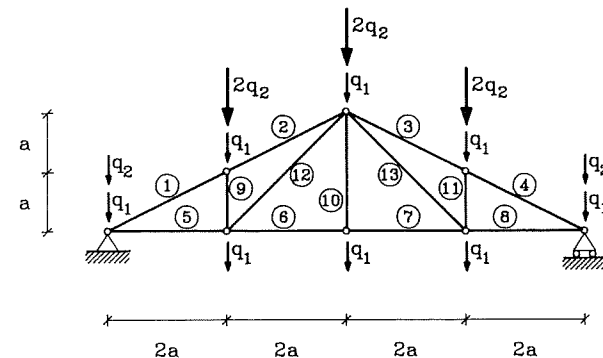
For værdier af praktisk interesse er der en forsvindende forskel mellem de to grænser. Den eksakte værdi er åbenbart

$$\beta_{\text{spær}} = \Phi^{-1}[\Phi(\beta)^{13}] \approx \Phi^{-1}[13\Phi(-\beta)] \quad (27)$$

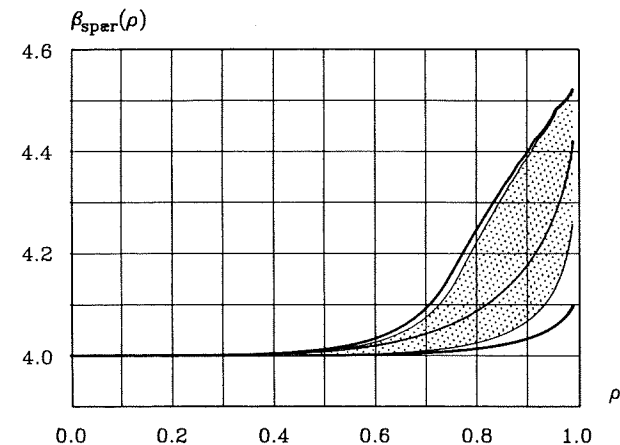
For en specificeret værdi af  $\beta_{\text{spær}}$  som for eksempel  $\beta_{\text{spær}} = 4$ , giver (27) værdien  $\beta = 4.57$  til dimensionering af de enkelte stænger. Denne værdi af  $\beta$

er benyttet til udregning af kurverne i figur 6.6, der med kraftig streg viser grænserne for  $\beta_{\text{spær}}(\rho)$  bestemt ved (23) og (25) som funktion af  $\rho \in [0, 1]$ . Den største værdi af parentesen  $\{ \dots \}$  i (23) fås for  $j = 13$  når  $\rho \leq 0.748$ . For  $\rho = 0.8, 0.9, 1$  fås den optimale grænse for henholdsvis  $j = 8, 4, 1$ . Grænserne for det skraverede område er bestemt ved brug af det eksakte integraludtryk (4.5.11) for  $\Phi_2(-\beta, -\beta; \rho)$  i (15).

Figur 6.6 viser, at  $\beta_{\text{spær}}(\rho)$  er næsten uafhængig af  $\rho$  helt op til en værdi



Figur 6.5. Stålgitterspær med lastangivelser.



Figur 6.6. Øvre og nedre grænset for det generaliserede sikkerhedsindeks  $\beta_{\text{spær}}$  for gitterkonstruktionen i figur 6.5 som funktion af korrelationskoefficienten  $\rho$  mellem stangflydekræfterne. Den midterste kurve viser det eksakte sikkerhedsindeks (bemærkning 6.2).

af  $\rho$  på omkring 0.5 til 0.6. Denne grænse for uafhængighed af  $\rho$  er voksende med sikkerhedsindekset  $\beta$ . Desuden illustrerer figuren, at de to grænser er næsten sammenfaldende for  $\rho$  mindre end 0.5 til 0.6.  $\square$

**Bemærkning 6.2** Lad  $X, X_1, \dots, X_m$  være indbyrdes uafhængige standardiseret normalfordelte stokastiske variable og betragt de  $m$  sikkerhedsmargener

$$M_i = \beta_i + \sqrt{\rho} X + \sqrt{1 - \rho} X_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (28)$$

De ses at være enskorrelerede med korrelationskoefficient  $\rho$ . De har alle variansen 1, og  $M_i$  har middelværdien  $\beta_i$ . Da gælder, at

$$P(M_1 > 0, \dots, M_m > 0) = \int_{-\infty}^{\infty} P(M_1 > 0, \dots, M_m > 0 | X = x) \varphi(x) dx =$$

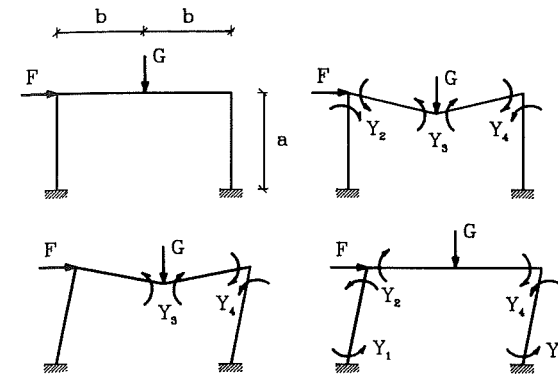
$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[ \prod_{i=1}^m P(M_i > 0 | X = x) \right] \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \prod_{i=1}^m \Phi \left( \frac{\beta_i + \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1 - \rho}} \right) \right] \varphi(x) dx \quad (29)$$

som specielt hvis  $\beta_1 = \dots = \beta_m = \beta$  bliver

$$P(M_1 > 0, \dots, M_m > 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left( \frac{\beta + \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1 - \rho}} \right)^m \varphi(x) dx \quad (30)$$

Det i eksempel 6.3 betragtede sikkerhedsproblem kan altså løses eksakt ved et enkelt integral. Grafen for den tilsvarende ved numerisk integration bestemte funktion  $\beta_{\text{spær}}(\rho)$  er vist i figur 6.6.  $\square$

**Eksempel 6.4** Rammekonstruktionen vist i figur 6.7 analyseres med hensyn til bæreevne ved brug af flydeledsteorien svarende til ideal plasticitet [4.1]. Flydemomenterne  $Y_1, \dots, Y_5$  antages at være ukorrelerede stokastiske variable med fælles middelværdi  $\mu$  og standardafvigelse  $\sigma$ . Det virtuelle arbejdes princip giver følgende tre lineære sikkerhedsmargener



Figur 6.7. Flydeledsmodel for rammekonstruktion.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Fa + Gb \\ Gb \\ Fa \end{bmatrix} \quad (31)$$

svarende til hver af de viste mekanismer.

Grænsetilstandsfladen i flydemomenternes 5-dimensionale rum er konveks og polyhedral. Vinklerne  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$  mellem normalerne til hyperplanerne i det tilsvarende normaliserede rum er givet ved, se (4.2.45),

$$\cos \nu_{12} = \rho[M_1, M_2] = \sqrt{6/10} \approx 0.775, \quad \nu_{12} \approx 39^\circ$$

$$\cos \nu_{13} = \rho[M_1, M_3] = \sqrt{4/10} \approx 0.632, \quad \nu_{13} \approx 51^\circ \quad (32)$$

$$\cos \nu_{23} = \rho[M_2, M_3] = \sqrt{1/6} \approx 0.408, \quad \nu_{23} \approx 66^\circ$$

Vi vil se på det specielle, men simple tilfælde, hvor de tre simple sikkerhedsindeks  $\beta_i = E[M_i]/D[M_i]$ ,  $i = 1, 2, 3$ , har den fælles værdi  $\beta$ . Det betingede sikkerhedsindeks (18) bliver

$$\beta_{i|j} = \beta \sqrt{\frac{1 - \rho_{ij}}{1 + \rho_{ij}}} \quad (33)$$

og det følger fra (15) og (16), at

$$\Phi(-\beta)p_{ij} \leq P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j) \leq 2\Phi(-\beta)p_{ij} \quad (34)$$

hvor  $p_{ij} = \Phi(-\beta_{i|j})$ . Ulighederne (12) medfører da, at kollapsandsynligheden  $P(\mathcal{A})$  har den nedre grænse

$$P(\mathcal{A}) \geq \Phi(-\beta)[3 - 2(p_{12} + p_{13} + p_{23})] \quad (35)$$

og den øvre grænse

$$P(\mathcal{A}) \leq \Phi(-\beta)[3 - (p_{12} + p_{13} + p_{23}) + \min\{p_{12}, p_{13}, p_{23}\}] \quad (36)$$

der begge svarer til den nummerering af de tre mekanismer, der giver de snævraste grænser. Heraf beregnes følgende afgrænsning af det generaliserede sikkerhedsindeks:  $3.74 < \beta_{\text{ramme}} < 3.76$  for  $\beta = 4$  og  $4.78 < \beta_{\text{ramme}} < 4.80$  for  $\beta = 5$ .

Hvis vi beregner kollapsandsynligheden under forudsætning af uafhængighed mellem de tre sikkerhedsmargener fås

$$P(\mathcal{A}) = 1 - \Phi(\beta)^3 \simeq 3\Phi(-\beta) \quad (37)$$

der giver  $\beta_{\text{ramme}} = 3.73$  og  $4.78$  for henholdsvis  $\beta = 4$  og  $5$ . Vi ser altså, at korrelationen mellem sikkerhedsmargenerne er næsten helt uden indflydelse på det generaliserede sikkerhedsindeks.

Det er vigtigt ikke at sammenblende ufølsomheden af det generaliserede sikkerhedsindeks over for korrelation mellem flere (i serie) indgående sikkerhedsmargener med virkningen af korrelation mellem inputvariable som  $Y_1, \dots, Y_5$ . Korrelation mellem inputvariablene kan naturligvis have væsentlig indflydelse på standardafvigelse af de enkelte sikkerhedsmargener og dermed på deres sikkerhedsindeks.  $\square$

#### 6.4 Asymptotisk sikkerhedsindeks for krum grænsetilstandsflade. Definition af "næsten plan" grænsetilstandsflade. (Enkelt punkt FORM eller SORM)

Lad grænsetilstandsfladen i det standardiserede Gaussiske rum have sit globalt mest centrale punkt på  $x_n$ -aksen. Dette kan altid opnås ved at dreje koordinatsystemet. Antag desuden, at grænsetilstandsfladen er 2 gange differentiabel i en omegn af det globalt mest centrale punkt.

Indlæg en "cirkulær" cylinder  $\mathcal{C}$  i  $\mathbb{R}^n$  med  $x_n$ -aksen som centerakse. Lad  $\mathbb{R}^{n-1}$  her betegne det specielle underrum til  $\mathbb{R}^n$ , der beskrives ved de  $n-1$  først koordinater i  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ . Cylinderens projektion på  $\mathbb{R}^{n-1}$  er da en kugle  $\mathcal{K}$ .

Vi vil gøre den antagelse, at fællesmængden mellem  $\mathcal{C}$  og grænsetilstandsfladen udgør et fladestykke, hvis projektion på  $\mathbb{R}^{n-1}$  er hele kuglen  $\mathcal{K}$ . Vi kan ved brug af Taylors grænseformel fremstille dette fladestykke ved en ligning af formen

$$x_n = \beta + \frac{1}{2} z' \mathbf{A} z + o(z'z), \quad z \in \mathcal{K} \quad (1)$$

hvor  $\beta$  er det geometriske sikkerhedsindeks,  $\mathbf{A}$  er en konstant matrix og  $z = (x_1, \dots, x_{n-1})$ .

Ved en affinitet med hensyn til nulpunktet med en affinitetsfaktor  $\gamma \geq 1$  fremkommer heraf et fladestykke med ligningen

$$x_n = \gamma\beta + \frac{1}{2\gamma} z' \mathbf{A} z + \gamma o\left(\frac{z'z}{\gamma}\right), \quad z \in \mathcal{K} \quad (2)$$

hvortil svarer det geometriske sikkerhedsindeks  $\gamma\beta$ .

Lad  $\mathcal{F}_\gamma$  betegne svigtområdet relativt til den grænsebetingelse, der svarer til værdien  $\gamma$  af affinitetsfaktoren i (2). Vort mål i det følgende er at udlede en asymptotisk formel for den formelle svigtsandsynlighed  $P(X \in \mathcal{F}_\gamma)$  for  $\gamma \rightarrow \infty$ . Læsere, der er mindre interesserede i selve udledningen, kan overspringe teksten indtil formel (10).

Vi vil først benytte os af den asymptotiske formel

$$\Phi(-x) \sim \frac{\varphi(x)}{x} \text{ for } x \rightarrow \infty \quad (3)$$

der skal tolkes således, at vi til ethvert  $\epsilon_1 > 0$  har et  $x_0$ , således at

$$\left| \frac{\varphi(x)}{x\Phi(-x)} - 1 \right| < \epsilon_1 \text{ for } x > x_0 \quad (4)$$

Vi har altså med  $x_n$  givet ved (2), at

$$P(X \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}) = \int_{\mathcal{K}} \Phi(-x_n) \varphi_{n-1}(z) \sim \int_{\mathcal{K}} \frac{\varphi(x_n)}{x_n} \varphi_{n-1}(z) \quad (5)$$

hvor den relative fejl efter " $\sim$ " er mindre end  $\epsilon_1$ , når  $\gamma$  vælges passende stor i afhængighed af  $\epsilon_1$ . Funktionen  $\varphi_{n-1}(z)$  er den standardiserede normale tæthed i det  $(n-1)$ -dimensionale rum. Ved indsætning af  $x_n$  fra (2) ses, at det sidste integral i (5) kan skrives

$$\frac{\varphi(\gamma\beta)}{\gamma\beta} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right]^{n-1} \int_{\mathcal{K}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{z}'(\mathbf{I} + \beta\mathbf{A})\mathbf{z} \right] \frac{\exp \left[ \gamma^2 o \left[ \frac{\mathbf{z}'\mathbf{z}}{\gamma^2} \right] \right]}{1 + \frac{1}{2\gamma^2\beta} \mathbf{z}'\mathbf{A}\mathbf{z} + o \left[ \frac{\mathbf{z}'\mathbf{z}}{\gamma^2} \right]} \quad (6)$$

hvor  $\mathbf{I}$  er enhedsmatricen. Brøken under integralet er for et vilkårligt valg af  $\epsilon_2 > 0$  begrænset til intervallet  $[1-\epsilon_2, 1+\epsilon_2]$  for  $\gamma$  passende stor. Med en relativ fejl mindre end  $\epsilon_2$  kan vi derfor erstatte brøken i (6) med 1. Hermed har vi fra (5)

$$P(X \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}) \sim \Phi(-\gamma\beta) \int_{\mathcal{K}} \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2} \mathbf{z}'(\mathbf{I} + \beta\mathbf{A})\mathbf{z} \right]}{\left[ \sqrt{2\pi} \right]^{n-1}} \quad (7)$$

hvor vi ved brug af (2) har erstattet  $\varphi(\gamma\beta)/(\gamma\beta)$  med  $\Phi(-\gamma\beta)$ .

Vi forudsætter nu, at de absolutte værdier af elementerne i matricen  $\mathbf{A}$  er tilstrækkeligt små til at matricen  $\mathbf{I} + \beta\mathbf{A}$  er positiv definit, altså at alle

egenkværdier til  $\mathbf{I} + \beta\mathbf{A}$  er positive. Da er integranden i (7) proportional med en normalfordelingstæthed med den inverse covariansmatrix  $\mathbf{I} + \beta\mathbf{A}$ . Hvis vi drejer koordinatsystemet om  $x_n$ -aksen, kan vi opnå, at  $\mathbf{A}$  bliver en diagonalmatrix

$$\mathbf{A} = [\bar{\alpha}_1 \dots \alpha_{n-1}] \quad (8)$$

Ved denne drejning går  $\mathcal{K}$  over i sig selv, således at integralet i (7) kan skrives

$$\prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta\alpha_i)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathcal{K}} \prod_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2}(1 + \beta\alpha_i)x_i^2 \right] d(x_i\sqrt{1+\beta\alpha_i}) \right\} \quad (9)$$

Hvis  $\mathcal{K}$  erstattes med  $\mathbb{R}^{n-1}$  bliver integralet i (9) åbenbart 1. Vi kunne derfor fra starten have valgt cylinderen  $\mathcal{E}$ 's radius og dermed kuglen  $\mathcal{K}$ 's radius så stor, at integralet i (9) afviger vilkårligt lidt fra 1. Hermed har vi vist, at

$$P(X \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}) \sim \Phi(-\gamma\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta\alpha_i)^{-1/2} \quad (10)$$

for  $\gamma \rightarrow \infty$ . Det ses, at højre side af (10) er uafhængig af valget af  $\mathcal{E}$ . Tallene  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$  kan vi identificere ved brug af (1) på formen

$$x_n = \beta + \frac{1}{2}(\alpha_1 x_1^2 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1}^2) + o(z'z) \quad (11)$$

Vi ser, at

$$\alpha_i = \left[ \frac{\partial^2 x_n}{\partial x_i^2} \right]_{z=0} = -\kappa_i \quad (12)$$

hvor  $\kappa_i$  er den ite hovedkrumning i det mest centrale punkt på den grænsetil-

standsfladen. Det bemærkes, at fortegnet er valgt således, at positive hovedkrumninger svarer til lokal konveksetet af den sikre mængde.

Resultatet (10) tillader ikke den slutning, at man kan erstatte venstre side af (10) med  $P(\mathbf{X} \in \mathcal{F})$  hvor  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$ . Der kan dog gives et mere omfattende bevis for, at formlen også gælder for  $P(\mathbf{X} \in \mathcal{F})$ . For vor praktiske brug af formlen har dette mindre betydning. Vi kan nemlig altid forestille os, at  $\mathcal{F}$  er valgt med så stor radius, at  $P(\mathbf{X} \in \mathcal{F} \cap \mathcal{E}^c)$  er meget mindre end højre side af (10) inden for det i praksis relevante værdiområde for  $\beta$ . Hertil kommer, at resultatet kun er et asymptotisk resultat for hvilket fejlen for endelige værdier af  $\beta$  er ukendt. Det illustrerer imidlertid klart den fundamentale betydning af det geometriske sikkerhedsindeks og af grænsetilstandsfladens krumnings-egenskaber i det mest centrale grænsetilstandspunkt.

Det er yderligere værd at bemærke, at det generaliserede sikkerhedsindeks, som vi her vil betegne ved  $\beta_G$ , asymptotisk er lig med det geometriske sikkerhedsindeks  $\gamma\beta$  for  $\gamma \rightarrow \infty$ . Vi har nemlig ifølge højre side af (10), at

$$\Phi(-\beta_G) = k\Phi(-\gamma\beta) \quad (13)$$

hvor  $k$  er produktfaktoren i (10), og hvor vi har ladet  $\beta_G$  svare til den formelle sandsynlighed på højre side af (10). Det følger af (13), at  $\beta_G \rightarrow \infty$  for  $\gamma \rightarrow \infty$ . Lad os antage, at  $k > 1$ . Da gælder, at  $\gamma\beta/\beta_G > 1$  under hele grænseovergangen. Lad os yderligere antage, at det ikke gælder, at  $\gamma\beta/\beta_G \rightarrow 1$  for  $\gamma \rightarrow \infty$ . Da findes et  $\epsilon > 0$  og en følge  $\gamma_1, \gamma_2, \dots \rightarrow \infty$  således at  $\gamma_i\beta/\beta_G > 1 + \epsilon$  for alle  $i$ . Benyttes (3) på (13) fås

$$\frac{\gamma\beta}{\beta_G} \sim k \frac{\varphi(\gamma\beta)}{\varphi(\beta_G)} = k \exp\left\{-\frac{1}{2}\beta_G^2 \left[\left(\frac{\gamma\beta}{\beta_G}\right)^2 - 1\right]\right\} \quad (14)$$

For følgen  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$  konvergerer højre side af (14) mod 0 medens venstre side er større end 1. Dette er en modstrid, og vi kan altså slutte, at

$$\beta_G \sim \gamma\beta \quad (15)$$

asymptotisk for  $\gamma \rightarrow \infty$ . Et tilsvarende argument kan anvendes for  $k < 1$ . Det følger nu af (14), at

$$0 \sim 2\log k - [(\gamma\beta)^2 - \beta_G^2] \quad (16)$$

eller

$$\beta_G^2 \sim (\gamma\beta)^2 + \log\left(\frac{1}{k}\right)^2 = (\gamma\beta)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} \log(1 - \beta\kappa_i) \quad (17)$$

Hvis  $\beta\kappa_i \ll 1$  for alle  $i = 1, \dots, n-1$  fås heraf

$$\beta_G \sim \gamma\beta \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2\beta} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i} \approx \gamma\beta - \frac{1}{2\gamma} \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \quad (18)$$

asymptotisk for  $\gamma \rightarrow \infty$ , hvor  $\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i$  er første krumningsinvariant i det mest centrale punkt på grænsetilstandsfladen, dvs på den flade, der svarer til  $\gamma = 1$ . Denne krumningsinvariant er lig med sporet i matricen  $-A$ , se (12) og (8).

Formlerne (17) eller (18) kan benyttes til en bedømmelse af den nøjagtighed, hvormed det geometriske sikkerhedsindeks tilnærmer det generaliserede sikkerhedsindeks, når grænsetilstandsfladen er 2 gange differentiabel i en omegn af det mest centrale punkt. Vi kan også bruge (18) til at præcisere udtrykket "næsten plan" grænsetilstandsflade. Vedtager vi for eksempel, at  $\beta_G$  er tilstrækkeligt nøjagtigt bestemt, hvis fejlen højst er ca 5% af det geometriske sikkerhedsindeks, kan vi karakterisere grænsetilstandsfladen som værende næsten plan, hvis

$$\left| \sum_{i=1}^{n-1} \beta\kappa_i \right| \leq \frac{(\gamma\beta)^2}{10} \quad (19)$$

Da venstre side af denne ulighed er uafhængig af  $\gamma$ , vil mængden af grænsetilstandsflader, der er næsten plane, vokse med det geometriske sikkerhedsindeks  $\gamma\beta$ .

Metoder til beregning af svigtsandsynligheder og generaliserede sikkerhedsindeks uden korrektion for krumning af grænsetilstandafladen i det mest centrale punkt betegnes ofte under forkortelsen FORM (First Order Reliability Method). Metoder, der medtager krumningskorrektionen, betegnes tilsvarende under forkortelsen SORM (Second Order Reliability Method). Hvis kun det globalt mest centrale grænsetilstandspunkt indgår i beregningen, kan man karakterisere metoderne som "enkelt punkt FORM" eller "enkelt punkt SORM".

**Bemærkning 6.3** For en plan kurve givet ved ligningen  $g(x_1, x_2) = 0$ , hvor  $g$  er to gange differentiable, kan krumningen i et vilkårligt punkt bestemmes af formlen

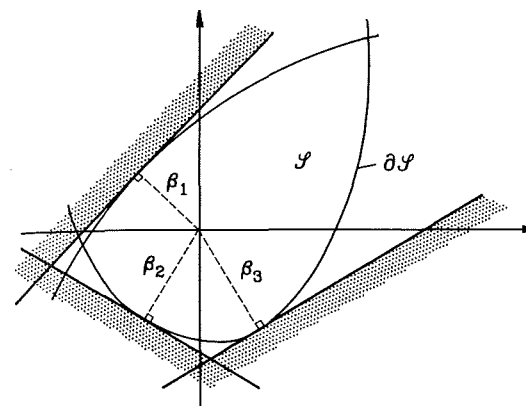
$$\kappa = - \frac{g_{,11}g_{,1}^2 - 2g_{,12}g_{,1}g_{,2} + g_{,22}g_{,2}^2}{(g_{,1}^2 + g_{,2}^2)^{3/2}} \quad (20)$$

I praktiske sikkerhedsanalyseproblemer er grænsetilstandsfladerne for de enkelte svigtmåder ofte næsten plane, således at det er tilstrækkeligt nøjagtigt at anvende FORM. Når krumningen spiller en rolle, er det hyppigst kun med hensyn til nogle få af de indgående inputvariable. Hvis det kun drejer sig om to af inputvariablene kan (20) anvendes til udregning af krumningskorrektionsfaktoren i (10) eller (18) med  $\gamma = 1$ .

I datamatprogrammer for SORM-analyser udregnes såvel afledede af  $g$  som krumningen sædvanligvis ved numeriske metoder. Sådanne udregninger kan være mindre nøjagtige. En formel som (20) er derfor også nyttig til kontrol af datamatprogrammet.  $\square$

### 6.5 Polyhedral approximation til vilkårlige sikre mængder (flerpunkt FORM eller SORM)

Det kan frembyde store beregningsmæssige vanskeligheder at udregne integralet i (6.2.6) for vilkårlige sikre mængder  $\mathcal{S}$ . Det er derfor nærliggende at søge at approksimere  $\mathcal{S}$  med en simple mængde, for hvilken beregningen kan gennemføres med færre vanskeligheder. Resultaterne i de to foregående

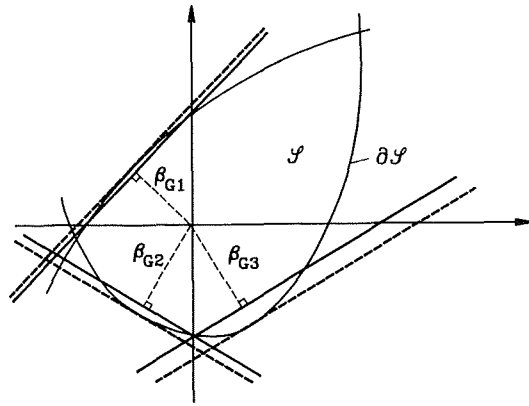


Figur 6.8. Flerpunkt FORM.

afsnit indbyder til at benytte konvekse polyhedrale mængder, hvis sider er tangerende hyperplaner til grænsetilstandsfladen  $\partial\mathcal{S}$  i et eller flere af de lokalt mest centrale punkter på  $\partial\mathcal{S}$ . Brugen af netop disse punkter som tangentpunkter sikrer konveksiteten af den polyhedrale mængde, der afgrænses af de tangerende hyperplaner, se figur 6.8.

Vi har set i de forrige afsnit, at de væsentligste bidrag til svigtsandsynligheden kommer fra omegnene af de lokalt mest centrale grænsetilstandspunkter, når blot afstandene fra nulpunktet i det standardiserede Gaussiske rum til disse punkter er passende store. Denne situation er snarere den sædvanlige end speciel i bærende konstruktioners sikkerhed. Det må derfor forventes, at den her omtalte polyhedrale approksimation ofte vil give sikkerhedsindeksværdier af tilstrækkelig nøjagtighed for praktiske formål. Denne approksimationsmetode kan man karakterisere ved betegnelsen "flerpunkt FORM".

Hvis krumningerne af grænsetilstandsfladen i de lokalt mest centrale punkter er så store, at forudsætningen om næsten planhed er mindre god, kan en noget bedre approksimerende konveks polyhedral mængde konstrueres ved at parallelforskyde siderne i den ovenfor konstruerede polyhedrale mængde netop så meget, at afstandene fra nulpunktet til de ny hyperplaner er lig med de lokale generaliserede sikkerhedsindices bestemt ved (6.4.17) eller (6.4.18). Denne metode kan karakteriseres ved betegnelsen "flerpunkt SORM".



Figur 6.9. Flerpunkt SORM.

Mulighederne for uden brug af Monte Carlo simulering at kontrollere nøjagtigheden af de resultater, der opnås ved de i dette og forrige afsnit omtalte approksimationer, er begrænset til særligt simple eksempler, hvor analytisk eller numerisk integration kan gennemføres. Monte Carlo simulering kommer derved på trods af stor regnetid til at indtage en afgørende rolle som kontrolredskab ved udvikling af hurtigere approksimative metoder. Dette emne behandles i kapitel 9.

### 6.6 Polyhedral approksimation i singulære punkter på grænsetilstandsfladen (enkelt punkt multipel FORM eller SORM)

Ofte er visse punkter på grænsetilstandsfladen singulære i den forstand, at de er skæringspunkter mellem flere differentiable flader  $\partial\mathcal{S}_1, \dots, \partial\mathcal{S}_m$ . Mængderne  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$  opbygger den sikre mængde  $\mathcal{S}$  for eksempel som fællesmængden

$$\mathcal{S} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{S}_i \quad (1)$$

medens svigt mængden er foreningsmængden

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i \quad (2)$$

hvor  $\mathcal{F}_i$  er komplementærmængden til  $\mathcal{S}_i$ . Denne situation foreligger, hvis grænsetilstanden overskrides, når blot en af hændelserne  $\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_m$  indtræder. Dette svarer til, at en række forskellige elementer samvirker som et seriesystem (kædesystem) i den forstand, at svigt af systemet indtræder, når blot eet af elementerne svigter, altså når blot eet led i kæden svigter. (Disse elementer er ikke nødvendigvis materielle, men kan for eksempel være kollapsmekanismer, se eksempel 6.4. De konvekse polyhedrale mængder betragtet i det foregående svarer til et sådant seriesystem, hvor hyperplanerne, der definerer siderne, er elementerne.)

Det er let at indse, at hvis  $\partial\mathcal{S}_1, \dots, \partial\mathcal{S}_m$  er differentiable flader, da kan ingen singulære punkter på  $\partial\mathcal{S}$ , hvor  $\mathcal{S}$  er defineret ved fællesmængden (1), være lokalt mest centrale punkter. Derimod kan dette godt være tilfældet, hvis  $\mathcal{S}$  er defineret som foreningsmængden

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{S}_i \quad (3)$$

således at svigt mængden bliver fællesmængden

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_i \quad (4)$$

Denne definition af  $\mathcal{S}$  svarer til, at de enkelte elementer samvirker som et parallelsystem. Svigt af systemet kræver, at alle elementer svigter. Vi skal ikke her komme yderligere ind på systembetragtninger, som naturligvis spiller en væsentlig rolle for vurderingen af statistisk ubestemte konstruktioners sikkerhed. Dette vigtige emne gives en indledende behandling i kapitel 14.

Lad os antage, at  $q$  af de  $m$  grænsetilstandsflader  $\partial\mathcal{S}_1, \dots, \partial\mathcal{S}_m$  har en ikke tom fællesmængde, og lad os for simpelhedens skyld antage, at de svarer til de  $q$  første indices. Vi vil betegne mængden

$$\mathcal{K} = \partial\mathcal{S}_1 \cap \dots \cap \partial\mathcal{S}_q \quad (5)$$



som en kant af  $\mathcal{S}$  (eller af  $\mathcal{F}$ ). Vælg et punkt  $x \in \mathcal{K}$  og erstat  $\partial \mathcal{S}_i$  med tangenthyperplanen  $\partial H_{ix}$  til  $\partial \mathcal{S}_i$  i  $x$  og lad  $H_{ix}$  være det af  $\partial H_{ix}$  afgrænsede halvrum, der approksimerer  $\mathcal{S}_i$  for  $i = 1, \dots, q$ . I et gaussisk rum fører ombytning af

$$\bigcap_{i=1}^q \mathcal{S}_i \quad \text{med} \quad \bigcap_{i=1}^q H_{ix} \quad (6)$$

da til approksimationen

$$P\left[\bigcap_{i=1}^q \mathcal{S}_i\right] \approx \Phi_q(-\beta; \rho[\mathbf{M}, \mathbf{M}']) \quad (7)$$

hvor  $\Phi_q$  er fordelingsfunktionen for den  $q$ -dimensionale normale fordeling. I (7) er  $\mathbf{M} = (M_{1x}, \dots, M_{qx})$  defineret som vektoren af de lineære sikkerhedsmargener, der svarer til de  $q$  tangenthyperplaner  $\partial H_{1x}, \dots, \partial H_{qx}$  i  $x$ , medens  $\beta$  er den tilsvarende vektor af simple sikkerhedsindeks.

Det mest centrale punkt på kanten  $\mathcal{K}$  vil sædvanligvis være et godt valg af approksimationspunktet  $x$ . Det bemærkes, at dette punkt i almindelighed ikke er et lokalt mest centralt punkt på  $\partial \mathcal{S}$ .

### 6.7 Historiske og bibliografiske noter

Dimensionsinvariansproblemet ved det geometriske sikkerhedsindeks blev påpeget af *D. Veneziano* i 1974 [6.10] og yderligere betragtet af *OD* i 1976 [6.3]. Det generaliserede sikkerhedsindeks blev foreslået af *OD* i 1979 [6.4].

Sandsynlighedsulighederne (6.3.12) blev givet først af statistikerne *E.G. Kounias* i 1968. Hans arbejde forblev imidlertid ukendt inden for konstruktions sikkerhed til gang i 1980'erne. De simple uligheder

$$\max_i P(\mathcal{S}_i) \leq P(\mathcal{S}) \leq \sum_{i=1}^m P(\mathcal{S}_i) \quad (1)$$

blev anvendt til bedømmelse af konstruktionssystemers sikkerhed af *C.A.*

*Cornell* i 1967, [6.2]. I en del relevante tilfælde er disse simple grænser ret langt fra hinanden, et forhold der motiverede opstillingen af grænserne i (6.3.12). Uafhængigt af hinanden offentliggjorde *E. Vanmarcke* [6.9] og *D. Hunter* [6.7] begge i 1977 den øvre sandsynlighedsgrænse, medens den nedre grænse blev formuleret af *OD* i 1979 [6.5]. Grænsernes store anvendelighed inden for bærende konstruktioners sikkerhed blev demonstreret af *OD* og siden hen af mange andre forskere i en lang række forskelligartede eksempler.

Det vigtige asymptotiske resultat (6.4.10) er givet af *K. Breitung* i 1984 [6.1]. Approksimationen (6.6.7) er foreslået af *M. Hohenbichler* i 1984, [6.6]. Disse arbejder blev udført medens de pågældende personer var knyttet til en forskergruppe ved Technische Universität München under ledelse af *R. Rackwitz*. Det var også her, man fandt *Kounias'* arbejde fra 1968.

### Referencer

- 6.1 *K. Breitung*: Asymptotic Approximations for Multinormal Integrals. *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.110, 1984.
- 6.2 *C.A. Cornell*: Bounds on the Reliability of Structural Systems. *Journal of Struct. Mech. Division*, ASCE, vol.93, 1967.
- 6.3 *O. Ditlevsen*: *A Collection of Notes Concerning Structural Reliability*. Proc. Second Int. Workshop on Definition, Classification and Evolution of Code Formats, Mexico City, 1976, DIALOG 2-76, Danish Engineering Academy, Lyngby, Denmark.
- 6.4 *O. Ditlevsen*: Generalized Second Moment Reliability Index. *Journal of Structural Mechanics*, vol.7, 1979.
- 6.5 *O. Ditlevsen*: Narrow Reliability Bounds for Structural Systems. *Journal of Structural Mechanics*, vol.7, 1979.
- 6.6 *M. Hohenbichler*: An Asymptotic Formula for the Probability of Intersections. *Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke*, Heft 69, LKI, Technische Universität, München, 1984.
- 6.7 *D. Hunter*: Approximating Percentage Points of Statistics Expressible as Maxima. *TIMS Studies in the Management Sciences*, vol.7, 1977, North Holland Publ. Comp.

- 6.8 E.G. Kounias: Bounds for the Probability of a Union, with Applications. *Ann. Math. Stat.*, vol.39, 1968.
- 6.9 E.H. Vanmarcke: Matrix Formulation of Reliability Analysis and Reliability-Based Design. *Computers & Structures*, vol.3, 1977.
- 6.10 D. Veneziano: *Contributions to Second Moment Reliability Theory*. Res. Rept. R74-33, Dept. of Civil Eng., MIT, Cambridge, USA, 1974.

## 7. TRANSFORMATION

### 7.1 Informationsmæssig usymmetri

Det generaliserede sikkerhedsindeks blev i forrige kapitel defineret på naturlig måde under den forudsætning, at den eneste til rådighed værende information om inputvariablene  $\mathbf{x}$  er deres andenmomentrepræsentation. Et fundamentalt vilkår for definitionen er informationsmæssig rotationssymmetri i det normaliserede rum. Både i teori og i praksis vil der sædvanligvis være mere information af høj kvalitet til rådighed end alene andenmomentrepræsentationen af  $\mathbf{X}$ . Mest åbenbar er symmetriforstyrrende restriktioner, som er opfyldt af logisk nødvendighed eller af fysiske grunde. Næsten enhver fysisk størrelse er begrænset opadtil eller nedadtil eller begge dele. Ofte er negative værdier udelukket som værende i strid med størrelsens definition. Eksempelvis har negative trækstyrker ingen mening i sædvanlig modellering af mekaniske fænomener.

Det er dog i mange tilfælde kun af lille praktisk betydning, at der begås en modelfejl ved at antage, at den mekaniske models definitionsområde er hele  $\mathbb{R}^n$  på trods af de fysiske kendsgerninger. Dette skyldes, at definitionsområdets rand i sådanne tilfælde er langt væk fra nulpunktet i det normaliserede rum i sammenligning med afstanden til den relevante grænsetilstandsflade.

Det er åbenbart, at eksistensen af en rand på definitionsområdet i almindelighed forhindrer den informationsmæssige rotationssymmetri med hensyn til nulpunktet. Hvis definitionsområdet er passende regulært, er det imidlertid i princippet muligt at repræsentere den mekaniske model og det betragtede  $n$ -dimensionale grænsetilstandsproblem ved hjælp af et nyt sæt variable  $\mathbf{y}$ , som uden restriktioner kan antage værdier overalt i  $\mathbb{R}^n$ . Dette variabelsæt  $\mathbf{y}$  fremkommer ved en passende enetydig kontinuert afbildning  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$  af inputvariablene  $\mathbf{x}$  over i  $\mathbf{y}$ , hvor transformationen  $T$  er valgt således, at billedet af definitionsområdet er hele  $\mathbb{R}^n$ . Billedrummet  $\mathbb{R}^n$  belægges formelt med den normalfordelingstæthed, der svarer til andenmomentrepræsentationen for den stokastiske transformerede vektor  $\mathbf{Y} = T(\mathbf{X})$ . Denne andenmomentrepræsentation er imidlertid ukendt, hvorimod andenmomentrepræ-

sentationen ( $E[X]$ ,  $\text{Cov}[X, X']$ ) af inputvariablene  $X$  er kendt. Man må derfor bestemme ( $E[Y]$ ,  $\text{Cov}[Y, Y']$ ) således, at den anvendte transformation  $X = T^{-1}(Y)$  transformerer normalfordelingstætheden i  $y$ -rummet over i en formel tæthed i  $x$ -rummet, der svarer til den kendte middelværdivektor  $E[X]$  og den kendte kovariansmatrix  $\text{Cov}[X, X']$ . Efter normalisering af  $y$ -rummet, så det bliver standard gaussisk, er vi tilbage i den informationsmæssige rotations-symmetriske situation. Vi kan derfor definere det generaliserede sikkerhedsindeks på grundlag af grænsetilstandsfladens repræsentation i  $y$ -rummet.

**Eksempel 7.1** Den mest almindelige situation er den, hvor en eller flere af variablene i  $X$  kun kan antage positive værdier. Hvis  $X$  er en sådan variabel, kan man for eksempel anvende en logaritmisk transformation, og antage, at  $\log X$  er normalfordelt. Der gælder da følgende transformationsformler

$$E[\log X] = \log E[X] - \frac{1}{2} \log(1 + V_X^2) \quad (1)$$

$$\text{Var}[\log X] = \log(1 + V_X^2) \quad (2)$$

hvor

$$V_X = \frac{D[X]}{E[X]} \quad (3)$$

er variationskoefficienten af  $X$ . Hvis  $V_X^2 \ll 1$  har man

$$E[\log X] \simeq \log E[X] \quad (4)$$

$$D[\log X] \simeq V_X \quad (5)$$

Hvis både  $X$  og  $Y$  er variable, der transformeres logaritmisk, har man

$$\text{Cov}[\log X, \log Y] = \log \left[ 1 + \frac{\text{Cov}[X, Y]}{E[X]E[Y]} \right] = \log(1 + \rho[X, Y] V_X V_Y) \quad (6)$$

som for  $V_X V_Y \ll 1$  giver tilnærmelserne

$$\text{Cov}[\log X, \log Y] \simeq \rho[X, Y] V_X V_Y \quad (7)$$

$$\rho[\log X, \log Y] \simeq \rho[X, Y] \quad (8)$$

Hvis kun  $X$  transformeres, fås

$$\text{Cov}[\log X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{E[X]} = \rho[X, Y] V_X D[Y] \quad (9)$$

$$\rho[\log X, Y] = \rho[X, Y] \frac{V_X}{\sqrt{\log(1 + V_X^2)}} \quad (10)$$

$$\simeq \rho[X, Y] \text{ for } V_X^2 \ll 1 \quad (11)$$

□

Ved teoretiske betragtninger alene er det med det forudsatte informations-niveau ikke muligt at angive principper, der viser, hvorledes transformationen  $T$  kan vælges på entydig måde. Kun simpelhedskriterier synes at kunne pege på fornuftige valg. For praktisk brug må standardiserede transformationer derfor nødvendigvis foreskrives af en hertil bemyndiget normgivende organisation.

Situationen er anderledes, hvis der ud over andenmomentinformation og information om definitionsmæssige og fysiske restriktioner foreligger fordelingsmæssig information. Hvis denne er fuldstændig, vil det være et rimeligt krav at forlange, at transformationen  $T$  skal være netop den, der fører den givne sandsynlighedsfordeling for  $X$  over i en standardiseret normalfordeling for  $Y$ .

Denne fuldstændige informationstilstand er en idealtilstand, som næppe forekommer ofte i praksis. Sædvanligvis er den påståede sandsynlighedsfordeling udvalgt fra en stor klasse af fordelinger ved sammenligning med og tilpasning til givne stikprøvedata for eksempel givet i form af histogrammer. Der er derfor et tilbageværende problem om arbitrært valg af fordelingsstype. Dette problem kan ikke negligeres, når anvendelsesområdet er bærende konstruktioners sikkerhed. Dette belyses i det følgende eksempel.

**Eksempel 7.2** To ingeniører har hver især fået til opgave at dimensionere et stålkabel således, at sikkerheden mod trækbrud er fastlagt ved et sikkerhedsindeks på  $\beta = 4.75$ . Det er forudsat, at kablet kan fremstilles således, at det med stor sikkerhed har en foreskrevet trækbrudkraft  $R$ . Derimod er lasten  $S$  usikkert kendt. Ingeniørerne får kun forelagt en stikprøve af mulige lastværdier uden fordelingsspecifikationer.

Den ene ingeniør tilpasser en normalfordeling til de givne data for  $S$ , medens den anden ingeniør vælger at tilpasse en logaritmisk normalfordeling, dvs han transformerer de givne data logaritmisk til data for  $\log S$ , og antager at  $\log S$  er normalfordelt. Stikprøven udviser ikke klare tegn på, at den ene fordeling bør foretrækkes for den anden, dvs ingen af hypoteserne kan afvises ved brug af statistiske testmetoder. De to ingeniører tilforordner samme andenmomentrepræsentation til  $S$ .

De to modstridende fordelingsantagelser leder til, at trækbrudstyrken skal være henholdsvis  $R_N$  og  $R_{LN}$ , hvor

$$R_N = E[S] (1 + \beta V_S) \quad (12)$$

$$\log R_{LN} = E[\log S] (1 + \beta V_{\log S}) \quad (13)$$

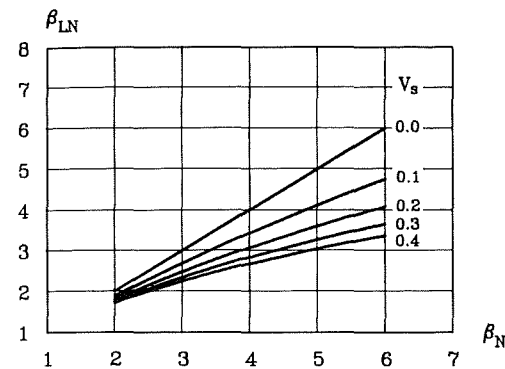
Fra formlerne (1) og (2) følger da, at

$$\frac{R_N}{R_{LN}} = (1 + \beta V) \sqrt{1 + V^2} e^{-\beta \sqrt{\log(1 + V^2)}} \quad (14)$$

hvor  $V = V_S$ . For  $\beta = 4.75$  og  $V_S = 0.1, 0.2, 0.3$  finder man, at dette forhold er henholdsvis 0.92, 0.78, 0.63. De to ingeniører får altså helt forskellige resultater alene på grund af arbitrære antagelser. Dette illustrerer det såkaldte "halefølsomhedsproblem".

Problemet opstår naturligvis, fordi foreskrivelse af en værdi for sikkerhedsindekset er utilstrækkelig uden en samtidig angivelse af den matematiske model, hvortil sikkerhedsindeksets definition er knyttet. Sikkerhedsindeksværdier svarende til forskellige modeller kan kun sammenlignes, hvis de omregnes via deres konstruktionsmæssige konsekvenser. Hvis vi i (12) og (13) erstatter  $\beta$  med henholdsvis  $\beta_N$  og  $\beta_{LN}$  fås, at  $\beta_N$  er ækvivalent med  $\beta_{LN}$  i

sikkerhedsmæssig henseende hvis og kun hvis  $R_N = R_{LN}$ , dvs hvis og kun hvis



Figur 7.1. Ækvivalente sikkerhedsindeks  $\beta_N$  og  $\beta_{LN}$  svarende til henholdsvis den normale og den logaritmisk normale fordelingsmodel.

$$\beta_{LN} = \frac{\log[(1 + \beta_N V) \sqrt{1 + V^2}]}{\sqrt{\log(1 + V^2)}} \quad (15)$$

Denne relation mellem  $\beta_N$  og  $\beta_{LN}$  er afbildet i fig. 7.1. Brug af relationen er et simpelt eksempel på en anvendelse af konsekvensberegningsskemaet til kalibrering af en sikkerhedsindeksskala mod en anden sikkerhedsindeksskala. □

Da tilpasning af fordelinger til målte data kun sjældent kan fjerne problemet om arbitrært modelvalg, er det nødvendigt, at normer for praktisk beslutningstagen vedrørende konstruktionsprojektering entydigt foreskriver de fordelingstyper (eller transformationer), der skal bringes i anvendelse for forskellige typer af relevante inputvariable. På denne måde vil sikkerhedssammenligninger i praksis kun blive påvirket af andenmomentinformation (eller mere liberalt af nte momentinformation). Sådant information er almindeligvis langt mindre fortegnet af "falsk" information fra arbitrær og uverificerbar modeldannelse end information om fordelingshæler, der strækker sig langt uden for de af data dækkede centrale områder af fordelingerne.

Det bør altså være en af et normudvalgs vigtigste opgaver at sammenfatte eksisterende viden om de basale inputvariables fordelinger og udmønte denne viden i passende standardiseringer uden hensyntagen til rimelige simpelhedsprincipper. Det er, som nævnt ovenfor, vigtigt at bemærke sig, at ligegyldigt hvilken form den resulterende normformalisme gives, da må den være konstrueret således, at individuelle ingeniørmæssige beslutninger udledt af normen kun påvirkes af andenmomentinformation (nte momentinformation). Dette er den bærende filosofi bag definitionen af det generaliserede sikkerhedsindeks.

Så længe sådanne autoriserede normer ikke eksisterer, må praktiske anvendelser af sikkerhedsindekset støttes på konsekvensberegningsskemaet snarere end på sammenligning af de udregnede svigtsandsynligheder med beregnede eller statistisk observerede sandsynligheder for uheldige hændelser af en helt anden natur end dem, der vedrører den betragtede type grænsetilstande for bærende konstruktioner (fx trafikulykker, dødsfald forårsaget af tobaksrygning, etc), se også bemærkningerne om modeludvikling i det lange løb i afsnittet om objektivitetsproblemet i kapitel 3.

## 7.2 Nogle vigtige transformationer

I dette afsnit vil vi se nøjere på de vigtigste transformationer fra rummet af inputvariable  $x$ , som vi vil kalde det frie fysiske formuleringsrum ("frie" fordi inputvariablene er frie variable), til det standardiserede gaussiske rum.

En simpel klasse af transformationer er defineret ved ligningerne

$$\Phi(y_i) = F_i(x_i) \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (1)$$

hvor  $\Phi$  er den standardiserede normale fordelingsfunktion, medens  $F_1, \dots, F_n$  er absolut kontinuerte og voksende fordelingsfunktioner. (En fordelingsfunktion siges at være *absolut kontinuert*, såfremt den kan udtrykkes som et integral af en tæthedsfunktion). Den i forrige afsnit omtalte logaritmiske transformation er et specielt eksempel på (1) med

$$F_i(x_i) = \Phi\left(\frac{\log x_i - a}{b}\right) \quad (2)$$

hvor  $a$  og  $b > 0$  er passende konstanter, der sikrer, at  $y$ -rummet bliver normaliseret. Transformationen (1) fremkommer, hvis man antager, at de stokastiske inputvariable  $X_1, \dots, X_n$  er indbyrdes uafhængige og har henholdsvis fordelingsfunktionerne  $F_1, \dots, F_n$ .

Hvis forudsætningen ikke kan opretholdes om, at  $X_1, \dots, X_n$  er uafhængige, vil den "marginale" transformation (1) anvendt på  $X_1, \dots, X_n$  føre til stokastiske variable  $Y_1, \dots, Y_n$ , der ikke er indbyrdes uafhængige. Hvis den forenede fordelingsstruktur af  $X = (X_1, \dots, X_n)$  er ukendt på nær kovariansmatricen  $\text{Cov}[X, X']$ , er det nærliggende at lade  $Y_1, \dots, Y_n$  have en  $n$ -dimensional normalfordeling med en korrelationsmatrix  $P_Y = \text{Cov}[Y, Y']$ , der konsistent med transformationen (1) svarer til den givne korrelationsmatrix  $P_X$ . Hermed induceres en bestemt  $n$ -dimensional sandsynlighedstæthed  $f_X(x_1, \dots, x_n)$  givet ved

$$f_X(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \varphi_n(y; P_Y) \quad (3)$$

hvor

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n)}{\varphi(y_1) \cdot \dots \cdot \varphi(y_n)} \quad (4)$$

er Jacobis funktionaldeterminant for transformationen (1), medens

$$\varphi_n(y; P_Y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det P_Y}} \exp\left[-\frac{1}{2} y' P_Y^{-1} y\right] \quad (5)$$

er den  $n$ -dimensionale normale tæthed svarende til middelværdierne 0, varianserne 1 og korrelationsmatricen  $P_Y$ .

Idet vi betegner korrelationskoefficienten mellem  $X_i$  og  $X_j$  ved  $r_{ij}$ , og indfører de normaliserede variable  $Z_i = (X_i - E[X_i])/D[X_i]$ , fås ligningen

$$r_{ij} = E[Z_i Z_j] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z_i z_j \varphi_2(y_i, y_j; \rho_{ij}) dy_i dy_j \quad (6)$$

til bestemmelse af korrelationskoefficienten

$$\rho_{ij} = \text{Cov}[Y_i, Y_j] \quad (7)$$

ved  $r_{ij}$ . Variablen  $z_i$  er udtrykt ved  $y_i$  gennem formlen

$$z_i = \frac{F_i^{-1}[\Phi(y_i)] - E[X_i]}{D[X_i]} \quad (8)$$

Det lader sig ikke altid gøre at bestemme en normalfordeling, der ved (6) gengiver de givne korrelationskoefficienter  $r_{ij}$ . Hvis disse er for tæt ved 1 eller  $-1$  kan det ske, at (6) ikke har en løsning. Det må også kræves, at den ved løsningerne  $\rho_{ij}$  til (6) bestemte matrix  $\{\rho_{ij}\}$  er ikkenegativ definit.

For at undgå besværet med at løse (6) er der blevet udviklet empiriske tilnærmelsesformler for forholdet

$$F = \frac{\rho_{ij}}{r_{ij}} \quad (9)$$

Disse formler er baseret på følgende egenskaber ved relationen mellem  $r = r_{ij}$  og  $\rho = \rho_{ij}$ :

1.  $\rho$  er en voksende funktion af  $r$ .
2.  $\rho = 0 \Leftrightarrow r = 0$
3.  $F \geq 1$
4. For givne marginale fordelinger er  $F$  en konstant, hvis den ene af marginalerne er normal, og  $F = 1$  hvis begge marginaler er normale.
5.  $F$  er invariant med hensyn til voksende lineære transformationer af  $X_i$  og  $X_j$ .
6.  $F$  er uafhængig af parametrene i en marginal 2-parameterfordeling, der ved lineær transformation kan reduceres til en parameterfri form.
7.  $F$  er en funktion af variationskoefficienten i en marginal 2-parameterfordeling, der ikke kan reduceres til en parameterfri form.

Vi vil forbigå beviserne for disse egenskaber og blot henvide til [7.2]. Tilnærmelsesformlerne for  $F$  er sammenstillet i appendiks 2. Fordelingen defineret ved (3) med (4) indsat er i litteraturen blevet kaldt *Natafs fordeling* (se iøvrigt eksempel 7.4).

Hvis en fuldstændig fordelingsbeskrivelse for  $\mathbf{X}$  er givet i form af den forenede fordelingsfunktion

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = F_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (10)$$

kan en transformation defineres ved successiv betingning:

$$\begin{aligned} \Phi(y_1) &= F_{X_1}(x_1) \\ \Phi(y_2) &= F_{X_2}(x_2 | X_1 = x_1) \\ \Phi(y_3) &= F_{X_3}(x_3 | X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &\vdots \\ \Phi(y_n) &= F_{X_n}(x_n | X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \end{aligned} \quad (11)$$

hvor det forudsættes, at alle de betingede fordelingsfunktioner er absolut kontinuerte. For at indse at denne enetydige transformation fører  $\mathbf{X}$  over i en standardiseret gaussisk stokastisk vektor  $\mathbf{Y}$ , behøver vi kun at bemærke, at Jacobis funktionaldeterminant i identiteten

$$f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = f_{X_1, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_n) \quad (12)$$

følger af ligningen

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \varphi(y_1) \cdot \dots \cdot \varphi(y_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2 | x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_n}(x_n | x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (13)$$

der fremkommer ved opskrivning af differentiallet  $dy$  af transformationen (11). Da funktionalmatricen er en nedre triangulær matrix, bliver funktionaldeterminanten produktet alene af diagonalelementerne. Da højre side af (13) netop er højre side af (12), ses ved bortforkortning af funktionaldeterminanten, at  $f_{Y_1, \dots, Y_n}(y_1, \dots, y_n) = \varphi(y_1) \cdot \dots \cdot \varphi(y_n)$ , altså at  $\mathbf{Y}$  er standardiseret gaussisk.

Transformationen (1) fremkommer som et specialtilfælde af (11), der i litteraturen om bærende konstruktioners sikkerhed ofte kaldes *Rosenblatttransformationen*. I (11) er den successive betingning taget i variabelenes arbitrære orden. Enhver af de  $n!$  forskellige måder at ordne de variable på giver en Rosenblatttransformation.

**Eksempel 7.3** Lad  $(X_1, X_2)$  have tæthedsfunktionen

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = (x_1 + x_2 + x_1 x_2) e^{-(x_1 + x_2 + x_1 x_2)}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (14)$$

Den marginale tæthedsfunktion af  $X_1$  er

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \int_0^\infty f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) dx_2 = \\ &= e^{-x_1} \left[ x_1 \int_0^\infty e^{-(1+x_1)x_2} dx_2 + (1+x_1) \int_0^\infty x_2 e^{-(1+x_1)x_2} dx_2 \right] = \\ &= e^{-x_1} \left[ \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{1+x_1}{(1+x_1)^2} \right] = e^{-x_1}, \quad x_1 \in \mathbb{R}_+ \end{aligned} \quad (15)$$

der er tætheden for en eksponentialfordeling med parameteren 1. Dette resultat bekræfter, at (14) er en tæthedsfunktion. Den betingede tæthed af  $X_2$  givet  $X_1 = x_1$  er da

$$f_{X_2}(x_2|x_1) = \frac{f_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_1}(x_1)} = (x_1 + x_2 + x_1 x_2) e^{-(1+x_1)x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (16)$$

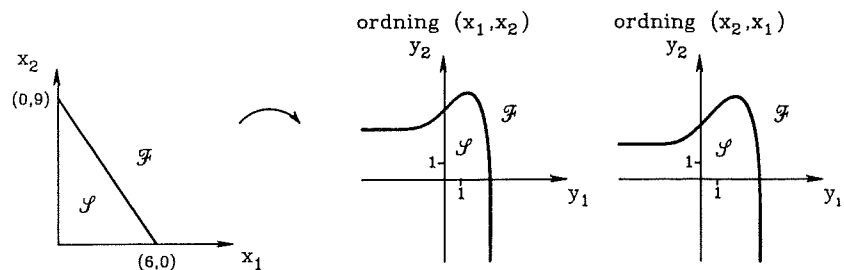
med tilhørende fordelingsfunktion

$$F_{X_2}(x_2|x_1) = \int_0^{x_2} (x_1 + z + x_1 z) e^{-(1+x_1)z} dz = 1 - (1+x_2) e^{-(1+x_1)x_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2 \quad (17)$$

Rosenblatttransformationen svarende til ordningen  $(x_1, x_2)$  bliver da

$$\begin{aligned} y_1 &= \Phi^{-1}(1 - e^{-x_1}) \\ y_2 &= \Phi^{-1}[1 - (1+x_2) e^{-(1+x_1)x_2}] \end{aligned} \quad (18)$$

På grund af symmetrien i (14) mellem  $x_1$  og  $x_2$  fås den til ordningen  $(x_2, x_1)$  svarende Rosenblatttransformation ved ombytning af  $x_1$  og  $x_2$  i (18). Figur 7.2 viser billederne i  $\mathbf{y}$ -rummet af det rette liniestykke, der forbinder  $(0,9)$  og  $(6,0)$  i  $\mathbf{x}$ -rummet ved hver af de to Rosenblatttransformationer. Det rette liniestykke kan tænkes at repræsentere en simpel grænsetilstand i det frie fysiske formuleringsrum. Den ses at være langt fra at være repræsenteret ved en ret linie i det gaussiske formuleringsrum.  $\square$



Figur 7.2. Afbildninger ved Rosenblatttransformationerne defineret i eksempel 7.3.

**Eksempel 7.4** For fordelingen i eksempel 7.3 kan kovariansen mellem  $X_1$  og  $X_2$  udregnes direkte eller f.eksempel ved først at udregne

$$E[X_2|X_1] = \int_0^{\infty} [1-F_{X_2}(x_2|x_1)] dx_2 =$$

$$\int_0^{\infty} (1+x_2) e^{-(1+x_1)x_2} dx_2 = \frac{2+x_1}{(1+x_1)^2} \quad (19)$$

og dernæst benytte (4.3.25):

$$\text{Cov}[X_1, X_2] = \text{Cov}[X_1, E[X_2|X_1]] =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x(2+x)}{(1+x)^2} e^{-x} dx - 1 \cdot \int_0^{\infty} \frac{2+x}{(1+x)^2} e^{-x} dx \quad (20)$$

der kan udregnes til

$$\text{Cov}[X_1, X_2] = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{1+x} dx - 1 = e E_1(1) - 1 = -0.40366 \dots \quad (21)$$

hvor  $E_1(1) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$  er en værdi af det såkaldte exponentialintegral. Da  $\text{Var}[X_1] = \text{Var}[X_2] = 1$  fås altså korrelationskoefficienten  $r = -0.40366 \dots$ . Den tilsvarende Nataffordeling har tætheden

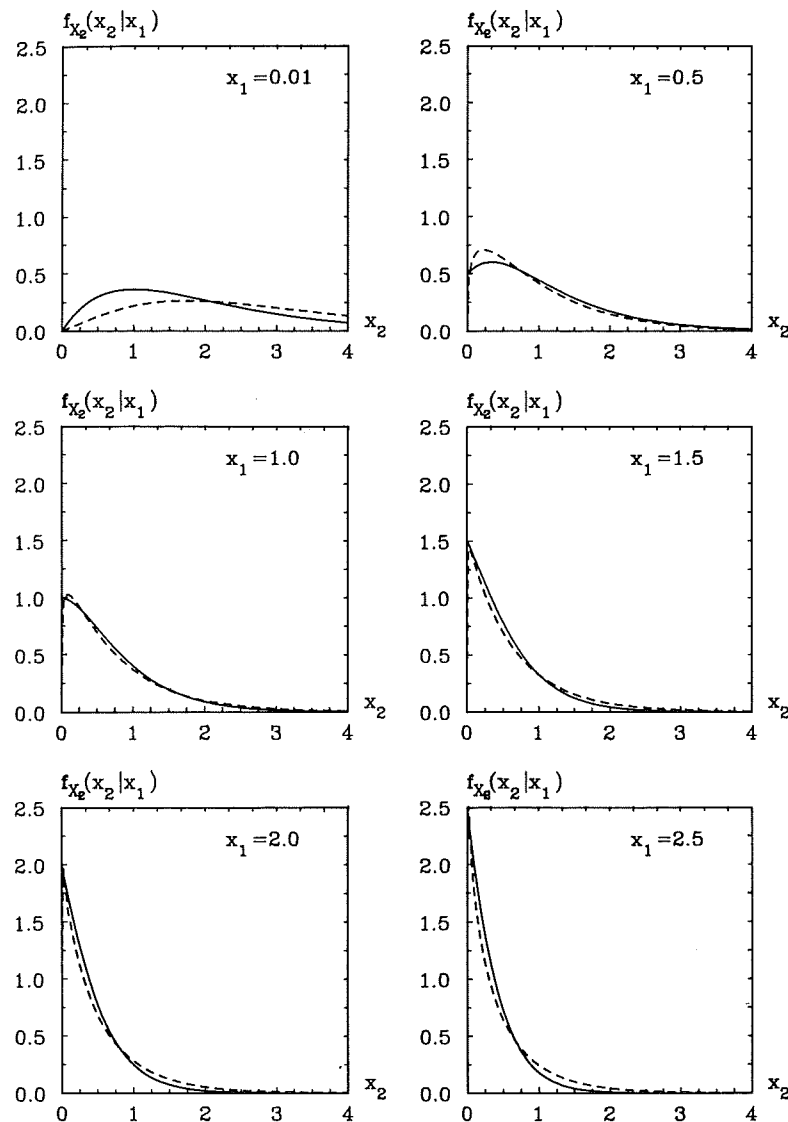
$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{e^{-(x_1+x_2)}}{\varphi(y_1)\varphi(y_2)} \varphi_2(y_1, y_2; \rho) \quad (22)$$

hvor  $\rho = F r \approx -0.447$  med faktoren  $F = 1.107$  taget fra tabellen i appendiks 2, og

$$y_1 = \Phi^{-1}(1 - e^{-x_1}) \quad (23)$$

$$y_2 = \Phi^{-1}(1 - e^{-x_2})$$

Figur 7.3 viser sammenligninger mellem de betingede tætheder  $f_{X_2}(x_2|x_1)$  for de to fordelinger for en række forskellige værdier af  $x_1$ . □



Figur 7.3. Betingede tætheder bestemt ved den todimensionale eksponentielle fordeling (7.2.14) (fuldt optrukne kurver) sammenlignet med de tilsvarende betingede tætheder fra den Nataffordeling der har de samme marginale fordelinger og korrelationskoefficient som den eksponentielle fordeling (punkterede kurver).



Det vil i praksis hyppigst være sådan, at fordelingen for  $X$  ikke er givet direkte ved fordelingsfunktionen (10), men derimod ved de betingede fordelingsfunktioner, der indgår i (11).

### 7.3 Om differentiable afbildninger og flader

Teorien for differentiable afbildninger og flader forudsættes bekendt fra den matematiske analyse. Vi vil dog her kort repetere nogle af de mest fundamentale begreber og egenskaber, som vi får brug for i det følgende.

Afbildningen  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , hvor  $\Omega$  er et område i  $\mathbb{R}^n$ , siges at være kontinuert differentiable, såfremt  $T$  har kontinuerte partielle afledede  $\partial y_i / \partial x_j$  overalt i  $\Omega$ . For vort formål behøver vi kun at betragte kontinuert differentiable afbildninger  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$  med funktionalmatricer  $\{\partial y_i / \partial x_j\}$ , der er regulære overalt i  $\Omega$ . Yderligere kan vi antage, at der til enhver betragtet afbildning  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  svarer en omvendt afbildning  $\mathbf{x} = T^{-1}(\mathbf{y})$ , der fører et vilkårligt punkt  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  over i et punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Den omvendte afbildning  $T^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$  er som  $T$  selv en kontinuert differentiable afbildning med regulær funktionalmatrix

$$A_{\mathbf{x}_0} = \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(\mathbf{y}_0) \right\} \quad (1)$$

i ethvert punkt  $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^n$ . Dens reciproke matrix  $A_{\mathbf{x}_0}^{-1}$  er funktionalmatricen for  $T$  i  $\mathbf{x}_0$ . Mellem differentialerne  $dx$  og  $dy$  dannet i  $\mathbf{x}_0$  gælder da relationerne

$$dx = A_{\mathbf{x}_0}^{-1} dy, \quad dy = A_{\mathbf{x}_0} dx \quad (2)$$

Den tilsvarende inhomogene lineære afbildning  $L_{\mathbf{x}_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  defineret ved

$$L_{\mathbf{x}_0} : \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + A_{\mathbf{x}_0}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \quad (3)$$

kaldes den berørende afbildning til  $T$  i punktet  $\mathbf{x}_0$ . Den omvendte inhomogene lineære afbildning  $L_{\mathbf{x}_0}^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  defineret ved

$$L_{\mathbf{x}_0}^{-1} : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + A_{\mathbf{x}_0}(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \quad (4)$$

er den berørende afbildning til  $T^{-1}$  i  $\mathbf{y}_0$ .

En flade i  $\mathbf{y}$ -rummet defineret ved en ligning af formen

$$g(\mathbf{y}) = 0 \quad (5)$$

hvor  $g$  er en differentiable funktion inden for sit definitionsområde, siges at være en differentiable flade, dersom vektoren af partielle afledede  $(g_{,1}(\mathbf{y}), \dots, g_{,n}(\mathbf{y}))$  er forskellig fra nulvektoren overalt på fladen. Hvis  $g(\mathbf{y})$  opfattes som et skalarfelt i  $\mathbf{y}$ -rummet, er vektoren af partielle afledede det samme som gradientvektoren

$$\text{grad } g = \nabla g = (g_{,1}, \dots, g_{,n}) \quad (6)$$

og den står vinkelret på fladen givet ved (5) (da  $dg = g_{,1} dy_1 + \dots + g_{,n} dy_n = 0$  for  $(dy_1, \dots, dy_n)$  tangentielt til fladen).

Den kontinuert differentiable afbildning  $T^{-1}$  fører den differentiable flade givet ved (4) over i en flade i  $\mathbf{x}$ -rummet defineret ved ligningen

$$G(\mathbf{x}) = 0 \quad (7)$$

hvor

$$G(\mathbf{x}) = g(T(\mathbf{x})) \quad (8)$$

har de kontinuerte partielle afledede

$$G_{,i}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n g_{,j}(T(\mathbf{x})) \frac{\partial y_j}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

Heraf følger, at vektoren af partielle afledede kan skrives

$$\nabla G(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_{\mathbf{x}}^{-1} \nabla g(\mathbf{y}) \quad (10)$$

Det ses, at  $\nabla G(\mathbf{x})$  er forskellig fra nulvektoren, hvis  $\nabla g(\mathbf{y})$  er forskellig fra nulvektoren. Fladen givet ved (7) er altså differentiabel.

På tilsvarende vis fører den berørende afbildning  $L_{\mathbf{x}_0}^{-1}$  til  $T^{-1}$  i  $\mathbf{y}_0$  den samme differentiable flade givet ved (5) over i en differentiabel flade med ligningen

$$g[\mathbf{y}_0 + \mathbf{A}_{\mathbf{x}_0}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)] = 0 \quad (11)$$

hvor den sammensatte funktion på venstre side af lighedstegnet i punktet  $\mathbf{x}_0$  har vektoren af partielle afledede

$$\mathbf{A}_{\mathbf{x}_0}^{-1} \nabla g(\mathbf{y}_0) \quad (12)$$

Antag at  $\mathbf{y}_0$  er et punkt på fladen i  $\mathbf{y}$ -rummet, altså at  $g(\mathbf{y}_0) = 0$ . Ved sammenligning af (10) og (12) ses da, at de to billedflader i  $\mathbf{x}$ -rummet givet ved henholdsvis (7) og (11) har fælles normalvektor i det fælles punkt  $\mathbf{x}_0 = T(\mathbf{y}_0)$ . De berører altså hinanden tangentielt i punktet  $\mathbf{x}_0$ . Specielt gælder, at hvis  $g(\mathbf{y})$  er en inhomogen lineær funktion af  $\mathbf{y}$ , da er fladen givet ved  $g(\mathbf{y}) = 0$  en hyperplan i  $\mathbf{y}$ -rummet, medens billedfladen (11) ved  $L_{\mathbf{x}_0}^{-1}$  er en hyperplan i  $\mathbf{x}$ -rummet. Hvis  $g(\mathbf{y}_0) = 0$ , er denne plan sammenfaldende med tangentplanen i  $\mathbf{x}_0$  til billedfladen (7) ved  $T^{-1}$ .

#### 7.4 Det normale haleapproksimationsprincip til bestemmelse af lokalt mest centrale grænsetilstandspunkter

Vi skal i dette afsnit se på, hvorledes vi ved brug af de i forrige afsnit repeterede egenskaber ved differentiable afbildninger og flader kan karakterisere og

bestemme punkter på en grænsetilstandsflade i det frie fysiske formuleringsrum, der ved transformationen  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$  afbildes i lokalt mest centrale punkter på den tilsvarende grænsetilstandsflade i det gaussiske formuleringsrum.

Lad  $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}$  være en enkeltsammenhængende sikker mængde i det frie fysiske formuleringsrum, og lad  $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}$  have en rand  $\partial\mathcal{S}_{\mathbf{x}}$ , grænsetilstandsfladen, der er en differentiabel flade  $\mathcal{G}_{\mathbf{x}}$  givet ved

$$\mathcal{G}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} | G(\mathbf{x}) = 0\} \quad (1)$$

Transformationen  $T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  kræves at være kontinuert differentiabel og iøvrigt have egenskaber som i forrige afsnit. Desuden kræves den at have sådanne egenskaber, at den afbilder  $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}$  i en enkeltsammenhængende mængde  $\mathcal{S}_{\mathbf{y}} = T(\mathcal{S}_{\mathbf{x}})$ , det indre af  $\mathcal{S}_{\mathbf{x}}$  i det indre af  $\mathcal{S}_{\mathbf{y}}$  og randen  $\partial\mathcal{S}_{\mathbf{x}}$  i randen  $\partial\mathcal{S}_{\mathbf{y}} = T(\partial\mathcal{S}_{\mathbf{x}})$ . Da er  $\partial\mathcal{S}_{\mathbf{y}}$  en differentiabel grænsetilstandsflade

$$\mathcal{G}_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{y} | g(\mathbf{y}) = 0\} \quad (2)$$

$$g(\mathbf{y}) = G(T^{-1}(\mathbf{y})) \quad (3)$$

Vælg et punkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{G}_{\mathbf{x}}$ . Hvis  $\mathbf{y}_0 = T(\mathbf{x}_0)$  tilfældigvis skulle være et lokalt mest centralt punkt på  $\mathcal{G}_{\mathbf{y}}$ , bliver  $\mathbf{x}_0$  det tilsvarende mest centrale punkt på fladen  $L_{\mathbf{x}_0}^{-1}(\mathcal{G}_{\mathbf{y}})$  i det specielle gaussiske rum, der fremkommer af det standardiserede gaussiske rum ved brug af den inhomogene lineære afbildning  $L_{\mathbf{x}_0}^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Den tilsvarende gaussiske stokastiske vektor er, se (7.3.1) og (7.3.4),

$$\mathbf{Z}_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{A}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{Y} + \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}_0} \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{A}_{\mathbf{x}_0} \mathbf{y}_0 \quad (5)$$

med henholdsvis middelværdivektor og kovariansmatrix

$$E[Z_{x_0}] = \mu_{x_0}, \quad \text{Cov}[Z_{x_0}, Z_{x_0}'] = A_{x_0} A_{x_0}' \quad (6)$$

Vi kan da med brug af sætning 5.1 i afsnit 5.3 formulere følgende:

**SÆTNING 7.1** *Punktet  $y_0 = T(x_0)$  er et lokalt mest centralt punkt på  $\mathcal{G}_y$ , hvis og kun hvis*

$$x_0 = \hat{E}[Z_{x_0} | M_{x_0} = 0] \quad (7)$$

hvor  $M_{x_0}$  er den lineære sikkerhedsmargen, der svarer til tangenthyperplanen til  $\mathcal{G}_x$  i  $x_0$ , men med  $Z_{x_0}$  indsat i stedet for  $X$ . Det tilsvarende lokale geometriske sikkerhedsindeks er

$$\beta_{x_0} = \frac{E[M_{x_0}]}{D[M_{x_0}]} \quad (8)$$

At den i sætningen givne definition af den lineære sikkerhedsmargin  $M_{x_0}$  kan bruges i (7) og (8), følger direkte af den afsluttende bemærkning i forrige afsnit, der udsiger, at tangenthyperplanen til  $L_{x_0}^{-1}(\mathcal{G}_y)$  i  $x_0 = T^{-1}(y_0)$  er sammenfaldende med tangenthyperplanen til  $\mathcal{G}_x = T^{-1}(\mathcal{G}_y)$  i samme punkt  $x_0$ .

Som i afsnit 5.3 anviser betingelsen (7) direkte et iterationsprincip til bestemmelse af lokalt mest centrale punkter:

$$x_m \quad (9)$$

↓

$$\text{bestem } A_{x_m}, \mu_{x_m} \text{ og } M_{x_m} = G(x_m) + \nabla G(x_m)' (Z_{x_m} - x_m)$$

↓

$$\text{bestem } x_{m+1} = \hat{E}[Z_{x_m} | M_{x_m} = 0]$$

Hvis en på denne måde konstrueret følge  $x_1, x_2, \dots, x_m, \dots$  af punkter er konvergent med  $x^*$  som grænsepunkt, da er  $x^* \in \mathcal{G}_x$ , og  $y^* = T(x^*)$  er et lokalt centralt punkt på  $\mathcal{G}_y$ . Beviset herfor er det samme som i afsnit 5.3. Den til  $x^*$  svarende grænsesikkerhedsmargen  $M_{x^*}$  bestemmer det lokale geometriske sikkerhedsindeks på sædvanlig måde som det simple sikkerhedsindeks.

**Eksempel 7.5** Vi vil for den første af de to Rosenblatttransformationer i eksempel 7.3 bestemme de lokalt mest centrale punkter på liniestykket, der forbinder punkterne (0,9) og (6,0) i  $x$ -rummet. Afbildningen (7.2.18) har funktionalmatricen

$$A^{-1} = \left\{ \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varphi(y_1)} e^{-x_1} & 0 \\ \frac{1}{\varphi(y_2)} x_2(1+x_2)e^{-(1+x_1)x_2} & \frac{1}{\varphi(y_2)} [(1+x_1)(1+x_2)-1] e^{-(1+x_1)x_2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

hvoraf følger, at den omvendte afbildning har funktionalmatricen

$$A = \left\{ \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\} = \begin{bmatrix} \varphi(y_1) e^{x_1} & 0 \\ -\varphi(y_1) \frac{x_2(1+x_2)}{(1+x_1)(1+x_2)-1} e^{x_1} & \varphi(y_2) e^{(1+x_1)x_2} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Med udeladelse af indices har vi da, at (5) og (6) giver

$$E[Z] = x - Ay =$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - y_1 \varphi(y_1) e^{x_1} \\ x_2 + \frac{y_1 \varphi(y_1) x_2 (1+x_1) e^{x_1} - y_2 \varphi(y_2) e^{(1+x_1)x_2}}{(1+x_1)(1+x_2)-1} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{Cov}[Z, Z'] = \mathbf{A} \mathbf{A}' = \varphi(y_1)^2 e^{2x_1}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{x_2(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)-1} \\ -\frac{x_2(1+x_1)}{(1+x_1)(1+x_2)-1} & \frac{x_2^2(1+x_1)^2 + e^{2(x_2+x_1x_2-x_1)} + y_1^2 - y_2^2}{[(1+x_1)(1+x_2)-1]^2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Da  $G(x) = -3x_1 - 2x_2 + 18$  er lineær i  $(x_1, x_2)$ , har vi direkte  $M = 18 - [3 \ 2] Z$  for ethvert approximationspunkt. Den lineære regression af  $Z$  på  $M = 0$  bliver, se (4.4.3),

$$\hat{E}[Z | M=0] = E[Z] + \frac{\mathbf{A} \mathbf{A}' \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{A}' \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}} (18 - [3 \ 2] E[Z]) \quad (14)$$

medens det til  $M$  hørende sikkerhedsindeks er

$$\beta = \frac{18 - [3 \ 2] E[Z]}{\sqrt{\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{A}' \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}} \quad (15)$$

Langs det rette liniestykke antager tætheden (7.2.14) sin mindste værdi for  $x_1 = 17/6$  og lokale maksima for  $x_1 = 0$  og  $x_1 = 6$ . Det er derfor en fornuftig strategi at søge efter to lokalt mest centrale punkter, der svarer henholdsvis til et punkt tæt ved (0,9) og et punkt tæt ved (6,0) på det rette liniestykke. Figur 7.2 viser iøvrigt direkte, at der netop er to lokalt mest centrale punkter på billedkurven af det rette liniestykke.

Med startpunkt  $x_0 = (0.050, 8.925)$  får vi den i følgende skema viste sekvens af værdier af  $\hat{E}[Z | M=0]$  og  $\beta$ , idet nyt startpunkt i hvert skridt er gennemsnittet af det gamle startpunkt og det ved (14) bestemte punkt:

$x_1$	0.050	0.0965	0.1038	0.1023
$x_2$	8.925	8.8552	8.8443	8.8466
$\beta$	3.4345	3.5006	3.5012	$3.5012 \approx \beta_2$

hvilket giver  $\Phi(-\beta_2) \approx 0.232 \cdot 10^{-3}$ . Med startpunkt  $x_0 = (5.959, 0.075)$  får vi på samme måde følgende sekvens

$x_1$	5.950	5.9365	5.9273	5.9217	5.9186
$x_2$	0.075	0.0953	0.1090	0.1174	0.1222
$\beta$	2.7855	2.7842	2.7838	2.7836	$2.7835 \approx \beta_1$

hvilket giver  $\Phi(-\beta_1) \approx 2.689 \cdot 10^{-3}$ . De tilsvarende lokalt mest centrale punkter identificeres umiddelbart på kurverne i figur 7.2. Enkeltpunkt FORM-tilnærmelsen til sandsynligheden  $P(3x_1 + 2x_2 > 18)$  er altså  $2.69 \cdot 10^{-3}$ .

For den Rosenblatttransformation, der svarer til den omvendte ordning  $(x_2, x_1)$ , finder man følgende to punkter, der svarer til de to lokalt mest centrale punkter på liniestykkets billede, samt de tilhørende geometriske sikkerhedsindeks:  $(x_1, x_2) = (0.091, 8.863)$ ;  $\beta_2 = 3.633$  og  $(x_1, x_2) = (5.907, 0.140)$ ;  $\beta_1 = 2.649$ . Det bemærkes, at punkterne naturligvis er forskellige fra de punkter, der blev fundet ovenfor. Sandsynlighedstilnærmelserne er henholdsvis  $\Phi(-\beta_2) \approx 0.140 \cdot 10^{-3}$  og  $\Phi(-\beta_1) \approx 4.037 \cdot 10^{-3}$ . I dette tilfælde bliver enkeltpunkt FORM-tilnærmelsen altså  $4.04 \cdot 10^{-3}$  dvs 50% større end bestemmelsen ved ordningen  $(x_1, x_2)$ . Denne forskel skyldes i det væsentlige de forskellige krumninger af grænsetilstandskurven i de mest centrale punkter. For ordningen  $(x_1, x_2)$  er krumningen lille og positiv, medens den for ordningen  $(x_2, x_1)$  er numerisk betydelig større og negativ, figur 7.2 og tabel 7.1.

I hvert af punkterne kan krumningen  $\kappa$  udregnes ved brug af (6.4.20), hvorefter krumningskorrektionsfaktoren i (6.4.10) kan udregnes. Vi finder de i tabel 7.1 viste resultater. Det ses, at de to enkeltpunkt SORM-tilnærmelser kun adskiller sig mindre end 1% fra hinanden, og også at FORM-tilnærmelsen hørende til ordningen  $(x_1, x_2)$  er god.  $\square$

ordning	$\beta$	$10^3\Phi(-\beta)$	$\kappa$	$\frac{10^3\Phi(-\beta)}{\sqrt{1-\kappa\beta}}$	$\beta_G$
$(x_1, x_2)$	2.784	2.689	0.0249	2.878	2.772
	3.501	0.232	-0.2973	0.162	3.595
sum:	-	2.921	-	2.949	2.754
$(x_2, x_1)$	2.649	4.037	-0.4016	2.810	2.770
	3.633	0.140	0.0304	0.148	3.619
sum:	-	4.177	-	2.958	2.753

Tabel 7.1. Resultater af asymptotisk SORM-beregning af sandsynligheden  $P(3X_1+2X_2>18)$  i eksempel 7.5 ved brug af de to Rosenblatttransformationer, der svarer henholdsvis til ordningerne  $(x_1, x_2)$  og  $(x_2, x_1)$ . Summerne bruges i eksempel 7.7.

**Bemærkning 7.1** Det skal fremhæves, at sætning 7.1 også gælder, når transformationen  $T$  fører over i et gaussisk rum, der ikke er standardiseret. Dette er eksempelvis relevant ved brug af Natafs fordelingsmodel, hvor transformationen er defineret ved (7.2.1), dvs alene ud fra de endimensionale marginale fordelinger for  $X_1, \dots, X_n$ , også selv om disse variable er korrelerede. Man har da blot, at kovariansmatricen for  $Z_{x_0}$  bliver, se (4),

$$\text{Cov}[Z_{x_0}, Z'_{x_0}] = A_{x_0} \text{Cov}[Y, Y'] A'_{x_0} \quad (16)$$

□

**Eksempel 7.6** Vi vil løse det samme problem som i eksempel 7.5, men under antagelse af, at  $(X_1, X_2)$  har Nataffordelingen (7.2.22). Funktionalmatricen hørende til den marginale transformation (7.2.23) er

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-x_1/\varphi(y_1)} & e^{-x_2/\varphi(y_2)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

således at

$$E[Z] = x - A y = \begin{bmatrix} x_1 - y_1 \varphi(y_1) e^{x_1} \\ x_2 - y_2 \varphi(y_2) e^{x_2} \end{bmatrix} \quad (18)$$

og, se (16),

$$\begin{aligned} \text{Cov}[Z, Z'] &= A \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} A' \\ &= \begin{bmatrix} \varphi(y_1)^2 e^{2x_1} & \rho \varphi(y_1)\varphi(y_2) e^{x_1+x_2} \\ \rho \varphi(y_1)\varphi(y_2) e^{x_1+x_2} & \varphi(y_2)^2 e^{2x_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

hvor  $\rho = -0.447$ . Formlerne (14) og (15) er uforandrede. Med de samme startpunkter for iterationerne som i eksempel 7.5 fås følgende sekvenser:

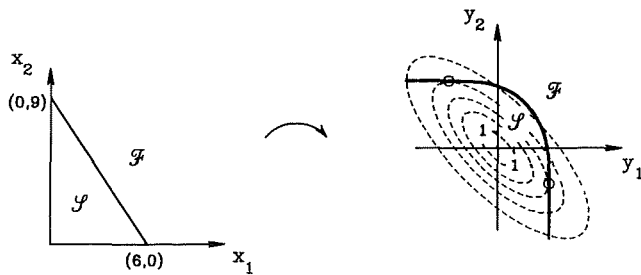
$$\begin{array}{lll} x_1 & 0.050 & 0.0519 \\ x_2 & 8.925 & 8.9221 \\ \beta & 3.6473 & 3.6472 \approx \beta_2 \end{array}$$

der giver  $\Phi(-\beta_2) \approx 0.133 \cdot 10^{-4}$ , og

$$\begin{array}{lllll} x_1 & 5.959 & 5.9401 & 5.9334 & 5.9290 & 5.9264 \\ x_2 & 0.075 & 0.0898 & 0.1000 & 0.1065 & 0.1105 \\ \beta & 2.7884 & 2.7876 & 2.7873 & 2.7872 & 2.7871 \approx \beta_1 \end{array}$$

der giver  $\Phi(-\beta_1) \approx 2.659 \cdot 10^{-3}$ .

Figur 7.4 viser billedet af det rette liniestykke ved den marginale afbildning samt kurver for konstant tæthed af normalfordelingen med middelværdier  $(0,0)$ , varianser  $(1,1)$  og korrelationskoefficient  $\rho = -0.447$ . Et lokalt mest centralt punkt på billedkurven er kendetegnet ved, at billedkurven og en kurve for konstant tæthed tangerer hinanden i punktet. □



Figur 7.4. Nataftransformation (eksemplerne 7.4 og 7.6).

**Bemærkning 7.2** Hvis der er bestemt flere punkter  $x_{q_1}, \dots, x_{q_q} \in \mathcal{G}_x$ , der afbildes i lokalt mest centrale punkter på  $\mathcal{G}_y$ , kan man naturligvis beregne en approksimation til det generaliserede sikkerhedsindeks ved brug af flerpunkt FORM. Det samlede sæt af lineære sikkerhedsmargener  $M_{x_1}, \dots, M_{x_q}$  betragtet som funktioner af henholdsvis  $Z_{x_1}, \dots, Z_{x_q}$  bestemmer en  $q$ -sided konveks polyhedral mængde i det standardiserede gaussiske rum ( $y$ -rummet). Denne polyhedrale mængde approksimerer  $\mathcal{S}_y$ . Beregningen af tilnærmelsen til sandsynligheden på  $\mathcal{S}_y$  kan imidlertid udføres direkte ved brug af sikkerhedsmargenerne  $M_{x_1}, \dots, M_{x_q}$ . Deres forenede  $q$ -dimensionale fordeling er jo gaussisk med middelværdier

$$E[M_{x_i}] = \beta_i D[M_{x_i}] \quad (20)$$

og kovarianser  $\text{Cov}[M_{x_i}, M_{x_j}]$  bestemt ved hjælp af kovarianserne

$$\text{Cov}[Z_{x_i}, Z_{x_j}] = A_{x_i} \text{Cov}[Y, Y'] A_{x_j}' \quad (21)$$

Vi er hermed tilbage i problematikken beskrevet i afsnit 6.3.

Også enkeltpunkt multipel FORM, afsnit 6.6, kan håndteres som i afsnit 5.3 efter en direkte generalisering af sætning 7.1, således at betingelsen (7) får form som (5.3.24).  $\square$

**Eksempel 7.7** I problemet i eksempel 7.5 blev bestemt to punkter  $x_1$  og  $x_2$ , der afbildes i lokalt mest centrale punkter på grænsetilstandskurven i det standardiserede gaussiske rum. Vi har da

$$\text{Cov}[Z_{x_1}, Z_{x_2}] = A_{x_1} A_{x_2}' =$$

$$\begin{bmatrix} 3.0849 & 0.0000 \\ -0.0625 & 0.1372 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1905 & -1.6837 \\ 0.000 & 3.5156 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5872 & -5.1902 \\ -0.0919 & 0.5876 \end{bmatrix} \quad (22)$$

og dermed

$$\text{Cov}[M_{x_1}, M_{x_2}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A_{x_1} A_{x_2}' \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -23.58 \quad (23)$$

$$\text{Var}[M_{x_1}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A_{x_1} A_{x_1}' \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 83.30 \quad (24)$$

$$\text{Var}[M_{x_2}] = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A_{x_2} A_{x_2}' \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 57.25 \quad (25)$$

således at

$$\rho[M_{x_1}, M_{x_2}] = -0.341 \quad (26)$$

Den negative korrelationskoefficient medfører, at  $\Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho) \approx 2 \cdot 10^{-9}$  er forsvindende i forhold til  $\Phi(-\beta_1) = 2.689 \cdot 10^{-3}$  og  $\Phi(-\beta_2) = 0.232 \cdot 10^{-3}$ .

Vi finder altså ved 2-punkt FORM at

$$P(3X_1 + 2X_2 \geq 18) \approx \Phi(-\beta_1) + \Phi(-\beta_2) - \Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho) \approx 2.921 \cdot 10^{-3} \quad (27)$$

Dette resultat svarer til ordningen  $(x_1, x_2)$ , medens ordningen  $(x_2, x_1)$  giver 2-punkt FORM-tilnærmelsen  $4.177 \cdot 10^{-3}$ , tabel 7.1, hvor det sidste resultat er ca 43% større end det første. For de to ordninger bliver 2-punkt SORM-tilnærmelserne henholdsvis  $2.949 \cdot 10^{-3}$  og  $2.958 \cdot 10^{-3}$ , tabel 7.1, som kun adskiller sig med ca 0.3%. De tilsvarende generaliserede sikkerhedsindeks er  $\beta_G = 2.754$  og  $2.753$ .

For Nataffordelingen betragtet i eksempel 7.6 bliver korrelationskoefficienten mellem de to sikkerhedsmargener ca 0.1 og 2-punkt FORM giver, at

$$P(3x_1 + 2x_2 \geq 18) \simeq (2.659 + 0.133 - 0.000) \cdot 10^{-3} \simeq 2.79 \cdot 10^{-3} \quad (28)$$

der svarer til det generaliserede sikkerhedsindeks  $\beta_G = 2.772$ . Ændringen af den todimensionale eksponentielle fordeling i eksempel 7.3 til den tilsvarende Nataffordeling i eksempel 7.4 ses her at føre til næsten uændret generaliseret sikkerhedsindeks.  $\square$

Det ses, at den i dette afsnit beskrevne metode til bestemmelse af lokale mest centrale punkter på  $\mathcal{G}_y$  med efterfølgende anvendelse af flerpunkt FORM formelt ser ud, som om fordelingen for  $X$  approksimeres med forskellige normale fordelinger i visse punkter af  $\mathcal{G}_x$ . Metoden er derfor blevet kaldt "det normale haleapproksimationsprincip". Årsagen til denne betegnelse fremgår endnu tydeligere af det efterfølgende eksempel. På trods af navnet er metoden naturligvis eksakt, hvad angår bestemmelsen af lokalt mest centrale grænsetilstandspunkter.

**Eksempel 7.8** Hvis transformationen  $T$  er den ved (7.2.1) definerede simple marginale transformation, bliver matricen  $A_x$  i (7.3.1) en diagonalmatrix, hvis ite diagonalelement  $\sigma_i = \partial x_i / \partial y_i$  bestemmes ved differentiation af ligningen (7.2.1). Vi får

$$\varphi(y_i) = f_i(x_i) \sigma_i \quad (29)$$

hvor  $f_i(x_i) = F_i'(x_i)$  er den til  $F_i$  hørende tæthedsfunktion. Det ite element i  $\mu_x$  defineret ved (5) bliver da

$$\mu_i = x_i - \sigma_i y_i \quad (30)$$

hvoraf fås

$$y_i = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (31)$$

Ved indsætning af denne formel i (7.2.1) og i (29) fås ligningerne

$$\Phi\left[\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right] = F_i(x_i) \quad (32)$$

$$\frac{1}{\sigma_i} \varphi\left[\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right] = f_i(x_i) \quad (33)$$

hvoraf  $\mu_i$  og  $\sigma_i$  kan bestemmes for ethvert valg  $x = x_0$ . Ligningerne bestemmer middelværdien  $\mu_i$  og standardafvigelsen  $\sigma_i$  i den normale fordeling, der har samme fordelingsfunktionsværdi og samme tæthedsfunktionsværdi i approksimationspunktet  $x_0$  som den givne fordeling af inputvariablen  $X_i$ .  $\square$

**Bemærkning 7.3** Mulighederne for at konstruere en tilstrækkelig god konveks polyhedral approksimation til den sikre mængde i et gaussisk formuleringsrum afhænger ikke blot af den sikre mængdes udseende i det frie fysiske formuleringsrum, men også af egenskaberne hos transformationen  $T$ .

Betragt følgende eksempel. Lad  $(X_1, X_2)$  være ensformigt fordelt på det indre af cirklen med centrum i nulpunktet og radius 1. Da har parret

$$(Y_1, Y_2) = 2 \frac{\sqrt{-\log R}}{R} (X_1, X_2) \quad (34)$$

med  $R$  defineret ved

$$R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \quad (35)$$

en rotationssymmetrisk tæthed, som ved elementære beregninger kan vises at være standardiseret gaussisk. Hvis det antages, at den sikre mængde er en cirkel med centrum i nulpunktet og radius  $r < 1$ , bliver billedet af den sikre mængde mængden af punkter uden for cirklen med centrum i nulpunktet og radius  $2\sqrt{-\log r}$ . Den sikre mængde i det betragtede gaussiske formuleringsrum indeholder altså endog ikke den centrale del af den standardiserede normale fordeling, og en approksimation af den sikre mængde med en kon-

veks polyhedral mængde er udelukket.

Bortset fra den kendsgerning at eksemplet er så simpelt, at en transformation ikke er nødvendig, kan samme eksempel bruges til at illustrere, at Rosenblatttransformationen (7.2.11) ikke nødvendigvis er det simpleste valg af transformation. I dette tilfælde er det meget simple at transformere  $(X_1, X_2)$  over i parret  $(R, \Theta)$  af polære koordinater til  $(X_1, X_2)$ . Da er  $R$  og  $\Theta$  indbyrdes uafhængige,  $R$  har en tæthed proportional med  $r$ , og  $\Theta$  er ensformigt fordelt på intervallet  $[0, 2\pi]$ . Den simple marginale transformation (7.2.1) kan derefter anvendes på  $(R, \Theta)$ .  $\square$

### 7.5 Tilnærmet beregning af værdier af den $m$ -dimensionale normale fordelingsfunktion ved brug af FORM eller SORM \*

Lad  $\mathbf{M}$  være en gaussisk stokastisk vektor af sikkerhedsmargener defineret således, at alle varianser er 1. og lad  $\mathbf{M}$  have korrelationsmatricen  $\mathbf{P}_{\mathbf{M}}$ . Vi vil i dette afsnit demonstrere en på FORM eller SORM baseret tilnærmelsesmetode til beregning af sandsynligheden

$$P(\mathbf{M} > \mathbf{0}) = \Phi_m(\boldsymbol{\beta}; \mathbf{P}_{\mathbf{M}}) \quad (1)$$

hvor  $\Phi_m$  er fordelingsfunktionen for den  $m$ -dimensionale normale fordeling, og  $\boldsymbol{\beta}$  er vektoren af simple sikkerhedsindices  $\beta_i = E[M_i]/D[M_i]$  af elementerne  $M_1, \dots, M_m$  i  $\mathbf{M}$ .

Første skridt består i at dekomponere  $\mathbf{P}_{\mathbf{M}}$  i et produkt

$$\mathbf{P}_{\mathbf{M}} = \mathbf{A}\mathbf{A}' \quad (2)$$

hvor  $\mathbf{A}$  er en nedre triangulær matrix med første diagonalelement  $a_{11} = 1$ . Dette kan gøres ved den såkaldte Choleski-Banachiewicz' triangulationsmetode. Vi har da, at  $\mathbf{M}$  kan skrives

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}\mathbf{U} + \boldsymbol{\beta} \quad (3)$$

hvor  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_m)$  er en standardiseret gaussisk stokastisk vektor. Dette eftervises ved at bemærke, at (3) er en inhomogen lineær transformation, der

fører  $\mathbf{U}$  over i  $\mathbf{M}$ , således at  $\text{Cov}[\mathbf{M}, \mathbf{M}'] = \text{Cov}[\mathbf{A}\mathbf{U}, \mathbf{U}'\mathbf{A}'] = \mathbf{A} \text{Cov}[\mathbf{U}, \mathbf{U}'] \mathbf{A}' = \mathbf{A} \mathbf{I} \mathbf{A}' = \mathbf{P}_{\mathbf{M}}$ , ifølge (2), og  $E[\mathbf{M}] = \mathbf{A} E[\mathbf{U}] + \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$ .

Vi kan da skrive (1) som

$$P(\mathbf{M} > \mathbf{0}) = P(\mathbf{A}\mathbf{U} > -\boldsymbol{\beta}) = P(\mathbf{A}\mathbf{U} < \boldsymbol{\beta}) = P(\mathbf{A}\mathbf{U} < \boldsymbol{\beta} | U_1 < \beta_1) \Phi(\beta_1) \quad (4)$$

Da  $U_1, \dots, U_m$  er indbyrdes uafhængige, er kun  $U_1$  i hændelsen  $\mathbf{A}\mathbf{U} < \boldsymbol{\beta}$  påvirket af betingelsen  $U_1 < \beta_1$ . Vi har

$$P(U_1 \leq u_1 | U_1 < \beta_1) = \begin{cases} \frac{\Phi(u_1)}{\Phi(\beta_1)} & \text{for } u_1 \leq \beta_1 \\ 1 & \text{for } u_1 > \beta_1 \end{cases} \quad (5)$$

Beregningen af den betingede sandsynlighed  $P(\mathbf{A}\mathbf{U} < \boldsymbol{\beta} | U_1 < \beta_1)$  er hermed overført til et rum, som er standardiseret gaussisk i alle variable undtaget den første variabel. I dette rum er hændelsen  $\{\mathbf{A}\mathbf{U} < \boldsymbol{\beta} | U_1 < \beta_1\}$  defineret ved de  $m-1$  uligheder

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{U} < \boldsymbol{\beta}_1 \quad (6)$$

hvor  $\mathbf{A}_1$  og  $\boldsymbol{\beta}_1$  er submatricer i  $\mathbf{A}$  og  $\boldsymbol{\beta}$  defineret således:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{A}_1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}' \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_1 & \mathbf{A}_{11} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Den enentydige afbildning

$$\mathbf{U} \in ]-\infty, \beta_1] \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^m \quad (8)$$

$$\Phi(\mathbf{Y}_1) = \frac{\Phi(\mathbf{U}_1)}{\Phi(\beta_1)} \quad (9)$$

$$Y_i = U_i, \quad i = 2, \dots, m \quad (10)$$



definerer en standardiseret gaussisk vektor  $(Y_1, \dots, Y_m)$ , og i det tilsvarende gaussiske rum repræsenteres det betingede hændelse  $\{AU < \beta | U_1 < \beta_1\}$  ved hændelsen

$$\alpha_1 \Phi^{-1}[\Phi(\beta_1)\Phi(Y_1)] + A_{11} Y_1 < \beta_1 \quad (11)$$

hvor  $\alpha_1$  og  $A_{11}$  er defineret i (7) som submatricer til  $A_1$ . Hændelsen (11) er beskrevet ved fælleshændelsen af  $m - 1$  marginale hændelser defineret ved de  $m - 1$  uligheder i (11).

Hændelsen (11) approksimeres herefter med en konveks polyhedral mængde med  $m - 1$  sider, idet hver af de  $m - 1$  marginale grænsetilstandsflader i (11) erstattes af en hyperplan efter principperne for FORM eller SORM. Det bemærkes, at sandsynligheden for den i.te marginale hændelse i (11) beregnes alene ved brug af, at de to stokastiske variable  $Y_1$  og

$$Z_i = a_{i+1,2} U_2 + \dots + a_{i+1,i+1} U_{i+1} \quad (12)$$

er gaussiske og indbyrdes uafhængige med middelværdier nul og varianser henholdsvis 1 og  $a_{i+1,2}^2 + \dots + a_{i+1,i+1}^2$ .

I stedet for at fastlægge den approksimerende hyperplan som en plan parallel med tangenthyperplanen i det mest centrale punkt på den i.te grænsetilstandsflade i (11), kan planen fastlægges som en såkaldt "ækvivalent" hyperplan. Normalvektoren til denne er defineret til at være parallel med retningen af største tilvæksthastighed af sandsynligheden, når grænsetilstandsfladen parallelforskydes med en given fart i den betragtede retning, hvor farten er den samme uanset valg af retning.

Resultatet af denne konvekse polyhedrale approksimation med  $m - 1$  hyperplaner er, at den betingede sandsynlighed  $P(AU < \beta | U_1 < \beta_1)$  i (4) erstattes med den ubetingede sandsynlighed

$$P(N > 0) = \Phi_{m-1}(\delta; P_N) \quad (13)$$

hvor  $\delta_i = E[N_i]/D[N_i]$  og  $N = (N_1, \dots, N_{m-1})$  er en vektor af lineære sikker-

hedsmargener, der svarer til de  $m - 1$  sider af den approksimerende polyhedrale mængde. Vi har altså udledt den approksimative formel

$$\Phi_m(\beta; P_M) \simeq \Phi(\beta_1) \Phi_{m-1}(\delta; P_N) \quad (14)$$

ved hvilken dimensionen er reduceret med 1.

På grund af den stigende nøjagtighed af FORM eller SORM med voksende geometrisk sikkerhedsindeks, udviser den successive dimensionsreduktionsmetode stigende nøjagtighed for stigende værdi af  $\min\{|\beta_1|, \dots, |\beta_m|\}$ .

## 7.6 Historiske og bibliografiske noter

Nødvendigheden af standardisering af typer af transformationer eller fordelinger til fjernelse af informationsmæssige symmetriforstyrrelser blev diskuteret af OD i 1979 [6.4]. Nataffordelingen [7.8] blev foreslået og analyseret af A. Der Kiureghian og P-L. Liu i 1986 [7.2] som en nyttig kandidat til en flerdimensional normspecificeret fordeling til vurdering af bærende konstruktioners sikkerhed i tilfælde, hvor kun de marginale fordelings typer er givne.

Nytten af Rosenblatttransformationen [7.11] til sikkerhedsindeksberegninger på grundlag af fuldt specificeret forenet fordelingsinformation blev demonstreret første gang af M. Hohenbichler og R. Rackwitz i 1981 [7.5].

Den simple ide om at approksimere fordelingshaler med normale fordelingshaler er naturligvis gammel. I baggrundsundersøgelser for normer for bærende konstruktioners sikkerhed blev princippet benyttet af J. Benjamin og N. C. Lind i 1969 [7.1] og af E. Paloheimo og M. Hannus i 1974 [7.9]. En algoritme til konstruktion af en følge af stadigt bedre approksimerende normalfordelinger blev formuleret og gennemprøvet på et specielt sandsynlighedsproblem (se kapitlet om lastkombinationer) af R. Rackwitz og B. Fiessler i 1978 [7.10] og mere alment af M. Hohenbichler og R. Rackwitz i 1981 [7.5]. Algoritmen, der i sin punktfølgekonstruktion virker som det velkendte Newton-Raphson iterationsprincip, har ved siden af optimeringsmetoder vundet udbredt anvendelse til beregning af geometriske sikkerhedsindices under navnet Rackwitz-Fiesslers algoritme.

OD og HOM gav i 1980 [7.3] og 1981 [7.4] den på sætning 7.1 baserede

afklarende tolkning af algoritmen, nemlig at den i tilfælde af konvergens leder til et lokalt mest centralt punkt på grænsetilstandsfladens billede i det gaussiske formuleringsrum.

Beregningen af fordelingsfunktionsværdier for den flerdimensionale normale fordeling ved brug af FORM eller SORM blev anvist af *M. Hohenbichler* i 1982 [7.6] og nøjagtighedsundersøgelser af metoden blev offentliggjort af *M. Hohenbichler* og *R. Rackwitz* i 1983 [7.7].

## Referencer

1. I. Benjamin and N.C. Lind: A Probabilistic Basis for a Deterministic Code. *Journal of the American Concrete Institute*, vol.66, 1969.
2. A. Der Kiureghian and P-L. Liu: Structural Reliability Under Incomplete Probability Information. *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.112, 1986.
3. O. Ditlevsen and H.O. Madsen: Discussion of "Optimal Reliability of Probabilistic Design", by N.C. Lind. *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.106, 1980.
4. O. Ditlevsen: Principle of Normal Tail Approximation. *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.107, 1981.
5. M. Hohenbichler and R. Rackwitz: Non-Normal Dependent Variables in Structural Reliability. *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.107, 1981.
6. M. Hohenbichler: An Approximation to the Multivariate Normal Distribution. In *Reliability Theory of Structural Engineering Systems DIALOG 6-82* (ed. G. Mohr), Proc. of Euromech 155, June 1982. DIAB, Lyngby, 1982.
7. M. Hohenbichler and R. Rackwitz: First-Order Concepts in System Reliability. *Structural Safety*, vol.1, 1983.
8. A. Nataf: Determination des Distribution dont les Marges sont Donnees. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, vol.225, 1962.
9. E. Paloheimo and M. Hannus: Structural Design Based on Weighted Fractiles. *Journal of the Structural Division*, ASCE, vol.100, 1974.
10. R. Rackwitz and B. Fiessler: Structural Reliability under Combined Random Load Sequences. *Computers and Structures*, vol.9, 1978.
11. M. Rosenblatt: Remarks on a Multivariate Transformation. *Ann. Math. Stat.*, vol.23, 1952.

## 8. FØLSOMHEDSANALYSE

### 8.1 Mål for betydning af inputvariable

For næsten plane grænsetilstandsflader i det standardiserede gaussiske rum, hvis punkter vi vil betegne ved  $\mathbf{y}$ , kan vi med tilstrækkelig nøjagtighed approksimere det generaliserede sikkerhedsindeks med det simple sikkerhedsindeks

$$\beta = \frac{E[M]}{D[M]} \quad (1)$$

hvor den lineære sikkerhedsmargen  $M$  svarer til tangenthyperplanen i det globalt mest centrale grænsetilstandspunkt. Specielt kan vi lade  $M$  have formen

$$M = \beta - \boldsymbol{\alpha}'\mathbf{Y} \quad (2)$$

hvor  $\boldsymbol{\alpha}$  er normalenhedsvektoren til grænsetilstandsfladen i det mest centrale punkt. Det gælder da, at

$$\text{Var}[M] = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1 \quad (3)$$

Det ses heraf, at  $\alpha_1^2$  er den brøkdel af sikkerhedsmargenens varians, som skyldes den standardiseret normalfordelte stokastiske variabel

$$Y_i = \mathbf{a}_i'(X - \boldsymbol{\mu}) \quad (4)$$

hvor  $\mathbf{X}$  er vektoren af stokastiske inputvariable, og  $\boldsymbol{\mu}$  er dennes middelværdivektor. Hvis transformationsmatricen  $[\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_n]'$  specielt er en diagonalmatrix  $[a_{11} \dots a_{nn}]$ , er  $X_1, \dots, X_n$  ukorrelerede. Da er  $\alpha_1^2$  den brøkdel af sikkerhedsmargenens varians, som kommer fra  $X_1$ .

Såfremt inputvariablene  $\mathbf{X}$  er afhængige, må man være mere forsigtig i fortolkningen af  $\alpha_1^2$ , idet denne er knyttet til linearkombinationen (4). Ofte

kan inputvariablene dog opdeles i flere sæt, som er indbyrdes ukorrelerede.

Man kan da for hvert sæt beregne summen af  $\alpha_i^2$  for de til sættet hørende normerede variable. Denne sum angiver den brøkdel af sikkerhedsmargenens varians, som skyldes usikkerheden i dette sæt.

Et andet nyttigt mål for betydningen af usikkerheden af en inputvariabel er *udeladelsesfølsomhedsfaktoren*. Denne faktor udtrykker den relative fejl, som behæfter værdien af det geometriske sikkerhedsindeks, hvis en inputvariabel erstattes af en fast værdi.

Hvis den ite stokastiske variabel  $Y_i$  i  $Y$  erstattes med en fast værdi  $y_i$ , ændres sikkerhedsmargenen  $M$  i (2) til

$$M(Y|Y_i=y_i) = \beta - \alpha_i y_i - \sum_{j \neq i} \alpha_j Y_j \quad (5)$$

der har det simple sikkerhedsindeks

$$\beta_{M|Y_i=y_i} = \frac{E[M|Y_i=y_i]}{D[M|Y_i=y_i]} = \frac{\beta - \alpha_i y_i}{\sqrt{1 - \alpha_i^2}} \quad (6)$$

Udeladelsesfølsomhedsfaktoren defineres da som

$$\zeta(Y_i=y_i) = \frac{\beta_{M|Y_i=y_i}}{\beta} = \frac{1 - \alpha_i y_i / \beta}{\sqrt{1 - \alpha_i^2}} \quad (7)$$

Mere almindeligt har vi åbenbart udeladelsesfølsomhedsfaktoren

$$\zeta(Y_1=y_1, \dots, Y_q=y_q) = \frac{1 - \frac{1}{\beta} \sum_{i \in I} \alpha_i y_i}{\sqrt{1 - \sum_{i \in I} \alpha_i^2}} \quad (8)$$

hvor  $y_1, \dots, y_q$  er faste erstatningsværdier for  $Y_1, \dots, Y_q$ , og  $I = \{1, \dots, q\}$ . Af bekvemlighedsgrunde har vi ladet det være de  $q$  første elementer i  $Y$ , der

erstattes med faste værdier.

Antag, at transformationen fra den stokastiske inputvektor  $X$  til den normerede gaussiske vektor  $Y$  er den marginale transformation, dvs antag at  $Y_i$  alene er bestemt ved  $X_i$  for alle  $i = 1, \dots, n$ , se (2.1). Da måler følsomhedsfaktoren (8) ved sin afvigelse fra 1 netop virkningen af, at  $X_1, \dots, X_q$  erstattes med de faste værdier  $x_1, \dots, x_q$ . Disse transformeres over i

$$y_k = \Phi^{-1}[F_{X_k}(x_k)] \quad (9)$$

før de indsættes i (8). Hvis  $x_k$  vælges som medianen i fordelingen for  $X_k$  bliver  $y_k = 0$ . Herved simplificeres tælleren i udeladelsesfølsomhedsfaktoren til værdien 1.

Two vigtige praktiske anvendelser af udeladelsesfølsomhedsfaktorer skal nævnes:

- i) Det ses, at hvis værdien  $\alpha_i$  er numerisk mindre end 0.14, begås en relativ fejl i det geometriske sikkerhedsindeks på mindre end 1% ved at erstatte  $X_i$  med sin median. I praktiske situationer er det derfor muligt at identificere stokastiske inputvariable, som kan erstattes med en fast værdi uden at der derved indføres en betydende fejl i det geometriske sikkerhedsindeks.
- ii) Til bestemmelse af det globalt mest centrale punkt anvendes ofte iterative metoder, der benytter værdien af gradientvektoren til grænsetilstandsfunktionen i hver iteration, se (7.4.9). Almene datamatprogrammer anvender normalt en numerisk metode til beregningen af gradientvektoren. Afhængig af differensmetode kræves herved en eller to ekstra beregninger af grænsetilstandsfunktionen for hver inputvariabel. Den totale regnetid er imidlertid stort set proportional med antallet af beregninger af denne funktion. Hvis beregningen er kompliceret – fx fordi den kræver løsning af store ligningssystemer eller numerisk løsning af differentiaalligninger – er det vigtigt, at antallet af beregninger af grænsetilstandsfunktionen gøres så lille som muligt. Det ses af (7), at hvis den normerede variabel  $Y_i$  erstattes med  $\beta\alpha_i/2$ , bliver den relative fejl i det simple sikkerhedsindeks

$$\zeta(Y_1 = \beta\alpha_1/2) \sim \frac{1 - \alpha_1^2/2}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}} = 1 + \frac{1}{8} \alpha_1^4 + O(\alpha_1^6) \quad (10)$$

dvs uden praktisk betydning, hvis  $\alpha_i$  er numerisk lille. Følgende strategi kan da anvendes til at reducere antallet af beregninger af grænsetilstandsfunktionen: Efter første trin i iterationen identificeres inputvariable med  $\alpha$  - værdi numerisk mindre end en valgt tærskelværdi. I de følgende iterationer erstattes disse inputvariable med værdier  $y_i^{(m)} = \beta^{(m)} \alpha_i^{(1)}/2$ , hvor det øvre index angiver iterationsnummeret. Værdien af  $\beta$  opdateres således i hver iteration. Når det valgte stopkriterium for  $\beta$  og den reducerede  $\alpha$  - vektor er opfyldt, foretages eventuelt en kontroliteration med det fulde sæt af stokastiske inputvariable. Dette gøres for at undgå fejl i de situationer, hvor værdien  $\alpha_i^{(1)}$  er langt fra værdien  $\alpha_i$  hørende til det søgte lokalt mest centrale grænsetilstandspunkt. Ved valg af tærskelværdi for den numeriske værdi af  $\alpha$  skal man være opmærksom på, at udeladelsesfølsomhedsfaktoren vokser med antallet af inputvariable, der erstattes med faste værdier, idet

$$\zeta(Y_j = \beta\alpha_j/2, j=1, \dots, k) \sim \frac{1 - \sum \alpha_j^2/2}{\sqrt{1 - \sum \alpha_j^2}} = 1 + \frac{1}{8} (\sum \alpha_j^2)^2 + O(\sum \alpha_j^2)^3 \quad (11)$$

Med det formål at generalisere udeladelsesfølsomhedsfaktoren til det tilfælde, hvor der er afhængighed mellem inputvariablene  $X_1, \dots, X_n$ , vil vi se på virkningen af, at en eller flere linearkombinationer af de normerede gaussiske variable  $Y_1, \dots, Y_n$  sættes til faste værdier. I en sådan situation bliver udeladelsesfølsomhedsfaktoren bestemt ved forholdet, se (4.4.14),

$$\zeta(N=0) = \frac{\beta_M | N=0}{\beta_M} \quad (12)$$

hvor  $M$  er den til det globalt mest centrale grænsetilstandspunkt svarende lineære sikkerhedsmargen (2), medens  $N$  er vektoren af lineære sikkerheds-

margener (eller hændelsesmargener), der svarer til de omtalte linearkombinationer af  $Y_1, \dots, Y_n$ . Med  $N$  på formen

$$N = z - K Y \quad (13)$$

fås da af (4.4.14) til (4.4.17), at

$$\zeta(N=0) = \frac{1 - \alpha' K' (K K')^{-1} z / \beta}{\sqrt{1 - \alpha' K' (K K') K \alpha}} \quad (14)$$

hvor  $\beta = \beta_M = E[M]/D[M]$ . Specielt hvis  $K K'$  er en enhedsmatrix, reduceres (14) til (8).

Almindeligvis er transformationen mellem  $X$  og  $Y$  ikke-lineær. Vi har da funktioner  $h_1, \dots, h_n$  således at

$$x_i = h_i(y_1, \dots, y_n) \quad (15)$$

hvor  $h_i$  ikke nødvendigvis er lineær. Fastholdes den stokastiske inputvariabel  $X_i$  på værdien  $x_i$ , betyder det altså, at  $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$  bindes til at ligge på den ved (15) definerede flade i det normerede gaussiske rum. Hvis  $h_i$  er lineær, fremstiller (15) en hyperplan, og derved fås et gaussisk underrum. Hvis  $h_i$  er ikke-lineær og en funktion af to eller flere variable  $y$ , mistes imidlertid denne egenskab. Man må derfor definere en helt ny transformation fra det parallelforskudte underrum i rummet af inputvariable, der svarer til, at  $x_i$  er fastholdt på en konstant værdi. Dette vanskeliggør formuleringen af en generel udeladelsesfølsomhedsfaktor.

Man kan imidlertid gå en anden vej. Når man betænker formålet med at erstatte  $X_i$  med den konstante værdi  $x_i$ , nemlig at opnå en nedskæring af antallet af variable uden væsentlig ændring af sikkerhedsindekset, kan man lige så godt lade  $X_i$  have en vis stokastisk variation, nemlig den der fremkommer ved at linearisere højre side af (15) i et passende valgt punkt, der tilfredsstiller (15). Et sådant valg kan eksempelvis være det mest centrale punkt på fladen defineret ved (15). Herved defineres en lineær sikkerhedsmargen, der kan indgå som et element i  $N$ .

## 8.2 Mål for betydning af inputparametre for elementsikkerhed

Ved inputparametre forstår vi de deterministiske inputvariable og statistiske parametre i fordelingerne for de stokastiske inputvariable. Følsomheden af sikkerhedsmålet overfor ændringer i disse inputparametre er vigtig for en forudsigelse af ændringen i sikkerhed ved en eventuel ændring i konstruktionens dimensioner. I forbindelse med optimering baseret på mindste forventede totale omkostninger kan følsomhederne anvendes i de iterative løsningsmetoder.

For et lokalt mest centralt punkt  $\mathbf{y}$  på grænsetilstandsfladen i det standardiserede gaussiske rum gælder, se (8.1.1) og (8.1.2),

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\alpha}\beta \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha} - \nabla g(\mathbf{y}; \theta) \quad , \quad \nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \right\} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}' \boldsymbol{\alpha} = 1 \quad (3)$$

$$g(\mathbf{y}; \theta) = 0 \quad (4)$$

hvor  $\theta$  er en parameter, og  $g(\cdot; \theta)$  er grænsetilstandsfunktionen. Det følger heraf, at  $\beta$  er en funktion af  $\theta$ . Følsomheden af  $\beta$  over for ændringer i  $\theta$  måles ved den afledede  $d\beta/d\theta$ .

For udregning af  $d\beta/d\theta$  er det bekvemt at definere grænsetilstandsfunktionen således, at gradienten af  $g$  overalt på grænsetilstandsfladen har længden 1, dvs

$$\|\nabla g(\mathbf{y}; \theta)\| = 1 \quad \text{overalt hvor } g(\mathbf{y}; \theta) = 0 \quad (5)$$

**Bemærkning 8.1** Hvis  $g$  ikke er defineret, så (5) er opfyldt, behøver vi blot at dividere  $g$  med  $\|\nabla g\|$ . Det ses nemlig, at

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \frac{g}{\|\nabla g\|} = \frac{\|\nabla g\| \frac{\partial g}{\partial \theta} - g \frac{\partial}{\partial \theta} \|\nabla g\|}{\|\nabla g\|^2} = \frac{1}{\|\nabla g\|} \frac{\partial g}{\partial \theta} \quad (6)$$

overalt hvor  $g(\cdot; \theta) = 0$ , dvs overalt på grænsetilstandsfladen. Heraf følger specielt, at (5) gælder med  $g$  erstattet af  $g/\|\nabla g\|$ .  $\square$

Formlerne (1) og (3) viser, at

$$\beta = \boldsymbol{\alpha}' \mathbf{y} \quad (7)$$

der giver

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{d\boldsymbol{\alpha}'}{d\theta} \mathbf{y} + \boldsymbol{\alpha}' \frac{d\mathbf{y}}{d\theta} = \boldsymbol{\alpha}' \frac{d\mathbf{y}}{d\theta} \quad (8)$$

At første led på højre side af (8) er nul ses af, at  $\mathbf{y} = \boldsymbol{\alpha}\beta$ , og at  $d\boldsymbol{\alpha}/d\theta$  og  $\boldsymbol{\alpha}$  er indbyrdes ortogonale. Ortogonaliteten bevises umiddelbart ved at differentiere (3). Differentiation af (4) giver

$$\frac{dg}{d\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i} \frac{dy_i}{d\theta} + \frac{\partial g}{\partial \theta} = -\boldsymbol{\alpha}' \frac{d\mathbf{y}}{d\theta} + \frac{\partial g}{\partial \theta} = 0 \quad (9)$$

hvor (2) er benyttet. Ved sammenligning af (8) og (9) ses, at  $d\beta/d\theta = \partial g/\partial \theta$ . Hvis (5) ikke er opfyldt, benyttes (6), og vi finder parameterfølsomhedsfaktoren

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{1}{\|\nabla g\|} \frac{\partial g}{\partial \theta} \quad (10)$$

der udregnes i det lokalt mest centrale grænsetilstandspunkt, der svarer til det betragtede geometriske sikkerhedsindeks.

**Bemærkning 8.2** Ved visse anvendelser har man brug for den afledede af normalenhedsvektoren  $\boldsymbol{\alpha}$  med hensyn til parameteren  $\theta$ . Under forudsætningen (5) har vi

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{d\theta} = -\frac{d\nabla g}{d\theta} = -\frac{d}{d\theta} \left\{ \frac{\partial g}{\partial y_i} \right\} = -\left\{ \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j} \frac{dy_j}{d\theta} \right\} - \frac{\partial \nabla g}{\partial \theta} \quad (11)$$

eller

$$\frac{d\alpha}{d\theta} + D \left[ \frac{d\alpha}{d\theta} \beta + \alpha \frac{d\beta}{d\theta} \right] + \frac{\partial \nabla g}{\partial \theta} = 0 \quad (12)$$

hvor

$$D = \left\{ \frac{\partial^2 g}{\partial y_i \partial y_j} \right\} = \left[ -\frac{\partial \alpha}{\partial y_1} \dots -\frac{\partial \alpha}{\partial y_n} \right] \quad (13)$$

Det ses, at  $D\alpha = 0$ . Benyttes dette i (12), fås resultatet

$$\frac{d\alpha}{d\theta} = -(I + \beta D)^{-1} \frac{\partial \nabla g}{\partial \theta} \quad (14)$$

□

FORM-tilnærmelsen til svigtsandsynligheden er

$$P(\mathcal{F}) = \Phi(-\beta) \quad (15)$$

Den afledede af svigtsandsynligheden er

$$\frac{dP(\mathcal{F})}{d\theta} = -\varphi(\beta) \frac{d\beta}{d\theta} \quad (16)$$

Tilsvarende er den afledede af den naturlige logaritme til  $P(\mathcal{F})$

$$\frac{d \log P(\mathcal{F})}{d\theta} = -\frac{\varphi(\beta)}{\Phi(-\beta)} \frac{d\beta}{d\theta} \quad (17)$$

For store værdier af  $\beta$  gælder  $\varphi(\beta)/\Phi(-\beta) \simeq \beta$ , hvorved resultatet forenkles.

Såfremt man afbilder  $P(\mathcal{F})$  som en funktion af en inputparameter, fås i de fleste tilfælde en stærkt krummet kurve. Afbildes derimod  $\beta$  eller  $\log P(\mathcal{F})$  som en funktion af inputparameteren, fås oftest en svagt krummet kurve. Lad svigtsandsynligheden være bestemt for en værdi  $\theta$  af inputparameteren. Vi ønsker at bestemme den for værdien  $\theta + \Delta\theta$ . En beregning baseret på

$$P(\mathcal{F}(\theta + \Delta\theta)) \simeq P(\mathcal{F}(\theta)) + \frac{dP(\mathcal{F}(\theta))}{d\theta} \Delta\theta \quad (18)$$

vil derfor ofte være dårlig undtagen for meget små værdier af  $\Delta\theta$ . Derimod vil en beregning baseret på

$$P(\mathcal{F}(\theta + \Delta\theta)) = \Phi[-(\beta + \Delta\beta)] \simeq \Phi[-(\beta + \frac{d\beta}{d\theta} \Delta\theta)] \quad (19)$$

ofte være god selv for temmelig store værdier af  $\Delta\theta$ . Tilsvarende fås ofte en god approksimation ved at sætte

$$P(\mathcal{F}(\theta + \Delta\theta)) \simeq \exp\{\log P(\mathcal{F}(\theta)) + \frac{d \log P(\mathcal{F}(\theta))}{d\theta} \Delta\theta\} \quad (20)$$

**Bemærkning 8.3** For brugen af formlen (10) er der to hovedtilfælde. Det ene tilfælde fremkommer hvis  $\theta$  er en deterministisk inputvariabel, dvs en parameter, der har indflydelse på grænsetilstanden. Vi kan da udtrykke de sammenhørende grænsetilstandsfunktioner i rummene af frie fysiske inputvariable og standardiserede gaussiske variable ved

$$g(\mathbf{y}; \theta) = g[T(\mathbf{x}); \theta] = G(\mathbf{x}; \theta) \quad (21)$$

hvor  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$  er den givne transformation. Det følger da, at

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \frac{\partial G}{\partial \theta} \quad (22)$$

Det andet tilfælde fremkommer, hvis  $\theta$  er en statistisk fordelingsparameter. En sådan parameter har ikke indflydelse på grænsetilstanden i det frie fysiske formuleringsrum. Indflydelsen på grænsetilstanden i det standardiserede gaussiske rum kommer alene gennem transformationen  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x}; \theta)$ . Vi har

$$g[T(\mathbf{x}; \theta); \theta] = G(\mathbf{x}) \quad (23)$$

hvor højre side er uafhængig af  $\theta$ . Derfor gælder, at den partielle afledede af venstre side af (23) med hensyn til  $\theta$  er identisk nul, altså:

$$\nabla g' \frac{\partial T(\mathbf{x}; \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial \theta} \equiv 0 \quad (24)$$

hvorefter (10) med anvendelse af (2) giver

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \alpha' \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta} \quad (25)$$

Ved sammenligning med (8) ses, at  $\partial \mathbf{y} / \partial \theta = \partial T(\mathbf{x}; \theta) / \partial \theta$  udregnet i det betragtede lokalt mest centrale grænsetilstandspunkt er komponenten af  $d\mathbf{y} / d\theta$  i retning af  $\alpha$  □

**Eksempel 8.1** Lad inputvariablene være indbyrdes uafhængige og lad  $X_1$  være gaussisk med middelværdi  $\mu_1$  og standardafvigelse  $\sigma_1$ . Transformationen  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$  kan altså vælges som den marginale transformation. I første variabel er den

$$y_1 = \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \quad (26)$$

Følsomhedsfaktorerne for parametrene  $\mu_1$  og  $\sigma_1$  er da

$$\frac{d\beta}{d\mu_1} = \alpha_1 \frac{d}{d\mu_1} \left[ \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right] = -\frac{\alpha_1}{\sigma_1} \quad (27)$$

$$\frac{d\beta}{d\sigma_1} = \alpha_1 \frac{d}{d\sigma_1} \left[ \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right] = -\alpha_1 \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1^2} = -\frac{\alpha_1 y_1}{\sigma_1} = -\frac{\beta \alpha_1^2}{\sigma_1} \quad (28)$$

□

**Øvelse 8.1** Lad inputvariablene være indbyrdes uafhængige og lad  $X_2$  være logaritmisk normalfordelt med middelværdi  $\mu_2$  og variationskoefficient  $V_2$ . Vis, at

$$\frac{d\beta}{d\mu_2} = -\frac{\alpha_2}{\mu_2 \sqrt{\log(1+V_2^2)}} \quad (29)$$

$$\frac{d\beta}{dV_2} = -\frac{\alpha_2 V_2}{\sqrt{\log(1+V_2^2)} (1+V_2^2)} \left[ \frac{\beta \alpha_2}{\sqrt{\log(1+V_2^2)}} - 1 \right] \quad (30)$$

□

### 8.3 Mål for betydning af inputparametre for sikkerhed af parallelsystem \*

Vi vil i dette afsnit betragte en svigtmængde, der har formen

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_i \quad (1)$$

dvs en svigtmængde af parallelsystemtype. Grænsetilstandsfunktionen hørende til  $\mathcal{F}_i$  i det standardiserede gaussiske rum betegnes  $g_i(\cdot)$ , og den er defineret således, at dens gradient overalt på den tilsvarende grænsetilstandsflade har længden 1, se (8.2.5). Det globalt mest centrale punkt  $\mathbf{y}$  på randen  $\partial \mathcal{F}$  er bestemt ved løsning af optimeringsproblemet

$$\min |\mathbf{y}| \quad \text{givet} \quad g_1(\mathbf{y}) \leq 0, \dots, g_m(\mathbf{y}) \leq 0 \quad (2)$$

De enkelte svigtmængder  $\mathcal{F}_i$  tænkes nummereret således, at vi for den optimale løsning  $\mathbf{y}$  har

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{y}) &= \dots = g_q(\mathbf{y}) = 0 \\ g_{q+1}(\mathbf{y}) &< 0, \dots, g_m(\mathbf{y}) < 0 \end{aligned} \quad (3)$$

FORM-tilnærmelsen (enkelt punkt multipel FORM) til svigtsandsynligheden er da givet ved formel (6.6.7):

$$P(\mathcal{F}) \simeq \Phi_q(-\beta; \mathbf{P}) \quad (4)$$

hvor  $\mathbf{P}$  er matricen af korrelationskoefficienter mellem de i punktet  $\mathbf{y}$  lineariserede sikkerhedsmargener. Den afledede af  $\Phi_q(-\beta; \mathbf{P})$  med hensyn til en inputparameter  $\theta$  er

$$\frac{d\Phi_q(-\beta; \mathbf{P})}{d\theta} = \sum_{i=1}^q \left[ -\frac{\partial\Phi_q}{\partial x_i} \frac{d\beta_i}{d\theta} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial\Phi_q}{\partial \rho_{ij}} \frac{d\rho_{ij}}{d\theta} \right] \quad (5)$$

For de partielle afledede af  $\Phi_q$  haves, se bemærkning 8.3,

$$\frac{\partial\Phi_q(x; \mathbf{P})}{\partial x_i} = \varphi(x_i) \Phi_{q-1}(x^i - \rho_i^i x_i, \mathbf{P}^i - \rho_i^i \rho_i^i) \quad (6)$$

$$\frac{\partial\Phi_q(x; \mathbf{P})}{\partial \rho_{ij}} = \frac{\partial^2\Phi_q(x; \mathbf{P})}{\partial x_i \partial x_j} = \varphi_2(x_i, x_j; \rho_{ij}) \quad (7)$$

$$\Phi_{q-2} \left[ x^{ij} - [\rho_i^{ij} \rho_j^{ij}] \begin{bmatrix} 1 & \rho_{ij} \\ \rho_{ij} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix}; \mathbf{P}^{ij} - [\rho_i^{ij} \rho_j^{ij}] \begin{bmatrix} 1 & \rho_{ij} \\ \rho_{ij} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_i^{ij} \\ \rho_j^{ij} \end{bmatrix} \right]$$

I disse formler er  $x^i$  fremkommet ved at slette den ite række i  $\mathbf{x}$ , dvs elementet  $x_i$ . Tilsvarende er  $x^{ij}$  fremkommet ved at slette den ite og jte række i  $\mathbf{x}$ .  $\rho_i^i$  er den ite søjle i  $\mathbf{P}$  efter sletning af den ite række, medens  $\rho_i^{ij}$  er den ite søjle i  $\mathbf{P}$  efter sletning af både den ite og den jte række;  $\mathbf{P}^i$  fremkommer ved at slette den ite række og søjle i  $\mathbf{P}$  og  $\mathbf{P}^{ij}$  ved at slette både ite og jte række og søjle i  $\mathbf{P}$ .

Vektoren  $\beta$  af simple sikkerhedsindeks svarende til de  $q$  tangerende hyperplaner i punktet  $\mathbf{y}$  kan åbenbart skrives

$$\beta = \mathbf{A}' \mathbf{y} \quad (8)$$

hvor  $\mathbf{A} = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_q]$  og  $\alpha_i$  er normalenhedsvektoren til den ite hyperplan. Vektoren af tilsvarende sikkerhedsmargener kan da skrives

$$\mathbf{M} = \beta + \mathbf{A}' \mathbf{Y} \quad (9)$$

hvoraf følger, at korrelationsmatricen  $\mathbf{P}$  er bestemt ved

$$\mathbf{P} = \text{Cov}[\mathbf{A}'\mathbf{Y}, \mathbf{Y}'\mathbf{A}] = \mathbf{A}'\mathbf{A} \quad (10)$$

Da  $\mathbf{y}$  er det mest centrale punkt i fællesmængden af de  $q$  tangerende hyperplaner, må  $\mathbf{y}$  tilhøre det  $q$ -dimensionale underrum, der udspændes af  $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ . I modsat fald ville projektionen af  $\mathbf{y}$  på dette underrum fremstille et punkt i fællesmængden med mindre afstand til nulpunktet. Heraf følger, at der findes en  $q$ -dimensional vektor  $\lambda$ , således at

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\lambda \quad (11)$$

Dette kan også ses ved at søge minimum for  $\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\mathbf{g}(\mathbf{y})'\lambda$ , hvor  $\lambda$  er Lagrangemultiplikatoren. Ved multiplikation af (11) forfra med  $\mathbf{A}'$  og brug af (8) og (10) ses, at der er følgende relation mellem  $\lambda$  og  $\beta$ :

$$\beta = \mathbf{P}\lambda \quad (12)$$

Differentiation af (11) med hensyn til parameteren  $\theta$  giver

$$\frac{d\mathbf{y}}{d\theta} = \frac{d\mathbf{A}}{d\theta} \lambda + \mathbf{A} \frac{d\lambda}{d\theta} \quad (13)$$

hvor

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{d\mathbf{A}}{dy_i} \frac{dy_i}{d\theta} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\theta} = \nabla\mathbf{A} * \frac{d\mathbf{y}}{d\theta} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial\theta} \quad (14)$$

med

$$\nabla\mathbf{A} = \left[ \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y_1} \quad \dots \quad \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y_n} \right] \quad (15)$$

Kompositionsreglen  $*$  er defineret ved (14) som en generaliseret række-søjle-multiplikation. Da



$$\sum_{j=1}^q \left[ \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_k} \frac{dy_k}{d\theta} \right] \lambda_j = \sum_{k=1}^n \left[ \sum_{j=1}^q \frac{\partial a_{ij}}{\partial y_k} \lambda_j \right] \frac{dy_k}{d\theta} \quad (16)$$

ses, at

$$\left[ \nabla A * \frac{dy}{d\theta} \right] \lambda = \left[ \nabla A \circ \lambda \right] \frac{dy}{d\theta} \quad (17)$$

hvor kompositionsreglen  $\circ$  er defineret ved

$$\nabla A \circ \lambda = \left[ \frac{\partial A}{\partial y_1} \lambda \quad \dots \quad \frac{\partial A}{\partial y_n} \lambda \right] \quad (18)$$

Ved indsætning af (14) i (13) og brug af (17) fås

$$\frac{dy}{d\theta} = \left[ \nabla A \circ \lambda \right] \frac{dy}{d\theta} + \frac{dA}{d\theta} \lambda + A \frac{d\lambda}{d\theta} \quad (19)$$

Implicit differentiation af ligningen  $g(y) = 0$  (den første linie i (3)) giver

$$A' \frac{dy}{d\theta} = \frac{\partial g}{\partial \theta} \quad (20)$$

fordi  $\nabla g = -A'$  under forudsætningen  $\|\nabla g_1\| = \dots = \|\nabla g_q\| = 1$ . Da  $A'A = P$ , kan (19) løses med hensyn til  $d\lambda/d\theta$  efter at den er blevet multipliceret forfra med  $A'$ . Med brug af (20) fås

$$\frac{d\lambda}{d\theta} = P^{-1} \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta} - A'(\nabla A \circ \lambda) \frac{dy}{d\theta} - A' \frac{\partial A}{\partial \theta} \lambda \right] \quad (21)$$

Dette resultat indsættes i (19), der derefter omordnes til

$$\left[ I + (AP^{-1}A' - I)(\nabla A \circ \lambda) \right] \frac{dy}{d\theta} = AP^{-1} \frac{\partial g}{\partial \theta} - (AP^{-1}A' - I) \frac{\partial A}{\partial \theta} \lambda \quad (22)$$

Herefter kan den afledede  $d\beta/d\theta$ , som skal bruges i (5), opskrives som følger:

$$\frac{d\beta}{d\theta} = \frac{dA'}{d\theta} y + A' \frac{dy}{d\theta} = (\nabla A' \circ y) \frac{dy}{d\theta} + \frac{dA'}{d\theta} y + \frac{\partial g}{\partial \theta} \quad (23)$$

hvor det sidste led på højre side fremkommer ved brug af (20), medens det første led følger af (14) og (17) med  $A'$  i stedet for  $A$  og  $y$  i stedet for  $\lambda$ . Ved løsning af (22) med hensyn til  $dy/d\theta$  og indsætning i (23) fremkommer slutresultatet

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\theta} &= (\nabla A' \circ y) [I + (AP^{-1}A' - I)(\nabla A \circ (P^{-1}\beta))]^{-1} \cdot \\ &\quad [AP^{-1} \frac{\partial g}{\partial \theta} - (AP^{-1}A' - I) \frac{\partial A}{\partial \theta} P^{-1}\beta] + \frac{\partial A'}{\partial \theta} y + \frac{\partial g}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (24)$$

I det specielle tilfælde, hvor  $q = n$ , reduceres matrixproduktet  $AP^{-1}A$  til enhedsmatricen  $I$ , således at (24) bliver

$$\frac{d\beta}{d\theta} = (\nabla A' \circ y) A'^{-1} \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\partial A'}{\partial \theta} y + \frac{\partial g}{\partial \theta} \quad (25)$$

svarende til, at  $dy/d\theta$  kan bestemmes direkte af (20).

I det andet ydertilfælde  $q = 1$  bliver  $A = \alpha$ ,  $P = 1$ ,  $\beta = \beta$ ,  $y = \beta\alpha$ ,  $g = g$ ,  $\lambda = \beta$ , således at (22) reduceres til

$$\left[ I - \beta \nabla \alpha \right] \frac{dy}{d\theta} = \alpha \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} \beta \quad (26)$$

ved brug af  $\alpha' \nabla \alpha = 0'$  og  $\alpha' \partial \alpha / \partial \theta = 0$ .

Da  $dy/d\theta = \beta d\alpha/d\theta + \alpha d\beta/d\theta$ ,  $(\nabla \alpha) \alpha = 0$ ,  $\partial \alpha / \partial \theta = -\partial \nabla g / \partial \theta$ ,  $d\beta/d\theta = \partial g / \partial \theta$  reduceres (26) yderligere til udtrykket (8.2.14) for  $d\alpha/d\theta$ .

De afledede  $d\rho_{ij}/d\theta$  af korrelationskoefficienterne skal også bruges i (5). De bestemmes ved differentiation af (10):

$$\frac{dP}{d\theta} = \frac{dA'}{d\theta} A + A' \frac{dA}{d\theta} \quad (27)$$

med, se (14),

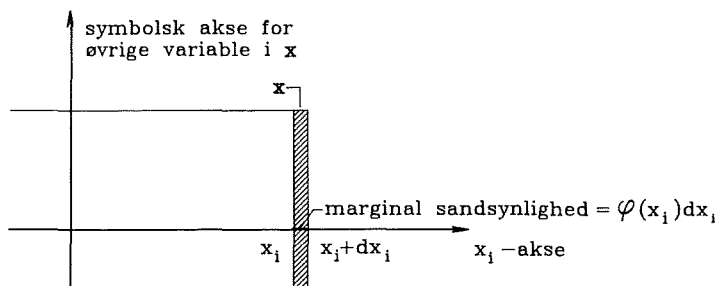
$$A' \frac{dA}{d\theta} = A' (\nabla A * \frac{dy}{d\theta}) + A' \frac{\partial A}{\partial \theta} = (A' \circ \nabla A) * \frac{dy}{d\theta} + A' \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad (28)$$

hvor  $dy/d\theta$  er bestemt ved (22). De afledede  $d\beta/d\theta$  og  $dP/d\theta$  udregnes alle i det globalt mest centrale grænsetilstandspunkt  $y$ . Det skal fremhæves endnu engang, at alle formler er baseret på, at  $\|\nabla g_i\| = 1$  på den ite grænsetilstandsflade for alle  $i \in \{1, \dots, q\}$ .

Når den afledede af tilnærmelsen til  $P(\mathcal{F})$  er bestemt, kan den afledede af det tilhørende generaliserede sikkerhedsindex  $\beta$  bestemmes ved

$$\frac{d\beta}{d\theta} = -\frac{dP(\mathcal{F})/d\theta}{\varphi(\beta)} \quad (29)$$

**Bemærkning 8.3** Formlen (6) for den partielle afledede af den  $q$ -dimensionale normale fordelingsfunktion  $\Phi_q(\mathbf{x}; \mathbf{P})$  med hensyn til  $x_i$  udledes ved følgende betragtning, se figur 8.1. Den partielle afledede gange tilvæksten  $dx_i$  er netop sandsynligheden for at få et udfald i det infinitesimale område, der er antydnet ved skravering i figur 8.1. Denne sandsynlighed er åbenbart



Figur 8.1. Hjælpefigur til bestemmelse af  $\partial \Phi_q(\mathbf{x}; \mathbf{P}) / \partial x_i$ .

$$P(X \leq \mathbf{x} | X_i = x_i) \varphi(x_i) dx_i \quad (30)$$

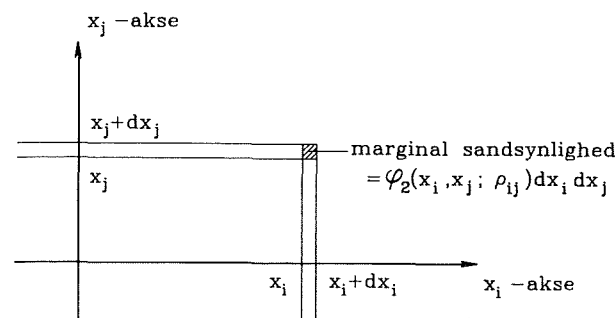
Den betingede sandsynlighed  $P(X \leq \mathbf{x} | X_i = x_i)$  er alene en funktion af  $\mathbf{x}^i$ , og den er den  $(q-1)$ -dimensionale normale fordelingsfunktion, der svarer til middelværdivektoren, se (4.3.8),

$$\hat{E}[X^i | X_i = x_i] = E[X^i] + \frac{\text{Cov}[X^i, X_i]}{\text{Var}[X_i]} (x_i - E[X_i]) = \rho_1^i x_i \quad (31)$$

og kovariansmatricen, se (4.3.9),

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[X^i - \hat{E}[X^i | X_i = x_i], (X^i - \hat{E}[X^i | X_i = x_i])'] = \\ & \text{Cov}[X^i, X^i] - \text{Cov}[X^i, X_i] \text{Cov}[X_i, X^i] / \text{Var}[X_i] = P^i - \rho_1^i \rho_1^{i'} \end{aligned} \quad (32)$$

Hermed har vi indset, at (6) gælder. Formlen (7) udledes på tilsvarende måde, se figur 8.2.



Figur 8.2. Hjælpefigur til bestemmelse af  $\partial^2 \Phi_q(\mathbf{x}; \mathbf{P}) / \partial x_i \partial x_j$ .

Den anden afledede med hensyn til  $x_i$  og  $x_j$  bliver åbenbart

$$P(X \leq \mathbf{x} | X_i = x_i, X_j = x_j) \varphi_2(x_i, x_j; \rho_{ij}) \quad (33)$$

Den betingede sandsynlighed er alene en funktion af  $\mathbf{x}^{ij}$ , og den er den  $(q-2)$ -dimensionale normale fordelingsfunktion, der svarer til middelværdivektoren, se (4.3.8),

$$\begin{aligned} & \hat{E}[X^{ij} | X_i = x_i, X_j = x_j] = \\ & \text{Cov}[X^{ij}, [X_i, X_j]] \begin{bmatrix} 1 & \rho_{ij} \\ \rho_{ij} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} = [\rho_1^{ij} \ \rho_2^{ij}] \begin{bmatrix} 1 & \rho_{ij} \\ \rho_{ij} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_i \\ x_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

og kovariansmatricen, se (4.3.9),

$$\text{Cov}[X^{ij}, X^{ij}] - [\rho_i^{ij} \rho_j^{ij}] \begin{bmatrix} 1 & \rho_{ij} \\ \rho_{ij} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_i^{ij} \\ \rho_j^{ij} \end{bmatrix} \quad (35)$$

hvor det første led er  $P^{ij}$ . Dermed har vi udledt højre side af (7).

Et bevis for identiteten

$$\frac{\partial \Phi_q(x; P)}{\partial \rho_{ij}} = \frac{\partial^2 \Phi_q(x; P)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (36)$$

kan findes i [8.2], se også øvelse 4.3.  $\square$

#### 8.4 Mål for betydning af inputparametre for sikkerhed af seriesystem \*

For et seriesystem er svigtområdet defineret som i afsnit 6.6 ved foreningsmængden

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i \quad (1)$$

Situationen er illustreret i figur 6.8. Ved flerpunkts FORM approksimeres svigtsandsynligheden  $P(\mathcal{F})$  ved

$$1 - P(M_1 > 0, \dots, M_m > 0) = 1 - P(-M_1 < 0, \dots, -M_m < 0) = 1 - \Phi_m(\beta; P) \quad (2)$$

hvor  $M_i$  er den lineære sikkerhedsmargen svarende til tangenthyperplanen i det globalt mest centrale punkt på den grænsetilstandsflade  $\partial \mathcal{F}_i$ , der er rand for  $\mathcal{F}_i$ . De tilsvarende simple sikkerhedsindices er samlet i vektoren  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$ , medens  $P = \{\rho_{ij}\} = \{\alpha_i^t \alpha_j\}$  er korrelationsmatricen for  $M = (M_1, \dots, M_m)$ . Vektoren  $\alpha_i$  er normalenhedsvektoren til den ite grænsetilstandsflade  $\partial \mathcal{F}_i$  i det globalt mest centrale punkt på  $\partial \mathcal{F}_i$ .

Den afledede af højre side af (2) med hensyn til en inputparameter  $\theta$  er

$$\frac{d[1 - \Phi_m(\beta; P)]}{d\theta} = - \sum_{i=1}^m \left[ \frac{\partial \Phi_m}{\partial \beta_i} \frac{d\beta_i}{d\theta} + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial \Phi_m}{\partial \rho_{ij}} \frac{d\rho_{ij}}{d\theta} \right] \quad (3)$$

hvor  $d\rho_{ij}/d\theta$  er givet ved (8.3.27) og (8.3.28), medens  $d\beta_i/d\theta$  er givet ved (8.2.10). Det skal også her fremhæves, at (8.3.28) kun gælder under den forudsætning, at grænsetilstandsfunktionen  $g_k$  er defineret således, at  $\|\nabla g_k\| = 1$  overalt på den kte grænsetilstandsflade for alle  $k \in \{1, \dots, m\}$ .

#### 8.5 Historiske og bibliografiske noter

Følsomhedsanalysens teknik er så gammel som differentialregningen. For sikkerhedsanalysens vedkommende er dens nytte især blevet påpeget af HOM, som er ophavsmand til udeladelsesfølsomhedsfaktoren, 1988 [8.3].

Det blev vist af M. Hohenbichler i 1984 [8.1], at det generaliserede sikkerhedsindeks og det geometriske sikkerhedsindeks asymptotisk (i samme forstand som i afsnit 6.4) har samme parameterfølsomhed. For endelige værdier af det geometriske sikkerhedsindeks er dette asymptotiske resultat naturligvis bedre for næsten plane grænsetilstandsflader end for eksempel for grænsetilstandsflader, der svarer til parallelsystemer, hvor det globalt mest centrale punkt ligger i skæringsmængden mellem de enkelte elementgrænsetilstandsflader.

Denne mindre nøjagtighed af det asymptotiske resultat for parallelsystemer har motiveret HOM til at udlede de omfattende eksplicite formler i afsnit 8.3.

#### Referencer

- 8.1 M. Hohenbichler: *Mathematische Grundlagen der Zuverlässigkeitsmethode und einige Erweiterungen*. Berichte zur Zuverlässigkeitstheorie der Bauwerke, Heft 72, Technical University of Munich, 1984.
- 8.2 N.L. Johnson and S. Kotz: *Distributions in Statistics: Continuous Multivariate distributions*, Wiley, New York, 1972.
- 8.3 H.O. Madsen: Omission Sensitivity Factors. *Structural Safety*, vol.5, 1988.

## 9. MONTE CARLO METODER

### 9.1 Simuleringsprincippet

Løsning af integrationsproblemer ved Monte Carlo metoder tager udgangspunkt i det forhold, at sandsynlighedsteorien blandt andre tolkninger kan tolkes som en matematisk teori for stikprøvegennemsnits opførsel og tendens til stabilitet med voksende stikprøvestørrelse. Denne tolkning er empirisk velbegrunderet. Det betyder, at man i stedet for at løse et givet integrationsproblem ved analytisk eller numerisk matematiske metoder kan udnytte, at integralet kan tolkes som en middelværdi i et passende stokastisk eksperiment (se nedenfor), og at man derfor kan bestemme et centralt skøn for integralets værdi ved at tage gennemsnit af et passende stort antal indbyrdes uafhængige udfald af dette eksperiment. Skønnets nøjagtighed kan vurderes ved brug af sædvanlige statistiske metoder.

Sandsynlighedsteorien selv forudsiger, at antallet af indbyrdes uafhængige udfald ofte skal være meget stort, før der kan opnås en tilfredsstillende god nøjagtighed ved denne empiriske metode, som i princippet svarer til at spille på rouletten i Monte Carlo. Den er da også først blevet et realistisk løsningsredskab efter udviklingen af hurtige datamater. Den mekaniske roulette erstattes i en datamat af en algoritme, der med stor hast frembringer en følge af såkaldte pseudotilfældige tal beliggende i intervallet  $]0,1[$ . Algoritmen er baseret på en matematisk rekursiv formel, der ud fra nogle få starttal (fx de første 3 elementer i følgen) genererer alle efterfølgende tal i følgen. Genereringsmekanismen er herved fuldstændig deterministisk. Den anvendte matematiske formalisme er imidlertid konstrueret således, at den frembringer resultater, der udviser kaotisk opførsel. Der kan formuleres mange forbavsende simple matematiske algoritmer, der giver talfølger med kaotisk opførsel. Det er en erfaringssag, at der blandt disse algoritmer findes nogle, der giver talfølger med egenskaber, der er vanskeligt skelnelige fra de egenskaber, som sandsynlighedsteorien tillægger tilfældige følger af tal mellem nul og en. Godheden af en sådan tilfældigtalsgenerator bedømmes ved at underkaste den genererede følge en række statistiske tests for uafhængighed og ensformig fordeling. Der findes altid et test, der kan afsløre, at en tilstrækkelig lang

talfølge er deterministisk genereret. Det er nemlig et resultat i teorien for endelige koder, at det altid er muligt på grundlag af en tilstrækkelig lang genereret talfølge entydigt at bestemme den matematiske genereringsmekanisme for følgen. Om generatoren er anvendelig til løsning af et givet integrationsproblem er altså et spørgsmål om robustheden af integralet over for afvigelser fra uafhængighed og ensformighed. De problemer, som man ønsker at løse ved Monte Carlo simulering på basis af en given tilfældigtalsgenerator, bør altså ikke være mere følsomme over for sådanne afvigelser end de tests, som generatoren er blevet underkastet og har passeret.

Man ser ofte i litteraturen en overvurdering af tilliden til resultater frembragt ved Monte Carlo simulering, fx ved at sådanne resultater betegnes som værende eksakte. For en given anvendelse bør man imidlertid altid overveje, om generatoren er god nok til formålet. Generelt set forøges en tilfældigtalsgenerators komplicerethed med de testkrav, der stilles til dem. Dette medvirker naturligvis til forøget regnetid. Ved robuste opgaver kan det derfor være fornuftigt at bruge en mindre god, men simpel generator, medens mindre robuste opgaver kræver en mere kompliceret generator. Med de i handelen værende datamater følger ofte et program for en tilfældigtalsgenerator, der for mange anvendelser ikke har tilstrækkelig kvalitet. En gennemtestet generator er givet i [9.4].

Monte Carlo metoder drejer sig som nævnt om at estimere værdien af et integral af en given funktion  $h(\mathbf{x})$  af  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  over en given delmængde  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ . Lad  $\mathbf{Z}$  være en vilkårlig  $n$ -dimensional stokastisk vektor med en tæthedsfunktion  $f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ , der er positiv overalt i  $\mathcal{S}$ . Vi har da

$$\int_{\mathcal{S}} h(\mathbf{x}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = \int_{\mathcal{S}} \frac{h(\mathbf{x})}{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x})} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{x}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = E \left[ \frac{h(\mathbf{Z})}{f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z})} \right] \quad (1)$$

hvor  $\mathcal{L}(d\mathbb{R}^n)$  er volumenmålet af det  $n$ -dimensionale infinitesimale volumenelement  $d\mathbb{R}^n$ .

Hvis vi kan generere en stikprøve af indbyrdes uafhængige udfald af den stokastiske variable  $X = h(\mathbf{Z})/f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z})$ , da vil gennemsnittet af denne stikprøve være en central estimator for forventningsværdien (1), altså for værdien af det givne integral. Jo mindre variation der er i stikprøven, des hurtigere

opnås et stabilt gennemsnit. Hvis eksempelvis  $h(\mathbf{z})$  er positiv overalt i  $\mathcal{F}$ , og integralet er endeligt, da er  $h(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}}$  proportional med en tæthedsfunktion. Vælges  $\mathbf{Z}$  som den stokastiske vektor, der har denne tæthed, da vil den stokastiske variable  $X$  være en konstant. I princippet kan man altså for en ikke-negativ integrand i (1) ved passende valg af fordelingen for  $\mathbf{Z}$  opnå en vilkårlig lille variation i stikprøven. Det praktiske problem er imidlertid at generere et udfald af  $\mathbf{Z}$ , og dette indskrænker i almindelighed de mulige valg af fordeling for  $\mathbf{Z}$ . Fordelingen for  $\mathbf{Z}$  vil vi betegne som *simuleringsfordelingen*.

I bærende konstruktioners sikkerhed har integrationsproblemet relevans ved bestemmelsen af svigtsandsynligheden

$$p_f = \int_{\mathcal{F}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = E[\mathbf{1}_{\mathbf{X} \in \mathcal{F}}] \quad (2)$$

Denne formel kan lede til at sætte  $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$ , altså at simulere udfald af  $\mathbf{X}$ . Da  $p_f$  sædvanligvis er meget lille, vil de aller fleste udfald af  $\mathbf{1}_{\mathbf{X} \in \mathcal{F}}$  være 0, og kun yderst sjældent vil værdien 1 forekomme. Det er åbenbart, at en sådan simuleringsmetode vil fungere meget dårligt. Det er naturligvis langt mere hensigtsmæssigt at vælge simuleringsfordelingen med en tæthed, der er nul i så store dele af den sikre mængde  $\mathcal{S}$  som muligt, men iøvrigt positiv overalt i  $\mathcal{F}$ . Mange forskellige forslag til valg af simuleringsfordelinger kan findes i litteraturen. De bedste af disse valg støtter sig på informationer fra FORM eller SORM om, hvor i  $\mathcal{F}$  de væsentligste bidrag til svigtsandsynligheden skal findes.

Vi vil ikke her gå ind på de forskellige i litteraturen omtalte muligheder for intelligent Monte Carlo simulering, men nøjes med at demonstrere en speciel fremgangsmåde, der har vist sig at være ganske effektiv ved estimering af små svigtsandsynligheder.

## 9.2 Retningssimulering

Lad os antage, at komplementærmængden  $\mathcal{S}$  til integrationsmængden  $\mathcal{F}$  i (9.1.1) har den egenskab at være stjerneformet med hensyn til nulpunktet i et polært koordinatsystem. En mængde siges at være stjerneformet med

hensyn til et punkt  $\mathbf{Q}$  i mængden selv, hvis enhver halvlinie startende fra  $\mathbf{Q}$  skærer randen i eet og kun eet punkt. Vi kan da på simpel måde reducere integralet (9.1.1) i et sådant polært koordinatsystem til

$$\int_{\mathcal{F}} h(\mathbf{x}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = \int_{\text{enheds-kuglen}} \left[ \int_{r(\boldsymbol{\alpha})}^{\infty} \frac{h(s\boldsymbol{\alpha})}{f_{\mathbf{Z}}(s\boldsymbol{\alpha})} f_{\mathbf{R}}(s|\boldsymbol{\alpha}) ds \right] f_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} = E \left[ \int_{r(\mathbf{A})}^{\infty} \frac{h(s\mathbf{A})}{f_{\mathbf{Z}}(s\mathbf{A})} f_{\mathbf{R}}(s|\mathbf{A}) ds \right] \quad (1)$$

hvor  $\boldsymbol{\alpha}$  er retningsenhedsvektoren,  $r(\boldsymbol{\alpha})$  er radiusvektor i retningen  $\boldsymbol{\alpha}$  til randen  $\partial\mathcal{F}$  af  $\mathcal{F}$ , medens  $f_{\mathbf{R}}(s|\boldsymbol{\alpha})$  er den betingede tæthedsfunktion for  $\mathbf{R}$  givet  $\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}$ , hvor  $\mathbf{R}$  og  $\mathbf{A}$  er henholdsvis radiusvektorkomponenten og retningsenhedsvektorkomponenten i den polære repræsentation

$$\mathbf{Z} = \mathbf{R}\mathbf{A} \quad (2)$$

af  $\mathbf{Z}$ . For det specielle valg, hvor  $\mathcal{F}$  er svigtområdet, og  $h(\mathbf{x}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , bliver integralet (1) netop svigtsandsynligheden  $p_f$  givet i (9.1.2).

Af (1) ses, at vi kan anvende en Monte Carlo metode, hvor vi i stedet for direkte at bruge det simulerede udfald af  $\mathbf{Z}$  i (9.1.1) bruger den simulerede retning  $\mathbf{A}$  bestemt ved hjælp af det simulerede udfald af  $\mathbf{Z}$ , idet (2) giver

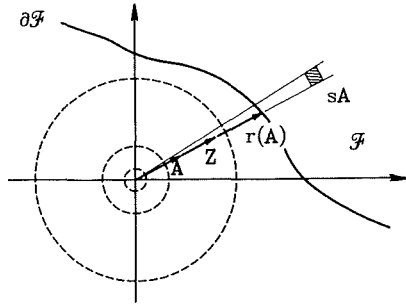
$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{Z}}{\|\mathbf{Z}\|} \quad (3)$$

hvor  $\|\mathbf{Z}\| = R = \sqrt{Z_1^2 + \dots + Z_n^2}$ . For udfaldet  $\boldsymbol{\alpha}$  af  $\mathbf{A}$  udregnes dernæst værdien af *simuleringsvariablen*

$$\int_{r(\boldsymbol{\alpha})}^{\infty} \frac{h(s\boldsymbol{\alpha})}{f_{\mathbf{Z}}(s\boldsymbol{\alpha})} f_{\mathbf{R}}(s|\boldsymbol{\alpha}) ds \quad (4)$$

ved en passende numerisk integrationsformel som fx trapezformlen, eller hvis det er muligt, ved en færdig formel for integralet.

En sådan færdig formel eksisterer fx, hvis  $h(\mathbf{x})$  er den  $n$ -dimensionale standardiserede normale tæthed  $\varphi_n(\mathbf{x})$ , og simuleringsfordelingen vælges som samme fordeling, se figur 9.1. Det gælder da, at  $R^2$  er  $\chi^2$ -fordelt med  $n$  frihedsgrader.



Figur 9.1. Ensformig retningssimulering.

Integralet (4) reduceres derfor til

$$\int_{r(\alpha)}^{\infty} f_R(s|\alpha) ds = 1 - K_n[r(\alpha)^2] \quad (5)$$

hvor  $K_n(\cdot)$  er fordelingsfunktionen for  $\chi^2$ -fordelingen med  $n$  frihedsgrader. Der gælder følgende færdige formel

$$K_n(r^2) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-\frac{r^2}{2}\right] \sum_{q=0}^{(n-2)/2} \frac{1}{q!} \left[\frac{r^2}{2}\right]^q & \text{for } n \text{ lige} \\ 2\Phi(r) - 1 - \exp\left[-\frac{r^2}{2}\right] \sum_{q=0}^{(n-3)/2} \frac{1}{\Gamma\left[\frac{q+3}{2}\right]} \left[\frac{r^2}{2}\right]^{(2q+1)/2} & \text{for } n \text{ ulige} \end{cases} \quad (6)$$

Anvendt til estimering af små svigtsandsynligheder undgår den på (1) baserede Monte Carlo retningssimuleringsmetode det problem, som var åbenbart

i forbindelse med (9.1.2), at kun meget få simulerede punkter ville falde i  $\mathcal{F}$ . Ved retningssimulering fås et bidrag forskellig fra nul hver gang, der fås en endelig radiusvektorværdi  $r(\alpha)$ . For retningen  $\alpha$ , hvor randen  $\partial\mathcal{F}$  er i det uendelige, fås naturligvis  $r(\alpha) = \infty$  og dermed giver integralet (4) stikprøveværdien nul. I bærende konstruktioners sikkerhed vil svigtængden  $\mathcal{F}$  som regel være tæt ved mindst at udfylde et halvrum. Hvis simuleringsfordelingen er valgt således, at  $\mathbf{A}$  er ensformig fordelt på enhedskuglen, må det forventes, at en væsentlig brøkdel af udfaldene vi give  $r(\alpha) < \infty$ . (Det overlades til læseren at overbevise sig om, at man for hver simuleret retning  $\alpha$  også kan bruge  $-\alpha$  som en simuleret retning og derved meget hyppigt opnå, at enten  $r(\alpha) < \infty$  eller  $r(-\alpha) < \infty$ . Det skal fremhæves, at man skal medtage gennemsnittet af resultaterne fra henholdsvis retning  $\alpha$  og retning  $-\alpha$  som et enkelt uafhængigt udfald i stikprøven. Endnu flere ved  $\alpha$  fastlagte retninger end  $\alpha$  og  $-\alpha$  kan inddrages. Der henvises herom til litteraturen [9.3,5]).

**Eksempel 9.1** Lad  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  være en gaussisk stokastisk vektor. Fordelingsfunktionen for summen

$$Y = \sum_{i=1}^n \max\{0, X_i\} \quad (7)$$

der anvendes i kapitel 10: "lastkombinationer", kan på simpel måde estimeres ved Monte Carlo retningssimulering med ensformig fordeling af  $\mathbf{A}$  over enhedskuglen i  $\mathbb{R}^n$  og brug af (5) som simuleringsvariabel. Hertil skal  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  først udtrykkes ved en standardiseret normalfordelt vektor  $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$  gennem den lineære substitution  $\mathbf{X} = \mathbf{T} \mathbf{U} + \boldsymbol{\mu}$ , hvor  $\boldsymbol{\mu}$  er middelværdivektoren af  $\mathbf{X}$  og matricen  $\mathbf{T}$  er bestemt ud fra kovariansmatricen  $\text{Cov}[\mathbf{X}, \mathbf{X}']$ . Lad den  $i$ te række i  $\mathbf{T}$  være  $t_i^j$  og lad  $\mathbf{U}$  være givet i den polære repræsentation  $\mathbf{U} = R \mathbf{A}$ . Vi kan da skrive (7) som

$$Y = \sum_{i=1}^n \max\{0, t_i^j A R + \mu_j\} \quad (8)$$

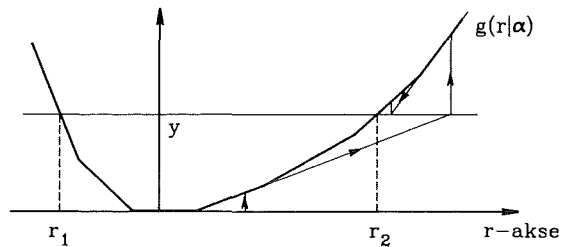
Funktionen

$$g(r|\alpha) = \sum_{i=1}^n \max\{0, t_i \alpha r + \mu_i\}, \quad r \in \mathbb{R} \quad (9)$$

er opbygget som en sum af konvekse funktioner af  $r$ , og den er derfor selv en konvex funktion af  $r$ . Det medfører, at mængden

$$\{r \in \mathbb{R} | g(r|\alpha) \leq y\} \quad (10)$$

er et interval  $[r_1, r_2]$ , se figur 9.2. Hvis  $r_1 \geq 0$



Figur 9.2. Grafen for den konvekse funktion (9.2.9).

har vi

$$P(Y \leq y | A = \alpha) = K_n(r_2^2) - K_n(r_1^2), \quad P(Y \leq y | A = -\alpha) = 0 \quad (11)$$

Hvis  $r_1 < 0$  og  $r_2 \geq 0$  har vi

$$P(Y \leq y | A = \alpha) = K_n(r_2^2), \quad P(Y \leq y | A = -\alpha) = K_n(r_1^2) \quad (12)$$

Hvis  $r_2 < 0$  har vi

$$P(Y \leq y | A = \alpha) = 0, \quad P(Y \leq y | A = -\alpha) = K_n(r_1^2) - K_n(r_2^2) \quad (13)$$

Heraf følger, at vi generelt har

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}P(Y \leq y | A = \alpha) + \frac{1}{2}P(Y \leq y | A = -\alpha) = \\ & \frac{1}{2} \text{sign}(r_2) K_n(r_2^2) - \frac{1}{2} \text{sign}(r_1) K_n(r_1^2) \end{aligned} \quad (14)$$

der ifølge den parentetiske bemærkning lige før dette eksempel er vor simuleringsvariabel, når  $A$  simuleres med ensformig fordeling over enhedskuglen, og vi benytter både  $A$  og  $-A$ . Vi bemærker, at hændelsen  $\{Y \leq y\}$  ikke nødvendigvis definerer en stjerneformet mængde med hensyn til nulpunktet i det standardiserede gaussiske rum (rummet for  $U$ ). Den har imidlertid den næsten lige så simple egenskab, at radiusvektor højst skærer mængdens rand i 2 punkter. Forudsætningen om, at mængden  $\mathcal{S}$  skal være stjerneformet, er ikke væsentlig. Den tjener blot til, at formlerne i fremstillingen kan skrives på den simplest mulige form.  $\square$

**Bemærkning 9.1** For at simulere udfald af  $A = U/\|U\|$  skal vi kunne simulere udfald af den  $n$ -dimensionale standardiserede gaussiske vektor  $U$ . Udfald  $x$  af en vilkårlig stokastisk variabel  $X$  kan altid simuleres ved brug af formlen

$$x = F_X^{-1}(y) \quad (15)$$

hvor  $y$  er et udfald af en stokastisk variabel, der er ensformig fordelt over intervallet  $]0,1[$ . Et sådant udfald kan fås fra en tilfældigtalsgenerator.

Det er undertiden hurtigere at bruge en anden formel end (15). Vi kan for eksempel generere to indbyrdes uafhængige udfald  $u_1, u_2$  af en standardiseret normalfordelt variabel  $U$  ved formlerne

$$u_1 = \sqrt{-2 \log y_1} \cos(2\pi y_2), \quad u_2 = \sqrt{-2 \log y_1} \sin(2\pi y_2) \quad (16)$$

hvor  $y_1$  og  $y_2$  er indbyrdes uafhængige udfald fra den ensformige fordeling over  $]0,1[$ . Disse formler følger direkte af den polære fremstilling for  $n = 2$ , idet  $P(R > r) = \exp[-\frac{1}{2}r^2]$ , der ifølge (15) fører til, at et udfald af  $R$  kan genereres som  $\sqrt{-\log y_1}$ .  $\square$

**Eksempel 9.2** Betragt to undersummer  $Y_1$  og  $Y_2$  af (7) og de tilsvarende undersummer af (8). For hver af disse kan vi definere funktioner  $g_1(r|\alpha)$  og  $g_2(r|\alpha)$  som i (9). Det gælder da, at

$$\{r \in \mathbb{R} | g_1(r|\alpha) \leq y_1\} = [r_{11}, r_{12}] \quad , \quad \{r \in \mathbb{R} | g_2(r|\alpha) \leq y_2\} = [r_{21}, r_{22}] \quad (16)$$

og dermed, at fællesmængden

$$\{r \in \mathbb{R} | g_1(r|\alpha) \leq y_1, g_2(r|\alpha) \leq y_2\} = [r_{11}, r_{12}] \cap [r_{21}, r_{22}] \quad (17)$$

er et interval  $[r_1, r_2]$ . Vi kan derfor bestemme fordelingsfunktionen

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = P(Y_1 \leq y_1, Y_2 \leq y_2) \quad (18)$$

ved ensformig retningssimulering med brug af (14) som simuleringssvariabel.

På grund af den stykkevise linearitet af funktionerne  $g_1(r|\alpha)$  og  $g_2(r|\alpha)$  er det også muligt ved retningssimulering at få et skøn for værdien af fordelingsfunktionen for differensen  $Y_1 - Y_2$  i et vilkårligt punkt  $y$ . Hvad der behøves, er blot at bestemme de endelig mange intervaller, for hvilke  $g_1(r|\alpha) - g_2(r|\alpha) \leq y$ .  $\square$

**Eksempel 9.3** Værdien af tæthedsfunktionen for summen (7) i eksempel 9.1 kan også bestemmes ved Monte Carlo retningssimulering. Dette ses ved at differentiere formlen

$$F_Y(y) = E\left[\frac{1}{2}P(Y \leq y|A) + \frac{1}{2}P(Y \leq y|-A)\right] \quad (19)$$

med (14) indsat. Vi får

$$f_Y(y) = E[\text{sign}(r_2) k_n(r_2^2) r_2 r_2' - \text{sign}(r_1) k_n(r_1^2) r_1 r_1'] \quad (20)$$

hvor  $k_n(\cdot)$  er tæthedsfunktionen svarende til  $K_n(\cdot)$ , og hvor  $r_1'$  og  $r_2'$  er givet ved

$$r' = 1 / \sum_{i \in J_r} t_i' A \quad (21)$$

$$J_r = \{i | t_i' A + \mu_i > 0\} \quad (22)$$

for henholdsvis  $r = r_1$  og  $r_2$ . For  $k_n(r^2)$  har vi den færdige formel

$$k_n(r^2) = \frac{r^{n-2} \exp[-\frac{1}{2}r^2]}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} \quad (23)$$

$\square$

### 9.3 En klasse af nyttige retningssimuleringsfordelinger \*

Nedenfor defineres en nyttig klasse af retningssimuleringsfordelinger. Vi vil dog først eksplicit give tre eksempler fra klassen. Disse er karakteriseret ved, at generering af udfald foregår på meget simpel måde. Vi har i forrige afsnit allerede arbejdet med det første af eksemplerne. Vi oplister dem som følger med reference til (9.2.1):

1)  $Z$  er standardiseret gaussisk og centreret i nulpunktet, se figur 9.1:

$$f_Z(sA) \propto \exp[-s^2/2] \quad (1)$$

$$\int_{\mathcal{A}} h(x) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = \frac{(2\pi)^{n/2}}{K} E\left[\int_{r(A)}^{\infty} h(sA) s^{n-1} ds\right] \quad (2)$$

$$K = \Gamma\left[\frac{n}{2}\right] 2^{\frac{n}{2}-1} \quad (3)$$

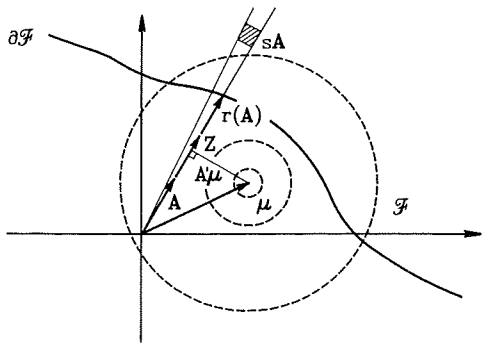
For  $h(x) = \varphi_n(x)$  fremkommer simuleringssvariablen (9.2.5)

2)  $Z$  er standardiseret gaussisk og centreret i punktet  $\mu$ , se figur 9.3:



$$f_{\mathbf{Z}}(s\mathbf{A}) = \varphi_n(s\mathbf{A} - \boldsymbol{\mu}) \quad (4)$$

$$\int_{\mathcal{F}} h(\mathbf{x}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varphi_n(\boldsymbol{\mu})} E \left[ \frac{\varphi(\mathbf{A}'\boldsymbol{\mu})}{K(\mathbf{A}'\boldsymbol{\mu})} \int_{\mathbf{r}(\mathbf{A})}^{\infty} h(s\mathbf{A}) s^{n-1} ds \right] \quad (5)$$



Figur 9.3. Illustration af brug af simuleringsfordeling, der er standardiseret gaussisk og centreret i punktet  $\boldsymbol{\mu}$ .

hvor  $K(\mathbf{A}'\boldsymbol{\mu})$  er givet ved funktionen

$$K(x) = \int_0^{\infty} s^{n-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(s-x)^2\right] dx \quad (6)$$

med  $K(0) = K$  givet ved (3). For  $h(\mathbf{x}) = \varphi_n(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})$  fremkommer

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi_n(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = E \left[ 1 - F_{\mathbf{R}}[r(\mathbf{A}) | \mathbf{A}] \right] \quad (7)$$

hvor den betingede fordelingsfunktion  $F_{\mathbf{R}}[x | \boldsymbol{\alpha}]$  kan bestemmes ved en algoritme, der er rekursiv i  $n$ , se bemærkning 9.2.

**Bemærkning 9.2** Integralet

$$I_{n-1}(x, y) = \int_x^{\infty} s^{n-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(s-y)^2\right] dx \quad (8)$$

kan ved delvis integration skrives

$$I_{n-1}(x, y) = \left[ \frac{1}{n} s^n \exp\left[-\frac{1}{2}(s-y)^2\right] \right]_x^{\infty} +$$

$$\frac{1}{n} \int_x^{\infty} (s-y) s^n \exp\left[-\frac{1}{2}(s-y)^2\right] ds =$$

$$\frac{1}{n} \left[ -x^n \exp\left[-\frac{1}{2}(x-y)^2\right] + I_{n+1}(x, y) - y I_n(x, y) \right] \quad (9)$$

således at vi har rekursionsformlen

$$I_{n+1}(x, y) = n I_{n-1}(x, y) + y I_n(x, y) + x^n \exp\left[-\frac{1}{2}(x-y)^2\right] \quad (10)$$

Man udregner umiddelbart, at

$$I_0(x, y) = \sqrt{2\pi} \Phi(y-x) \quad (11)$$

$$I_1(x, y) = \sqrt{2\pi} \Phi(y-x) x + \exp\left[-\frac{1}{2}(x-y)^2\right] \quad (12)$$

Funktionen i (6) er givet ved

$$K(x) = I_{n-1}(0, x) \quad (13)$$

medens den komplementære betingede fordelingsfunktion i (7) er

$$1 - F_{\mathbf{R}}[x | \boldsymbol{\alpha}] = I_{n-1}(x, \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\mu}) / I_{n-1}(0, \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\mu}) \quad (14)$$

□

3)  $\mathbf{Z}$  er blandet standardiseret gaussisk og halvrømstrunkeret standardiseret gaussisk, se figur 9.4:

$$f_{\mathbf{Z}}(s\mathbf{A}) = p \varphi_n(s\mathbf{A}) + (1-p) \varphi_{tr}(s\mathbf{A}; \boldsymbol{\nu}, d) \quad (15)$$

hvor  $p$  er blandingsandsynligheden, og

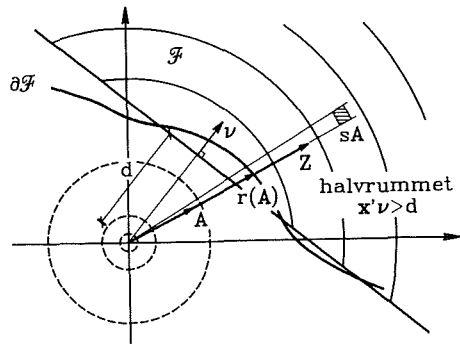
$$\varphi_{tr}(x; \nu, d) = \frac{\varphi_n(x)}{\Phi(-d)} \mathbf{1}_{x' \nu > 0} \quad (16)$$

er den halvrumstrunkerede standardiserede gaussiske tæthed svarende til trunkeringshyperplanen, der har normalenhedsvektoren  $\nu$  og afstanden  $d$  fra nulpunktet.

$$\int_{\mathcal{F}} h(x) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = (2\pi)^{n/2} \frac{\Phi(-d)}{K} E \left[ \frac{\int_{r(A)} h(sA) s^{n-1} ds}{p \Phi(-d) + (1-p) \left[ 1 - K_n \left[ \left( \frac{d}{A' \nu} \right)^2 \right] \right]} \mathbf{1}_{A' \nu > 0} \right] \quad (17)$$

med  $K$  givet ved (3) og  $K_n(\cdot)$  givet ved (9.2.6). For  $h(x) = \varphi_n(x)$  fås specielt

$$\int_{\mathcal{F}} \varphi_n(x) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = \Phi(-d) E \left[ \frac{1 - K_n \left[ r(A)^2 \right]}{p \Phi(-d) + (1-p) \left[ 1 - K_n \left[ \left( \frac{d}{A' \nu} \right)^2 \right] \right]} \mathbf{1}_{A' \nu > 0} \right] \quad (18)$$



Figur 9.4. Illustration af brug af simuleringsfordeling, der er blandet standardiseret gaussisk og halvrumstrunkeret standardiseret gaussisk.

Generering af udfald fra simuleringstæthederne (1) og (5) er på grundlag af bemærkning 9.1 uden problemer. For simuleringstætheden (17) genereres et udfald successivt ved først ved hjælp af et udtrukket tilfældigt tal at afgøre fra hvilken population af de to i blandingen udtrækningen skal foretages. En udtrækning fra den halvrumstrunkerede standardiserede gaussiske tæthed foretages ved først at generere et udfald af en  $n$ -dimensional standardiseret gaussisk vektor  $U$  og projicere denne på trunkeringshyperplanen. Herved fremkommer den singulære  $n$ -dimensionale gaussiske vektor  $U - (\nu' U) \nu$ . Ved til denne at addere  $W \nu$ , hvor  $W$  er en stokastisk variabel med den trunkerede gaussiske komplementære fordelingsfunktion

$$\bar{F}_W(x) = \frac{\Phi(-x)}{\Phi(-d)}, \quad x \geq d \quad (19)$$

fås

$$Z = U + (W - \nu' U) \nu \quad (20)$$

De foregående tre eksempler tilhører klassen af blandingsfordelinger mellem en standardiseret gaussisk fordeling og en  $\mathcal{D}$ -trunkeret standardiseret gaussisk fordeling begge centreret i punktet  $\mu$ . Symbolet  $\mathcal{D}$  står for en delmængde af  $\mathbb{R}^n$ . I det tredje eksempel er  $\mathcal{D}$  et halvrum, medens  $\mathcal{D} = \mathbb{R}^n$  i de to første eksempler. Vi har

$$f_Z(sA) = \varphi_n(sA - \mu) \left[ p + (1-p) \frac{\mathbf{1}_{sA \in \mathcal{D}}}{\int_{\mathcal{D}} \varphi_n(x - \mu) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n)} \right] \quad (21)$$

$$\int_{\mathcal{F}} h(x) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varphi_n(\mu)} \int_{\mathcal{D}} \varphi_n(x - \mu) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) \cdot \quad (22)$$

$$E \left[ \frac{\varphi(A' \mu) \int_{r(A)} h(sA) s^{n-1} ds}{p K(A' \mu) \int_{\mathcal{D}} \varphi_n(x - \mu) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) + (1-p) \int_0^\infty \mathbf{1}_{sA \in \mathcal{D}} s^{n-1} \exp \left[ -\frac{1}{2}(s - A' \mu)^2 \right] ds} \right]$$

Hensigtsmæssigheden ved at anvende Monte Carlo simulering til at bestemme et skøn for forventningsværdien i (22) afhænger foruden af muligheden for hurtig simulering af  $\mathbf{A} = \mathbf{Z}/\|\mathbf{Z}\|$  af de beregninger, der er krævet for at få værdier for integralerne

$$\int_{r(\mathbf{A})}^{\infty} h(s\mathbf{A}) s^{n-1} ds \quad (23)$$

$$\int_0^{\infty} 1_{s\mathbf{A} \in \mathcal{D}} s^{n-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(s-\mathbf{A}'\boldsymbol{\mu})^2\right] ds \quad (24)$$

for hvert udfald af  $\mathbf{A}$ . Hvis færdige formler ikke er tilgængelige for disse integraler, må man ty til numerisk integration. Herudover skal værdien af integralet

$$\int_{\mathcal{D}} \varphi_n(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) \quad (25)$$

være kendt. En separat Monte Carlo integration kan anvendes til fremskaffelse af en tilstrækkelig nøjagtig værdi.

Eksempler med mere generelle trunkeringsmængder  $\mathcal{D}$  end halvrum er studeret i litteraturen [9.2,7].

**Eksempel 9.4** Rammekonstruktionen i figur 6.7 betragtes. Flydemomenterne  $Y_1, \dots, Y_5$  antages at være indbyrdes uafhængige stokastiske variable med en fælles logaritmisk normalfordeling. Vi vil her nøjes med at se på mekanismen nederst til venstre i figur 6.7. Den plastiske dissipation er  $D = Y_1 + 2Y_3 + 2Y_4 + Y_5$ , medens det tilsvarende ydre arbejde er  $W = Fa + Gb$ . Sandsynligheden for kollaps er åbenbart lig med  $P(D \leq w) = F_D(w)$ . Det er bekvemt at udtrykke flydemomenterne og det ydre arbejde i en enhed, der er lig med flydemomenternes fælles middelværdi. Vi sætter altså denne middelværdi til 1 og indfører de normaliserede variable  $X_1 = (Y_1-1)/\gamma$ ,  $X_2 = (Y_3-1)/\gamma$ , ...,  $X_4 = (Y_5-1)/\gamma$ , hvor  $\gamma$  er flydemomenternes fælles variationskoefficient. Hermed kan dissipationen skrives som

$$D = \gamma(X_1 + 2X_2 + 2X_3 + X_4) + 6 \quad (26)$$

Det simple sikkerhedsindeks svarende til den lineære sikkerhedsmargen  $D - w$  er altså

$$\beta = \frac{6-w}{\gamma\sqrt{10}} \quad (27)$$

Som et eksempel lad  $\gamma = 0.25$  og  $\beta = 3.1$ , således at  $w = 3.55$ . Det viser sig, at vi for disse værdier ved Monte Carlo retningssimulering finder, at det generaliserede sikkerhedsindeks er tæt ved værdien 4.0. På grund af den logaritmiske normalfordeling og den ret store variationskoefficient undervurderer det simple sikkerhedsindeks således sikkerheden væsentligt i forhold til det generaliserede sikkerhedsindeks.

Svigtområdet, der svarer til hændelsen  $D \leq w$ , er den under hyperplanen

$$H: \gamma(x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4) + 6 - w = 0 \quad (28)$$

beliggende del af  $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 > -1, \dots, x_4 > -1\}$ . Vi vil vejledet heraf vælge en simuleringsfordeling, der er en  $\mathcal{D}$ -trunkeret standardiseret gaussisk fordeling centreret i et punkt  $\boldsymbol{\mu} \in H$ , hvor  $\mathcal{D}$  er det under hyperplanen  $H$  beliggende halvrum. Vi skal derfor bruge formlen (22) med  $p = 0$  og

$$\int_{\mathcal{D}} \varphi_n(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) = \frac{1}{2} \quad (29)$$

samt, se eksempel 7.1,

$$h(\mathbf{x}) = \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\gamma}{\sqrt{\log(1+\gamma^2)}(1+\gamma x_i)} \varphi \left[ \frac{\log\{(1+\gamma x_i)\sqrt{1+\gamma^2}\}}{\sqrt{\log(1+\gamma^2)}} \right] \right\} \quad (30)$$

Vi får

$$F_D(w) = \frac{1}{2}(2\pi)^{n/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{\mu}\|^2\right].$$

$$E \left[ \frac{\exp \left[ -\frac{1}{2}(\mathbf{A}'\boldsymbol{\mu})^2 \right] \int_{r_1(\mathbf{A})}^{r_2(\mathbf{A})} h(s\mathbf{A}) s^{n-1} ds}{\int_{r_1(\mathbf{A})}^{\infty} s^{n-1} \exp \left[ -\frac{1}{2}(s-\mathbf{A}'\boldsymbol{\mu})^2 \right] ds} \right] \quad (31)$$

hvor  $r_1(\mathbf{A})$  er radiusvektor til  $H$  i retningen  $\mathbf{A}$ , medens  $r_2(\mathbf{A})$  er radiusvektor til randen af mængden  $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 > -1, \dots, x_4 > -1\}$ . Normalenhedsvektoren til  $H$  er  $\boldsymbol{\nu} = -(1, 2, 2, 1)/\sqrt{10}$ , medens afstanden fra nulpunktet til  $H$  er  $d = \beta$ , (27). Vi har dermed

$$r_1(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{d}{\boldsymbol{\nu}'\boldsymbol{\alpha}} = \frac{6-w}{\gamma(-\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\alpha_3 - \alpha_4)} \quad (32)$$

$$r_2(\boldsymbol{\alpha}) = \min \left\{ \frac{1}{-\alpha_1}, \frac{1}{-\alpha_2}, \frac{1}{-\alpha_3}, \frac{1}{-\alpha_4} \right\} \quad (33)$$

Et passende valg af  $\boldsymbol{\mu} \in H$  er det ved nulpunktet nærmeste punkt  $\boldsymbol{\nu} d \in H$ . For hver genereret udfald  $\boldsymbol{\alpha}$  af  $\mathbf{A}$  udregnes integralet i tælleren (31) ved brug af trapezformlen, medens nævneren kan udregnes ved brug af den i bemærkning 9.2 givne formel. Vi skal ikke her gå ind på nøjagtighedsovervejelser vedrørende den numeriske integration, men blot henviser til [9.7]. Den fuldt optrukne kurve i diagrammet i øverste venstre hjørne af figur 9.5 viser udviklingen af det ved gennemsnitsdannelse bestemte skøn for  $F_D(3.55)$  med voksende stikprøvestørrelse. De to punkterede kurver giver grænserne for 95% konfidensintervallet estimeret fra stikprøven. Herved fås indtryk et af den nøjagtighed, der opnås ved simuleringen. Asymptotisk normalfordelingsteori kan for store stikprøver anvendes som grundlag for denne bedømmelse. Det ses, at  $F_D(3.55) \simeq 3,0 \cdot 10^{-5}$ , der svarer til det generaliserede sikkerhedsindeks 4.011. Ved praktiske opgaver bør man altid udtegne et sådant diagram. Man bemærker nemlig, at resultaterne først når en rimelig stabilitet for en passende stor stikprøvestørrelse. I praksis er det yderst vanskeligt at teoretisk vej at forudsige en stikprøvestørrelse, der er tilstrækkelig for opnåelse af et pålideligt resultat. Dette skyldes blandt andet,

at den komplicerede simuleringssimuleringsvariabels fordeling sædvanligvis ikke kendes. Stikprøvestørrelsen skal derfor være tilstrækkelig stor til, at asymptotisk normalfordelingsteori kan anvendes. Hvad der er tilstrækkeligt, afhænger imidlertid af simuleringssimuleringsvariabelens fordeling.

Man kan nu stille sig det spørgsmål, om et andet valg af  $\boldsymbol{\mu} \in H$  end  $\boldsymbol{\nu} d$  vil give en mindre variation i stikprøven. Ved at udnytte den information, der opnås løbende, som simuleringen skrider frem, er det muligt at forbedre valget af  $\boldsymbol{\mu}$ . Som indikator kan vi bruge følgen af simulerede stikprøveværdier  $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$ , hvor  $S_i$  er stikprøveværdien opnået ved  $i$ te simulering. I hvert skridt kontrolleres, om  $S_i > S_{\max} = \max\{S_1, \dots, S_{i-1}\}$ . Hvis dette er tilfældet, ændres  $\boldsymbol{\mu}$  til

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\alpha}_i) \quad (34)$$

i den fortsatte simulering. Hvis  $S_i \leq S_{\max}$  holdes  $\boldsymbol{\mu}$  uforandret. Herved opnås, at den centrale del af simuleringssimuleringens fordeling efter nogen simulering bliver placeret således, at de retninger, der bidrager mest til integralet, også hyppigst bliver udtrukket. Denne strategi er støttet på intuition og hviler på de samme principper som FORM og SORM. Der er imidlertid ikke givet bevis for, at denne fremgangsmåde repræsenterer den bedste strategi under de givne restriktioner, som er at  $\boldsymbol{\mu} \in H$ , og at simuleringssimuleringens trunkeringshalvrum er fastholdt med  $H$  som afgrænsende hyperplan. Mere almindeligt kan man naturligvis i løbet af simuleringen ændre på flere af de parametre, der fastlægger simuleringssimuleringens fordeling.

Med brug af den omtalte opdateringsstrategi er opnået den kurve, der er vist i diagrammet nederst til venstre i figur 9.5. Bortset fra den første fase af forløbet er der ikke drastisk forskel på resultaterne uden opdatering vist i øverste venstre diagram og resultaterne med opdatering. For en given stikprøvestørrelse findes standardafvigelsen ved metoden med opdatering at være ca 83% af standardafvigelsen opnået uden opdatering. En sammenligning af standardafvigelserne opnået for samme stikprøvestørrelse giver imidlertid ikke et korrekt billede af de to fremgangsmåders relative effektivitet. Regnetiden må naturligvis også tages i betragtning. Det er derfor nødvendigt at definere et mål for effektivitet, der i det mindste for store stikprøver er uafhængigt af stikprøvestørrelsen. En sådan definition er

$$\text{reciprok effektivitet} = V(N) \sqrt{T(N)} \quad (35)$$

hvor  $T(N)$  er den til stikprøvestørrelsen  $N$  svarende regnetid, og  $V(N)$  er en speciel variationskoefficient defineret ved

$$V(N) = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (S_i - \bar{S})^2} / \bar{S} \quad (36)$$

for

$$\bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \leq 0.5 \quad (37)$$

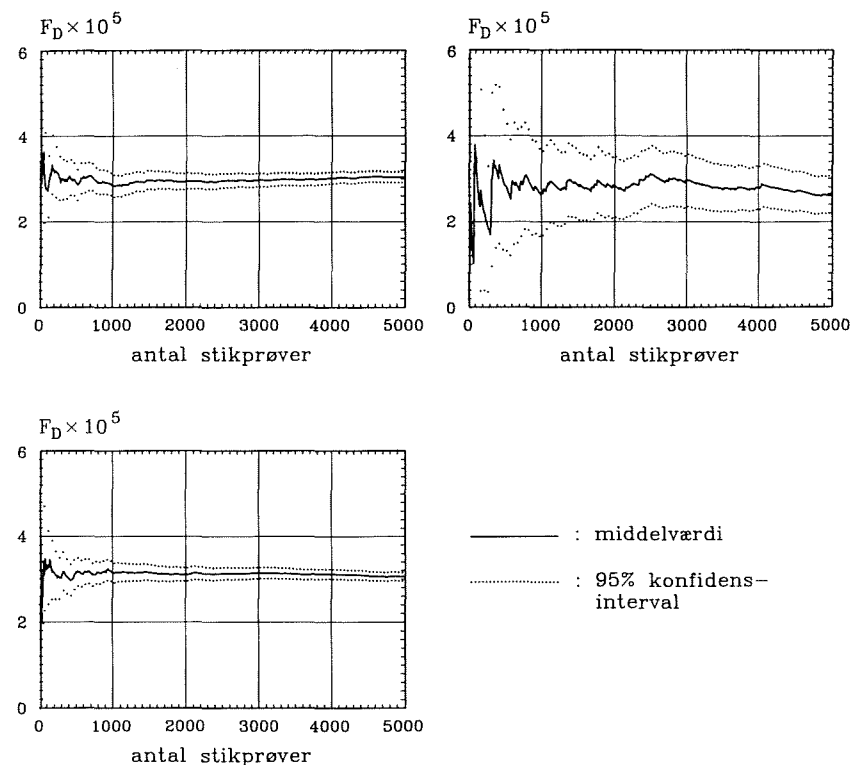
For  $\bar{S} > 0.5$  defineres  $V$  med faktoren  $1/(1-\bar{S})$  i stedet for faktoren  $1/\bar{S}$ . Den reciproke effektivitet er asymptotisk uafhængig af stikprøvestørrelsen  $N$  og dermed også af regnetiden  $T(N)$  for  $N \rightarrow \infty$ . Den afhænger naturligvis af den anvendte datamat og af effektiviteten af programmet. Anvendt på den samme datamat er den reciproke effektivitet derfor velegnet til sammenligning af to forskellige simuleringsprogrammer for det samme problem.

For de to ovenfor omtalte simuleringer uden og med opdatering af  $\mu$  er den reciproke effektivitet beregnet til henholdsvis 1.32 og 1.11. Opdateringen forbedrer altså med en faktor på 0.84 på den reciproke effektivitet.

Det i dette eksempel betragtede problem er også blevet løst ved først at transformere problemet til det standardiserede gaussiske rum. I dette rum er derefter udført ensformig retningssimulering på samme måde, som i eksempel 9.1 (med brug af både  $A$  og  $-A$ ). Denne simulering har givet diagrammet til højre i figur 9.5. Det ses, at standardafvigelsen for en given stikprøvestørrelse er ca 4 gange større end i diagrammet nederst til venstre. Dette illustrerer på overbevisende måde virkningen af intelligent valg af simuleringsfordeling. Vi må imidlertid som fremhævet ovenfor ikke bruge denne bedømmelse til sammenligningen, men i stedet udregne den reciproke effektivitet. Den er fundet til at være 1.88. Fra denne metode med ensformig retningssimulering i

det gaussiske rum til den ovenfor omtalte intelligente retningssimulering med opdatering er der altså kun en forbedring af den reciproke effektivitet med en faktor på 0.59.

Man kan ikke drage generelle konklusioner fra dette eksempel. På grund af den logaritmiske normalfordeling og uafhængigheden er transformationen til



Figur 9.5. Simuleringsudfald af stikprøvegennemsnittet som funktion af stikprøvestørrelsen for de simuleringsvariable, der er konstrueret til estimering af fordelingsfunksionsværdien  $F_D(w)$  for  $w = 3.55$  (eksempel 9.4). Diagrammerne til venstre svarer til brug af en simuleringsfordeling, der er en halvrumstrunkeret ( $\{D \leq w\}$ ) standardiseret gaussisk fordeling centreret i  $\mu \in H$  ( $H \sim \{D \leq w\}$ ). Øverst er  $\mu$  fastholdt som nulpunktets projektion på  $H$  og nederst er  $\mu \in H$  blevet løbende opdateret. De inverse effektiviteter er henholdsvis 1.32 og 1.11. Diagrammet til højre svarer til ensformig retningssimulering i det ved transformation frembragte standardiserede gaussiske rum. Den inverse effektivitet er bestemt til 1.88.

det gaussiske rum meget simpel. De yderst simple radiusvektorbestemmelser (32) og (33) erstattes dog med en mere tidskrævende bestemmelse af  $r(\alpha)$  ved en passende iterativ løsningsmetode. Til gengæld kan den færdige formel (9.2.7) for simuleringsvariablen være en fordel i forhold til den numeriske integration, der er nødvendig ved brugen af (31).

#### 9.4 Følsomhedsfaktorer \*

Antag, at integrationsområdet  $\mathcal{F}$  afhænger af en parameter  $\theta$ , og lad os skrive  $\mathcal{F}$  som  $\mathcal{F}(\theta)$ . Den afledede af (9.3.22) med hensyn til  $\theta$  bliver da

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathcal{F}(\theta)} h(x) \mathcal{L}(dR^n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varphi_n(\mu)} \int_{\mathcal{D}} \varphi_n(x-\mu) \mathcal{L}(dR^n) E \left[ \frac{-\varphi(A' \mu) h[r(A)A] r(A)^{n-1} \frac{\partial r(A)}{\partial \theta}}{\text{samme nævner som i (9.3.22)}} \right] \quad (1)$$

hvor  $\partial r(A)/\partial \theta$  bestemmes ved implicit differentiation af ligningen  $G(x;\theta) = 0$  for randen  $\partial \mathcal{F}(\theta)$  med  $x$  sat til  $x = r(A)A$ . Dette giver

$$\left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial G}{\partial x_i} A_i \right] \frac{\partial r(A)}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \quad (2)$$

eller

$$\frac{\partial r(A)}{\partial \theta} = \left[ \frac{-\frac{\partial G}{\partial \theta}}{(\nabla G)' A} \right]_{x=r(A)A} \quad (3)$$

hvor  $(\nabla G)' = \left[ \frac{\partial G}{\partial x_1} \dots \frac{\partial G}{\partial x_n} \right]$ . Følsomheden af integralet (9.3.22) med hensyn til  $\theta$  kan altså bestemmes ved den samme retningssimulering som integralet selv. Kun simuleringsvariablen er ændret til den i (1) definerede variabel. Vi har allerede anvendt dette princip i eksempel 9.3 til tæthedsfunktionsbestemmelse.

Antag, at det i stedet for integrationsområdet  $\mathcal{F}$  er integranden  $h(x)$ , der afhænger af en parameter  $\theta$ , og lad os skrive  $h(x)$  som  $h(x;\theta)$ . Da giver (9.3.22)

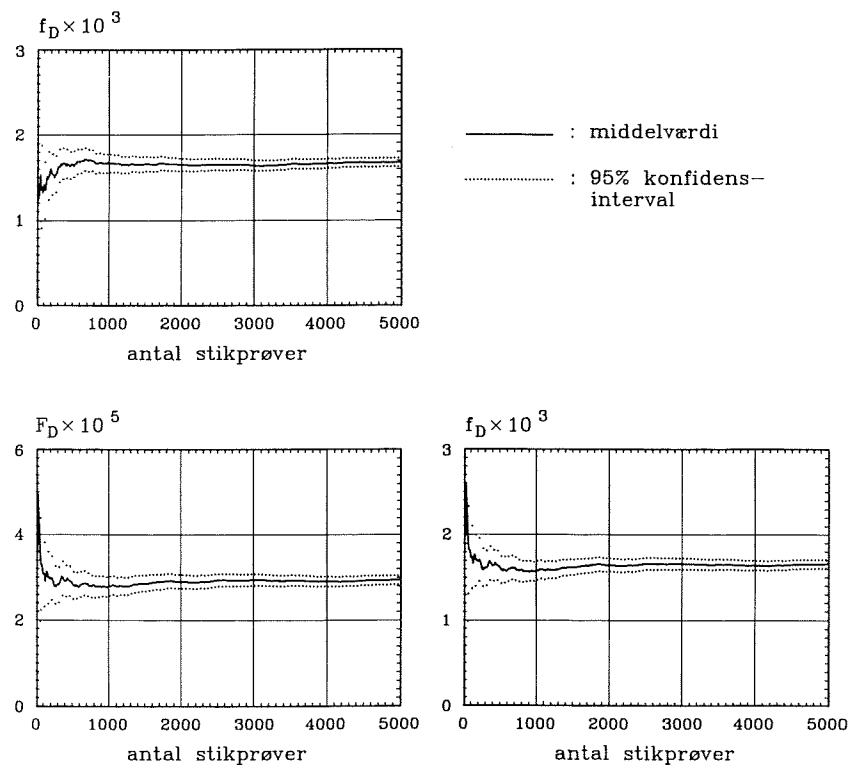
$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathcal{F}} h(x;\theta) \mathcal{L}(dR^n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varphi_n(\mu)} \int_{\mathcal{D}} \varphi_n(x-\mu) \mathcal{L}(dR^n) E \left[ \frac{\varphi(A' \mu) \int_{r(A)}^{\infty} \frac{\partial h(s; \theta)}{\partial \theta} s^{n-1} ds}{\text{samme nævner som i (9.3.22)}} \right] \quad (4)$$

hvor der i almindelighed som i (9.3.22) må anvendes numerisk integration for hvert simuleret udfald af  $A$ .

**Eksempel 9.5** For den stokastiske variabel  $D$  i eksempel 9.4 fås tæthedsfunktionen  $f_D(w)$  ved differentiation af (9.3.31) med hensyn til  $w$  alene gennem  $r_1(A)$  (svarende til (1) med  $\theta = w$ ). Alle andre afhængigheder af  $w$  er fastholdt konstant, fordi det kun er grænsetilstandshyperplanen, der skal varieres med  $w$  og ikke trunkeringshyperplanen for simuleringsfordelingen. Vi får

$$f_D(w) = \frac{1}{2} (2\pi)^{n/2} \exp\left[\frac{1}{2} \|\mu\|^2\right] \frac{(6-w)^{n-1}}{(\sqrt{10} \gamma)^n} \cdot E \left[ \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(A' \mu)^2\right] h\left[\frac{d}{\nu' A} A\right]}{(\nu' A)^n \int_{d/\nu' A}^{\infty} s^{n-1} \exp\left[-\frac{1}{2}(s-A' \mu)^2\right] ds} \right] \quad (5)$$

Figur 9.6 viser i øverste diagram den kurve, der er opnået for  $f_D(w)$  som funktion af stikprøvestørrelsen, når udregningen er gennemført ved de samme simuleringer, som blev anvendt til at producere det nederste diagram i figur 9.5. Den reciproke effektivitet er fundet til 0.95, idet det bemærkes, at denne svarer til samtidig udregning af  $F_D(W)$ , for hvilken den reciproke effektivitet blev bestemt til 1.11. Hvis en opdatering foretages ved brug af simuleringsvariablen i (5), fås de nederst i figur 9.6 viste diagrammer for  $F_D(w)$  og  $f_D(w)$ . De to reciproke effektiviteter bliver henholdsvis 1.16 og



Figur 9.6. Simuleringsudfald for både fordelingsfunktionsværdien  $F_D(w)$  og tæthedsfunktionsværdien  $f_D(w)$  for  $w = 3.55$ , se eksempel 9.5.

1.01. Ved udregning af  $f_D(w)$  alene fås den reciproke effektivitet 0.21.

### 9.5 Historiske og bibliografiske noter

Med udviklingen af de hurtige datamater er simuleringsmetoder blevet særdeles udbredt til udregning af svigtsandsynligheder. Om simulering i almindelighed kan henvises til *R.Y. Rubinstein* [9.11]. Anvendelser inden for bærende konstruktioners sikkerhed er blandt mange andre forskere blevet givet af *G. Augusti et al* [9.1], *A. Harbitz* [9.8], *M. Hohenbichler og R. Rackwitz* [9.9], *R.E. Melchers* [9.10], *M. Shinozuka* [9.12], *G.I. Schueller et al* [9.13].

Den specielle retningssimuleringsmetode beskrevet i det foregående blev først brugt af *I. Deák* i 1980 [9.3] til beregning af fordelingsfunktionsværdier i den  $n$ -dimensionale normale fordeling. Dens muligheder i bærende konstruktioners sikkerhed blev påpeget over for *OD* af *A.M. Hasofer* i 1984 med flere publikationer af *OD et al* til følge [9.4–7]. Bidrag til denne udvikling er også givet af *P. Bjerager* [9.2] og af *R.E. Melchers* blandt andet i samarbejde med *OD et al* [9.7].

### Referencer

- 9.1 G. Augusti, A. Baratta and F. Casciati: *Probabilistic Methods in Structural Engineering*. Chapman & Hall, London, 1984.
- 9.2 P. Bjerager: Probability Integration by Directional Simulation. *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.114, 1988.
- 9.3 I. Deák: Three Digit Accurate Multiple Normal Probabilities. *Numerische Mathematik*, vol.35, 1980.
- 9.4 O. Ditlevsen, R. Olesen and G. Mohr: Solution of a Class of Load Combination Problems by Directional Simulation. *Structural Safety*, vol.4, 1987.
- 9.5 O. Ditlevsen, P. Bjerager, R. Olesen, and A.M. Hasofer: Directional Simulation in Gaussian processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol.3, 1988.
- 9.6 O. Ditlevsen and P. Bjerager: Plastic Reliability Analysis by Directional Simulation. *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.115, 1989.
- 9.7 O. Ditlevsen, R.E. Melchers, and H. Gluver: General Multi-Dimensional Probability Integration by Directional Simulation. *Computers & Structures*, vol.36, 1990.
- 9.8 A. Harbitz: Efficient and Accurate Probability of Failure Calculation by the Use of Importance Sampling. In: *Proc. of 4th Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Structural Eng.* (ICASP 4). Pitagora Editrice, Bologna, Italy, 1983.
- 9.9 M. Hohenbichler and R. Rackwitz: Improvement of Second-Order Reliability Estimates by Importance Sampling. *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.114, 1988.
- 9.10 R.E. Melchers: *Structural Reliability and Predictions*. Ellis Horwood/Wiley, 1987.

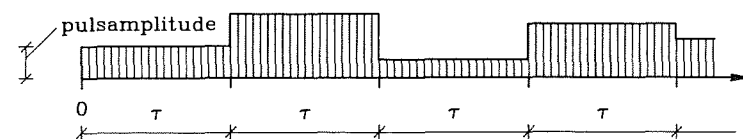
- 9.11 R.Y. Rubinstein: *Simulation and the Monte-Carlo Method*. Wiley, New York, 1981.
- 9.12 M. Shinozuka: Basic Analysis of Structural Safety. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, vol.109, 1983.
- 9.13 G.I. Schuëller and R. Stix: A Critical Appraisal of Methods to Determine Failure Probabilities, *Structural Safety*, vol.4, 1987.

## 10. LASTKOMBINATIONER

### 10.1 Ferry Borges–Castanheta lastmodellen

I den probabilistiske sikkerhedsanalyse modelleres lasterne i princippet som stokastiske variable, der er funktioner af både tid og sted på konstruktionen. Sådanne stokastiske funktioner kaldes sædvanligvis stokastiske processer, når de betragtes som funktion af tiden, og stokastiske felter, når deres variation i rummet (dvs over konstruktionen) betragtes. Vi vil i dette kapitel behandle en lastmodel, der er særligt simpelt konstrueret med hensyn til tidsvariationen. Modellen er idealiseret i en sådan grad, at man næppe kan sige, at den gengiver virkelighedstro detaljer i lastforløbet. På den anden side opfanger modellen den essentielle indflydelse på svigtandsynligheden af forekomsten af tilfældige ændringer af lastniveauet. Modellens struktur gør den desuden velegnet til lastkombinationsundersøgelser, hvor effekterne af adskillige lastforløb af den betragtede type adderes. Hertil kommer, at modellen er let beskrivelig i en normmæssig forskrift, idet den kan opfattes som en direkte detaljering af de idealiserede deterministiske lastformer, der foreskrives i de fleste nugældende lastnormer vedrørende statisk virkende laster.

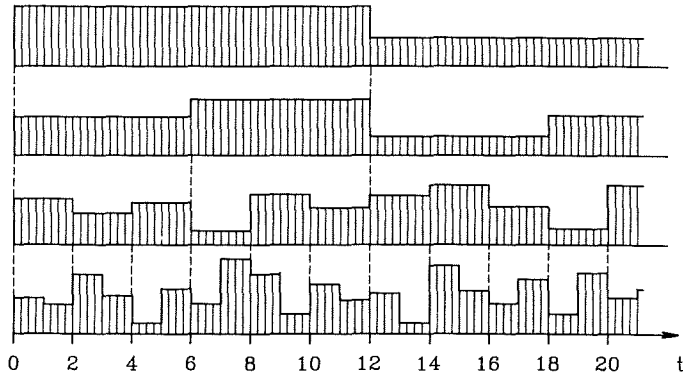
Lastmodellen vil blive betegnet som FBC–lastmodellen efter *J. Ferry Borges* og *M. Castanheta*, der har foreslået den til normbrug [10.1]. Vi definerer først en skalær FBC–proces. Den er blot en følge af rektangulære lastpulser af fastlagt varighed  $\tau$  følgende umiddelbart efter hinanden, se figur 10.1. Elementerne i den tilhørende følge af pulsamplituder er indbyrdes uafhængige ensfordelte stokastiske variable (en såkaldt Bernoullifølge). Processen starter til tiden  $t = 0$ . Den skrives som  $X(t, \tau)$ .



Figur 10.1. Udfald af FBC–proces  $X(t, \tau)$ .

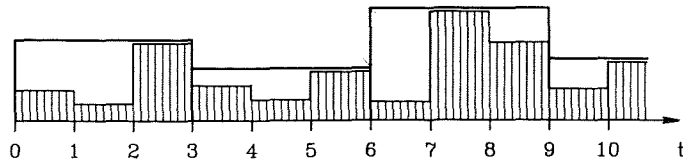


En  $n$ -kombination FBC-proces er en vektor  $(X_1(t, \tau_1), \dots, X_n(t, \tau_n))$  af skalære FBC-processer, der er ordnet med hensyn til elementnummer, således at pulsvarighederne er dalende, dvs  $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_n$ , og som relativt til hinanden har den særegne egenskab, at  $\tau_i$  er et helt multiplum af  $\tau_j$  for alle  $i \leq j$ , se figur 10.2.



Figur 10.2. Udfald af 4-kombination FBC-proces  $(X_1(t, 12), X_2(t, 6), X_3(t, 2), X_4(t, 1))$ .

For den følgende beskrivelse af FBC  $n$ -kombinationsproblemet viser det sig hensigtsmæssigt at indføre en special familie af indhyllingsprocesser til en FBC-proces:  $T$ -varighedsindhyllingen til en FBC-proces  $X(t, \tau)$  er en FBC-proces, der betegnes  $X(t, T)$ , hvor pulsvarigheden  $T$  er et helt multiplum af  $\tau$ , og hvor amplituden er defineret som maksimum af  $X(t, \tau)$  over det pågældende pulsinterval for  $X(t, T)$ , se figur 10.3. For  $T = \tau$  bliver indhyllingen og FBC-processen identiske.



Figur 10.3. Udfald af FBC-proces  $X(t, 1)$  med tilhørende udfald af 3-varighedsindhyllingen  $X(t, 3)$ .

Antag nu, at de forskellige FBC-lastprocesser bidrager lineært med positive influenskoefficienter til en lasteffekt. Antag desuden, at alle lastpulsamplituder er ikke-negative med sandsynligheden 1. Det er da tilstrækkeligt at studere summen af elementerne

$$X_1(t, \tau_1) + \dots + X_n(t, \tau_n) \quad (1)$$

i en  $n$ -kombination FBC-proces. Vi søger sandsynlighedsfordelingen for den maksimale lasteffekt inden for tidsintervallet  $[0, \tau_1]$ . Ved betragtning af figur 10.2 indses direkte, at vi i summen (1) kan erstatte det  $n$ te led  $X_n(t, \tau_n)$  med den tilsvarende  $\tau_{n-1}$ -indhylling  $X_n(t, \tau_{n-1})$ , uden at den maksimale lasteffekt påvirkes. Da

$$Z_{n-1}(t, \tau_{n-1}) \equiv X_{n-1}(t, \tau_{n-1}) + X_n(t, \tau_{n-1}) \quad (2)$$

er en FBC-proces, er  $n$ -kombinationsproblemet herved reduceret til et  $(n-1)$ -kombinationsproblem svarende til  $(n-1)$ -kombination FBC-processen  $(X_1(t, \tau_1), \dots, X_{n-2}(t, \tau_{n-2}), Z_{n-1}(t, \tau_{n-1}))$ .

Fordelingsfunktionen for amplituderne af  $Z_{n-1}(t, \tau_{n-1})$  er foldningen

$$F_{Z_{n-1}(t, \tau_{n-1})}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{X_n(t, \tau_{n-1})}(z-x) f_{X_{n-1}(t, \tau_{n-1})}(x) dx \quad (3)$$

mellem tæthedsfunktionen  $f_{X_{n-1}(t, \tau_{n-1})}(x)$  og fordelingsfunktionen

$$F_{X_n(t, \tau_{n-1})}(x) = \left[ F_{X_n(t, \tau_n)}(x) \right]^{\tau_{n-1}/\tau_n} \quad (4)$$

for  $\tau_{n-1}$ -varighedsindhyllingen af  $X_n(t, \tau_n)$ .

Det følger af denne reduktion af problemets dimension, at fordelingsfunktionen for den maksimale lasteffekt er bestemt ved  $n-1$  på hinanden følgende foldningsintegrationer. I almindelighed er en sådan beregning vanskeligt praktiserbar ved brug af standard analytiske eller numeriske metoder.

Hvis vi antager, at amplitudefordelingerne alle er absolut kontinuerte (se definition i afsnit 7.2), og at vi kun er interesseret i at bestemme fraktilværdier i den øvre hale af fordelingen for den maksimale lasteffekt, da kan vi sædvanligvis opnå en for praksis tilstrækkelig god nøjagtighed ved at anvende FORM.

Forudsætningen om absolut kontinuerte amplitudefordelinger kan imidlertid ikke opretholdes for alle FBC-processerne i et realistisk  $n$ -kombinationsproblem. For adskillige lasttyper af intermitterende natur såsom lasthistorier, hvor lastpulserne skyldes ekstraordinære begivenheder (ophobning af personer ved selskabsbegivenheder, storme etc) må FBC-processerne, der modellerer disse lasthistorier, foreskrive betydelige sandsynligheder for, at amplituderne har værdien nul. Det betyder, at de tilsvarende fordelingsfunktioner for amplituderne har spring i nul. Men da eksisterer der ikke en entydig afbildning af det frie fysiske formuleringsrum på et standardiseret gaussisk rum, hvilket er en forudsætning for direkte anvendelse af FORM.

Det følger af (4), at hvis fordelingsfunktionen for  $X_n(t, \tau_n)$  er nul på den negative akse og har springet  $p$  i nul, da får den tilsvarende  $\tau_{n-1}$ -indhulling en amplitudefordelingsfunktion med springet  $p \tau_{n-1} / \tau_n$  i nul. Hvis dette spring er tilpas lille i forhold til 1, giver direkte anvendelse af FORM ingen problemer. Hvis  $p \tau_{n-1} / \tau_n$  har en betydelig størrelse, kan problemet løses ved en kombineret anvendelse af FORM og Monte Carlo metoder, der bevirker en formindskelse af springstørrelserne [9.4].

Næste afsnit illustrerer den specielle anvendelse af det normale haleapproksimationsprincip, der fremkommer for FBC  $n$ -kombinationsproblemet under forudsætning af, at alle amplitudefordelinger er absolut kontinuerte. Iterationsalgoritmen i denne specielle form er efter dens ophavsmænd blevet kendt som *Rackwitz-Fiessler algoritmen* [7.10].

## 10.2 Rackwitz-Fiessler algoritmen for absolut kontinuerte fordelingsfunktioner

På grund af den rekursive reduktion af  $n$ -kombinationsproblemet er det tilstrækkeligt først at betragte tilfældet  $n = 2$ . RF-algoritmen beregner en approksimation til værdien af såvel fordelingsfunktionen som tæthedsfunctio-

nen af  $Z_1(t, \tau_1) = X_1(t, \tau_1) + X_2(t, \tau_1)$  for et vilkårligt valgt argument  $z$  således: Vælg et punkt  $(x_1, x_2)$  på den rette linie  $x_1 + x_2 = z$ , og bestem  $(\mu_1, \sigma_1)$  og  $(\mu_2, \sigma_2)$  ved brug af ligningerne (7.4.25) og (7.4.26) for  $i = 1$  og  $2$ , hvor  $F_1 = F_{X_1}(t, \tau_1)$  og  $F_2 = F_{X_2}(t, \tau_1)$ . Herved får både tæthedsfunktionen og fordelingsfunktionen for  $Z_1(t, \tau_1)$  deres værdi i  $z$  approksimeret med værdien i  $z$  af henholdsvis tæthedsfunktionen og fordelingsfunktionen for

normalfordelingen med parametre  $\mu = \mu_1 + \mu_2$ ,  $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .

Det er klart, at resultaterne afhænger af approksimationspunktet  $(x_1, x_2)$ . For hvert valg af  $z$  bør derfor søges et "bedste" approksimationspunkt. Dette gøres ved "baglænsdelen" af RF-algoritmen således: Et nyt approksimationspunkt  $(x_1, x_2)$  vælges som det punkt på den rette linie  $x_1 + x_2 = z$ , hvor produktet af de to approksimerende normale tæthedsfunktioner med parametre  $(\mu_1, \sigma_1)$  og  $(\mu_2, \sigma_2)$  har maksimal værdi. Dette punkt er

$$(x_1, x_2) = (\mu_1 + \beta \alpha_1 \sigma_1, \mu_2 + \beta \alpha_2 \sigma_2) \quad (1)$$

hvor  $\beta = (z - \mu) / \sigma$  og  $(\alpha_1, \alpha_2) = \left[ \frac{\sigma_1}{\sigma}, \frac{\sigma_2}{\sigma} \right]$ .

Proceduren gentages med start fra det nye approksimationspunkt  $(x_1, x_2)$ . Ved fortsat iteration genereres herved en følge af punkter  $(x_{11}, x_{21})$ ,  $(x_{12}, x_{22})$ , ...,  $(x_{1n}, x_{2n})$ , ... . Hvis følgen konvergerer mod et punkt  $(x_1, x_2)$ , da er dette punkt et lokalt mest centralt punkt på den rette linie  $x_1 + x_2 = z$  og  $F_{Z_1}(z) \approx \Phi \left[ \frac{z - \mu}{\sigma} \right]$ ,  $f_{Z_1}(z) \approx \frac{1}{\sigma} \varphi \left[ \frac{z - \mu}{\sigma} \right]$ .

**Øvelse 10.1** Vis, at RF-algoritmen for  $n = 2$  er identisk med algoritmen (7.4.9), der bygger på sætning 7.1.  $\square$

For  $n > 2$  forløber RF-algoritmen således: Vælg approksimationspunkt  $(x_1, \dots, x_n)$  således, at  $x_1 + \dots + x_n = z$ , og definer undersummerne

$$\begin{aligned} z_n &= x_n \\ z_{n-1} &= x_{n-1} + z_n \\ z_{n-2} &= x_{n-2} + z_{n-1} \\ &\vdots \\ z_2 &= x_2 + z_3 \\ z_1 &= x_1 + z_2 \end{aligned} \quad (2)$$

hvorved  $z_1 = z$ . I algoritmens første skridt bestemmes tilnærmelsesværdier for fordelingsfunktionen og tæthedsfunktionen af  $Z_{n-1}(t, \tau_{n-1})$  for argumentet  $z_{n-1}$  nøjagtig som forklaret for  $n = 2$  før der går ind i baglænsdelen af algoritmen. Med de fundne tilnærmelsesværdier som input gøres derefter det samme for

$$Z_{n-2}(t, \tau_{n-2}) = X_{n-2}(t, \tau_{n-2}) + Z_{n-1}(t, \tau_{n-2}) \quad (3)$$

hvor  $Z_{n-1}(t, \tau_{n-2})$  er  $\tau_{n-2}$ -indhyllingen af FBC-processen  $Z_{n-1}(t, \tau_{n-1})$ . Herved fås tilnærmelsesværdier for fordelingsfunktionen og tæthedsfunktionen af  $Z_{n-2}(t, \tau_{n-2})$  for argumentet  $z_{n-2}$ . Ved at fortsætte rekursivt på denne måde ender vi med at have bestemt en approksimativ værdi af henholdsvis fordelingsfunktionen og tæthedsfunktionen for

$$Z_1(t, \tau_1) = X_1(t, \tau_1) + Z_2(t, \tau_1) = \max\{X_1(t, \tau_1) + \dots + X_n(t, \tau_n)\} \quad (4)$$

$$t \in [0, \tau_1]$$

for argumentet  $z$ .

Til søgning af et bedre approksimationspunkt bruges herefter baglænsdelen af algoritmen som for  $n = 2$  ialt  $n-1$  på hinanden følgende gange. Først bestemmes  $x_1$  og  $z_2$ , således at  $x_1 + z_2 = z$ , dernæst bestemmes  $x_2$  og  $z_3$ , således at  $x_2 + z_3 = z_2$ , etc, se (2). Med det nye approksimationspunkt  $(x_1, \dots, x_n)$  startes herefter forfra med en ny iteration.

### 10.3 Klippede stokastiske variable som lastpulser

For anvendelse af Monte Carlo metoder viser det sig bekvemt at lade pulsamplituderne være klippede stokastiske variable genereret fra stokastiske variable med absolut kontinuerte fordelingsfunktioner. En stokastisk variabel  $Y$  siges at være genereret ved klipning af den stokastiske variable  $X$  i nul, hvis

$$Y = \max\{0, X\} \quad (1)$$

Hvis  $X$  specielt er normalfordelt med parametre  $\mu$ ,  $\sigma$ , vil vi sige, at  $Y$  er klippet normalfordelt med parametre  $\mu$ ,  $\sigma$ . Tilsvarende terminologi bruges for andre navngivne fordelingstyper.

Det bekvemme ved at lade lastpulserne være modelleret ved stokastiske variable af formen (1) hænger sammen med, at det gælder, at

$$\max\{\max\{0, X_1\}, \dots, \max\{0, X_n\}\} = \max\{0, \max\{X_1, \dots, X_n\}\} \quad (2)$$

samt at hændelsen

$$\sum_{i=1}^n \max\{0, X_i\} \leq z \quad (3)$$

indtræder, hvis og kun hvis samtlige  $2^n - 1$  undersummer af summen  $X_1 + \dots + X_n$  er mindre end eller lig med  $z$ . Sandsynligheden for hændelsen (3) kan derfor i princippet beregnes ved brug af metoder for seriesystemer defineret ved lineære sikkerhedsmargener med absolut kontinuerte fordelinger. Disse egenskaber medfører også, at såvel fordelingsfunktionen som tæthedsfunktionen for summen i (3) på simpel måde lader sig estimere ved retningssimulering således som illustreret i eksemplerne 9.1 og 9.3.

**Bemærkning 10.1** Enhver pulsamplitude  $Y$  med fordelingsfunktion

$$F_Y(x) = p \mathbf{1}_{x \geq 0} + (1-p) F(x) \quad (4)$$

hvor  $F(x)$  er en absolut kontinuert fordelingsfunktion, der er nul på den negative akse, kan skrives som (1), hvor  $X$  har en absolut kontinuert fordelingsfunktion. Vi kan jo blot definere  $X$  således, at  $X$  får fordelingsfunktionen

$$F_X(x) = p \frac{1-F(b-ax)}{1-F(b)} \mathbf{1}_{x < 0} + [p + (1-p)F(x)] \mathbf{1}_{x \geq 0} \quad (5)$$

hvor  $a$  og  $b$  er vilkårlige positive konstanter. Hvis vi specielt vælger

$$a = \frac{1-p}{p} \frac{f(0)}{f(b)} [1-F(b)] \quad (6)$$

hvor  $f(x)$  er tæthedsfunktionen hørende til  $F(x)$ , opnås, at tæthedsfunktionen for  $X$  er kontinuert i nul.

Et eksempel er

$$F(x) = \Phi_{\gamma} \left[ \frac{x-\mu}{\sigma} \right] \quad (7)$$

hvor  $\gamma = -\mu/\sigma$  og

$$\Phi_{\gamma}(x) = \frac{\Phi(x) - \Phi(\gamma)}{1 - \Phi(\gamma)} 1_{x \geq \gamma} \quad (8)$$

er den nedretrunkerede standardiserede normale fordelingsfunktion med trunkeringspunkt  $\gamma$ . Konstanten  $a$  i (6) bliver

$$a = \frac{1-p}{p} \frac{\varphi \left[ \frac{\mu}{\sigma} \right]}{\varphi \left[ \frac{b-\mu}{\sigma} \right]} \frac{\Phi \left[ \frac{\mu-b}{\sigma} \right]}{\Phi \left[ \frac{\mu}{\sigma} \right]} \quad (9)$$

Vælges  $b = 2\mu$  fås

$$a = \frac{1-p}{1-\Phi \left[ -\frac{\mu}{\sigma} \right]} \frac{\Phi \left[ -\frac{\mu}{\sigma} \right]}{p} \quad (10)$$

som giver  $a = 1$ , hvis det specielt gælder, at  $p = \Phi(-\mu/\sigma)$ . Variablen  $X$  er da normalfordelt med parametre  $\mu$ ,  $\sigma$ , og  $\max\{0, X\}$  er altså klippet normalfordelt.

Et andet eksempel er eksponentialfordelingen

$$F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) 1_{x \geq 0} \quad (11)$$

med  $\lambda > 0$  som parameter. Med (6) indsat bliver (5):

$$F_X(x) = p \exp \left[ \frac{1-p}{p} \lambda x \right] 1_{x < 0} + [p + (1-p)(1 - e^{-\lambda x})] 1_{x \geq 0} \quad (12)$$

□

**Eksempel 10.1** Lad lasteffekten i en søjle i et fleretageshus være summen af en permanent virkende lasteffekt  $\max\{0, X\}$  og summen af 6 intermitterende nyttelaster alle stammende fra etagerne over søjlen. Lad der yderligere være et snelastbidrag, der også er af intermitterende type. Det antages, at alle lastamplituder kan modelleres som klippede normalfordelte stokastiske variable [9.4]. Helt specifikt antager vi, at den maksimale lasteffekt i løbet af en tidsperiode på et år er proportional med

$$L = \max\{0, X\} + \max\{V, S\} \quad (13)$$

hvor  $V$ , der svarer til vinterperioden, er defineret ved

$$V = \max_{k=1}^5 T_k \quad (14)$$

med

$$T_k = \max\{0, X_k\} + U_k \quad (15)$$

$$U_k = \max_{j=1}^{40} W_{jk} \quad (16)$$

$$W_{jk} = \sum_{i=1}^6 \max\{0, X_{ijk} + X_{ijk}\} \quad (17)$$

og  $S$ , der svarer til sommerperioden, er defineret ved

$$S = \max_{k=6}^{10} U_k \quad (18)$$

Der er altså her tale om et FBC 3-kombinationsproblem.

Summerne  $X_{jk} + X_{ijk}$  ( $i=1, \dots, 6$ ;  $j=1, \dots, 40$ ;  $k=1, \dots, 10$ ) repræsenterer de intermitterende nyttelaster, der antages at blive udskiftet 400 gange per etage og per år. Variablen  $X_k$  repræsenterer snelasten, der antages at have 5 uafhængige fornyelser per vinterhalvår.

Alle  $X$ -variable forudsættes at være indbyrdes uafhængige og normalfordelte. Variablene  $X_{jk} + X_{1jk}, \dots, X_{jk} + X_{6jk}$ , der svarer til samme tidsinterval, ses at være enskorrelerede og forenet normalfordelte. Korrelationskoefficienten er  $\rho = \text{Var}[X_{jk}] / (\text{Var}[X_{jk}] + \text{Var}[X_{ijk}])$ .

Med følgende talværdier i dimensionsløs form (dvs de resulterende lasteffekter fås efter multiplikation med en given fysisk enhed for den relevante lasteffekt):  $E[X_{ijk}] = 0$ ;  $D[X_{ijk}] = \sqrt{1-\rho}$ ;  $E[X_{jk}] = -2$ ;  $D[X_{jk}] = \sqrt{\rho}$ ;  $\rho = 0.0, 0.5, 0.8, 1.0$ ;  $E[X_k] = -0.15$ ;  $D[X_k] = 0.34$ ;  $E[X] = 35$ ;  $D[X] = 1.2$ , er ved ensformig retningssimulering, figur 9.1, bestemt de i tabel 10.1 viste værdier for  $F_L(z)$  og  $f_L(z)$ . I samme tabel er anført værdier, der er bestemt ved FR-algoritmen med brug af retningssimulering i første skridt af algoritmens forlænsdel, som forklaret i det følgende.

$\rho$	$z$	$F_L(z)$	st.afv.	$\frac{ afv }{st.afv.}$	$f_L(z)$	st.afv.	$\frac{ afv }{st.afv.}$	metode
0.0	38.5	0.936	0.007		0.049	0.009		SIM
		0.938		0.3	0.097		5.3	RF
0.5	43.5	0.939	0.007		0.018	0.003		SIM
		0.953		2.0	0.033		4.9	RF
0.8	45.0	0.782	0.012		0.040	0.004		SIM
		0.782		0.05	0.096		14.4	RF
		0.812		2.5	0.085		11.5	RF
1.0	51.0	0.962	0.006		0.009	0.002		SIM
		0.956		1.1	0.022		7.1	RF

Tabel 10.1. Fordelingsfunktionsværdier og tæthedsfunktionsværdier for den totale lasteffekt  $L$  hørende til FBC-modellen i eksempel 10.1. Beregningsmetoden SIM er ren retningssimulering, medens metoden RF er kombineret brug af retningssimulering og RF-algoritmen, for hvilken regnetiden per værdi i dette eksempel viser sig at være af størrelsesorden 100 gange kortere end regnetiden for SIM.

Den anvendte stikprøvestørrelse var 500 i begge metoder. Talsøjlerne mærket "st.afv." viser de estimerede standardafvigelser af den estimator, der har givet værdierne i talsøjlerne umiddelbart til venstre for "st.afv."

[afv] er den numeriske afvigelse mellem resultaterne opnået ved henholdsvis SIM og RF. De to værdisæt hørende til RF for  $\rho = 0.8$  svarer til to forskellige starttalsæt for den anvendte tilfældighedsgenerator (af typen XOR [9.4]).

De stokastiske variable  $W_{jk}$  har alle samme fordelingsfunktion  $F_W(z)$ . Ifølge bemærkning 6.2 gælder, at

$$F_W(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left[ \frac{2 + \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1-\rho}} \right]^6 \varphi(x) dx \quad (19)$$

der varierer mellem  $\Phi(2)^6 \approx 0.871$  for  $\rho = 0$  og  $\Phi(2) \approx 0.977$  for  $\rho = 1$ . Med disse store værdier af springet  $F_W(0)$  er RF-algoritmen uanvendelig til bestemmelse af værdier af  $F_W(z)$  og  $f_W(x)$  for  $z > 0$ . Sådanne værdier kan derimod bestemmes ved ensformig retningssimulering som beskrevet i eksempel 9.1.

Det bemærkes dernæst, at variablene  $U_1, \dots, U_{10}$  er ensfordelte med fordelingsfunktionen

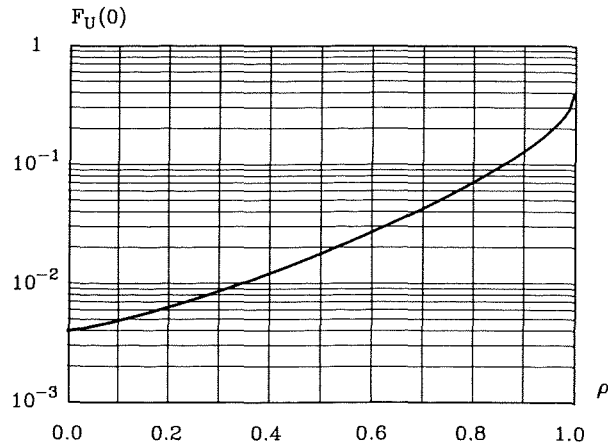
$$F_U(z) = F_W(z)^{40} \quad (20)$$

således at

$$F_U(0) = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left[ \frac{2 + \sqrt{\rho} x}{\sqrt{1-\rho}} \right]^6 \varphi(x) dx \right]^{40} \quad (21)$$

Denne springsandsynlighed varierer med  $\rho$  som vist i figur 10.4.

Det er vanskeligt at give generelle regler for hvor store spring, der kan tolereres, før RF-algoritmens anvendelighed bliver tvivlsom. Som tilfældet er med FORM og SORM metodernes anvendelighed i almindelighed, er anvendeligheden på fordelinger med spring i nul en erfarings sag, der for nuværende må bygges på sammenligninger med resultater af Monte Carlo simuleringer. I nærværende eksempel ses fra figur 10.4, at  $F_U(0) < 0.1$  for  $\rho < \text{ca } 0.85$ , hvilket er et så tilpas lille spring, at det kan være fornuftigt at prøve at anvende RF-algoritmen til beregning af fordelings- og tæthedsfunktionsværdier for  $T_k$  uden hensyntagen til muligheden  $U_k = 0$ , men dog med hensyntagen til muligheden  $X_k \leq 0$ . Denne sidste hændelse indtræffer jo med den store sandsynlighed  $P(X_k \leq 0) = \Phi(0.15/0.34) \approx$



Figur 10.4. Med henvisning til forudsætningerne i eksempel 10.1 fremstiller diagrammet sandsynligheden for, at der gennem 40 fornyelsesintervaller for den intermitterende nyttelast ikke forekommer en sådan last. Abscissen  $\rho$  er økvikorrelationskoefficienten mellem samtidigt forekommende laster på de 6 forskellige etager.

$\Phi(0.44) \approx 0.67$ . Vi skriver altså fordelingsfunktionsværdien for  $T_k$  i  $z_2 = x_2 + x_3$ , se (2), som

$$F_T(z_2) = F_U(z_2) P(X_k \leq 0) + P(X_k + U_k \leq z_2 | X_k > 0) P(X_k > 0) \quad (22)$$

og bestemmer den betingede sandsynlighed

$$P(X_k + U_k \leq z_2 | X_k > 0) \quad (23)$$

i første skridt af RF-algorithmens forlænsdel under brug af den betingede fordelingsfunktion

$$F_{X_k}(x_2 | X_k > 0) = \frac{\Phi\left(\frac{x_2 + 0.15}{0.34}\right) - \Phi(0.44)}{1 - \Phi(0.44)} \quad (24)$$

og tilhørende tæthedsfunktionsværdi samt under brug af de ved retningssimulering bestemte fordelings- og tæthedsfunktionsværdier for  $U_k$  i  $x_3$ .

Da

$$F_{\max\{V,S\}}(z_2) = F_T(z_2)^5 F_U(z_2)^5 \quad (25)$$

er forsvindende lille for  $z_2 = 0$  og  $P(X \leq 0) = \Phi(-35/1.2)$  ligeledes er forsvindende lille, er det andet og sidste skridt i RF-algorithmens forlænsdel uden problemer. Herved bestemmes tilnærmelsesværdier for  $F_L(z)$  og  $f_L(z)$  for  $z = z_2 + x_1$ . Efter gennemløb af RF-algorithmens baglænsdel til bestemmelse af et nyt startpunkt  $(x_1, x_2, x_3)$  gentages hele forløbet iterativt indtil et passende stopkriterium er opfyldt.

Det er vigtigt for kontrollen af konvergensforløbet, at den simulerede stikprøve af retningsvektorer forbliver uforandret gennem hele iterationsforløbet. I modsat fald vil RF-algorithmens konvergensgenskaber kunne forstyrres af statistiske fluktuationer, der skyldes begrænset stikprøvestørrelse.  $\square$

#### Bemærkning 10.2 Fordelingsfunktionen for summen

$$Y = \sum_{i=1}^n \max\{0, X_i\} \quad (26)$$

af  $n$  ensfordelte og indbyrdes uafhængige klippede normalfordelte variable med parametre  $\mu$  og  $\sigma = 1$  kan approksimeres vel ved fordelingsfunktionen

$$F_n(x; \mu) = F_1(x) H(x) + F_u(x) [1 - H(x)] \quad (27)$$

hvor  $F_1(x) < F_u(x)$  er fordelingsfunktioner defineret ved

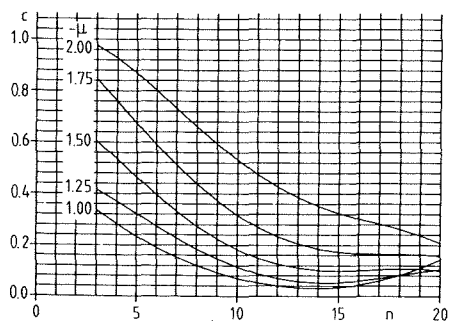
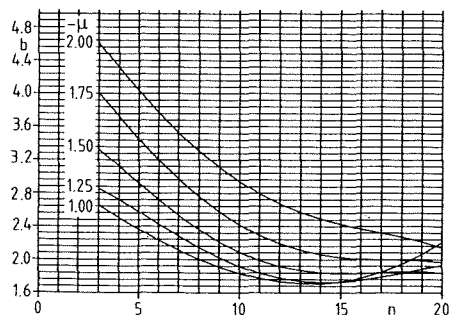
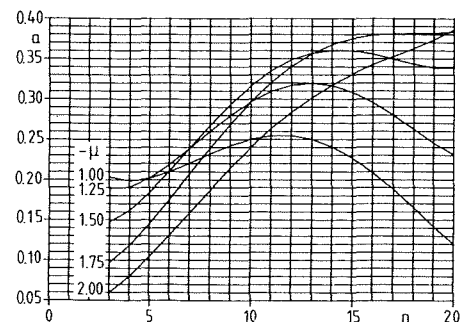
$$F_1(x) = \Phi(-\mu)^n + \sum_{q=1}^n \binom{n}{q} \left[ \Phi\left(\frac{x}{q} - \mu\right) - \Phi(-\mu) \right]^q \Phi(-\mu)^{n-q} \quad (28)$$

$$F_u(x) = \Phi\left(\frac{x - n\mu}{\sqrt{n}}\right) \quad (29)$$

og hvor  $H(x)$  er en fordelingsfunktion defineret ved

$$H(x) = \exp\{-ax^b \exp[-c(\log x)^2]\} \quad (30)$$

Parametrene  $a$ ,  $b$  og  $c$ , der fastlægger  $H(x)$ , er for hver værdi af  $n$  og  $m$  blevet bestemt ved kurvetilpasning af  $F_n(x; \mu)$  til den ved retningsmodellering bestemte fordelingsfunktion for  $Y$ .



Figur 10.5. Parametrene  $a$ ,  $b$  og  $c$ , der fastlægger fordelingsfunktionen  $H(x)$  i (10.3.30).

Parameterværdierne kan aflæses for  $n = 3, 4, \dots, 20$  og forskellige værdier af  $\mu$  i de fra [9.4] gengivne diagrammer sammenstillet i figur 10.5. I den anførte reference er givet nærmere oplysninger om approksimationens nøjagtighed. Der er også givet en approksimation til tæthedsfunktionen for  $Y$ . Denne approksimation er nøjagtigere end den approksimation, der fremkommer ved differentiation af  $F(x)$ .

Hvis  $\sigma \neq 1$  skal  $x$  og  $\mu$  erstattes af henholdsvis  $x/\sigma$  og  $\mu/\sigma$  i (27) – (30).  $\square$

**Eksempel 10.2** I eksempel 2.6 bestemte vi lastreduktionsfaktorer  $\psi_n$  under forudsætning af, at alle lastpulsamplituder  $X_{ij}$  var indbyrdes uafhængige og normalfordelte. Uafhængig af fordelingsforudsætninger gælder under de øvrige forudsætninger i eksempel 2.6 at

$$\bar{F}_n[x_k + (n-1)\psi_n x_k / \gamma] = \bar{F}_1(x_k) \quad (31)$$

der fremkommer ved indsætning af (2.7.11) i (2.7.8). Desuden gælder (2.7.12) asymptotisk for  $n \rightarrow \infty$ , og dermed (2.7.13):

$$\psi_\infty = \frac{E[X_{ij}]}{x_k} \gamma \quad (32)$$

Endelig gælder ifølge (2.7.5), at den karakteristiske lastværdi  $x_k$  svarende til  $\max\{X_{i1}, \dots, X_{iN}\}$  kan approksimeres ved

$$x_k = F_1^{-1}\left(\frac{\epsilon}{N}\right) \quad (33)$$

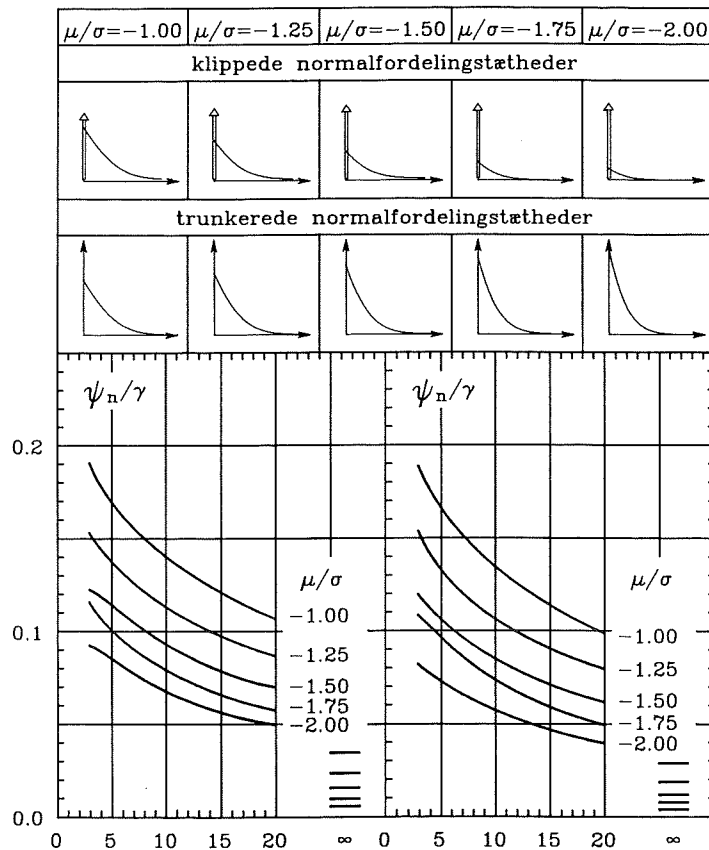
for  $\epsilon \ll 1$ .

Antag, at  $X_{ij}$  er klippet normalfordelt med parametre  $(\mu, \sigma)$ . Da er

$$F_1(x) = \Phi\left[-\frac{x-\mu}{\sigma}\right], \quad x \in \mathbb{R}_+ \quad (34)$$

således at (33) giver

$$x_k = \mu - \sigma \Phi^{-1}\left(\frac{\epsilon}{N}\right) \quad (35)$$



Figur 10.6. Forholdet mellem lastreduktionsfaktoren  $\psi_n$  og partialkoefficienten  $\gamma$  for søjlelast som funktion af etageantal  $n$  over søjlen, når karakteristisk lastværdi er defineret som 98%–fraktilen i fordelingen for den maksimale last på en enkelt etage som følge af  $N$  uafhængige lastgentagelser med en stokastisk lastpuls, der er af klippet normalfordelingstype som vist øverst i figuren. Lastreduktionsfaktoren er defineret i overensstemmelse med principperne fastlagt i DS 409 [2.2].

hvor  $\epsilon/N$  forudsættes at være så lille, at  $x_k > 0$ . Desuden findes ved elementære regninger, at

$$E[X_{ij}] = \sigma\theta \quad (36)$$

$$\theta = \varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \frac{\mu}{\sigma} \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) \quad (37)$$

som ved indsætning i (32) giver

$$\frac{\psi_\infty}{\gamma} = \frac{\varphi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) + \frac{\mu}{\sigma} \Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)}{\frac{\mu}{\sigma} - \Phi^{-1}\left(\frac{\epsilon}{N}\right)} \quad (38)$$

Med brug af (27) og (34) i (31) fås ligningen

$$\bar{F}_n \left\{ \frac{\gamma\theta}{\psi_\infty} \left[ 1 + (n-1) \frac{\psi_n}{\gamma} \right]; \frac{\mu}{\sigma} \right\} = \Phi \left[ \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\gamma\theta}{\psi_\infty} \right] \quad (39)$$

til bestemmelse af  $\psi_n/\gamma$  som funktion af  $n$  for givne værdier af  $\mu/\sigma$  og  $\epsilon/N$ , figur 10.6.

Det ses som ventet, at indflydelsen fra  $N$  er beskeden. Desuden ses, at konvergensten af  $\psi_n$  mod  $\psi_\infty$  for  $n \rightarrow \infty$  er meget langsom, og at det kan være stærkt på den usikre side (hvor meget afhænger naturligvis af de øvrige lasttypers bidrag til totallasten), at anvende  $\psi_\infty$  i stedet for  $\psi_n$  som lastreduktionsfaktor i praktiske beregninger.  $\square$

**Øvelse 10.2** Undersøg, hvilke ændringer der sker med lastreduktionsfaktoren  $\psi_n$  og partialkoefficienten  $\gamma$ , hvis definitionen af den karakteristiske værdi ændres til at være 98%–fraktilen i den betingede maksimallastfordeling på en enkelt etage givet at lasten forekommer i mindst et af de  $N$  gentagelsesintervaller.  $\square$

#### Referencer

1. J. Ferry Borges and M. Castanheta: *Structural Safety*. Laboratório Nacional de Engenharia Civil, course 101, 2nd edition, Lisbon, 1971.



## 11. STATISTISK USIKKERHED OG MODELUSIKKERHED

### 11.1 Indledning

Ekperimentelle undersøgelser spiller i flere henseender en væsentlig rolle i forbindelse med udformning og dimensionering af bærende konstruktioner. På den ene side er det et videnskabeligt grundprincip, at matematiske modeller for konstruktionselementers (herunder materialers) deformations- og styrkeegenskaber (eller andre relevante fysiske egenskaber) underkastes eksperimentelle undersøgelser med det formål at verificere og underbygge modellernes empiriske informationsværdi. På den anden side bruges eksperimentelle metoder ofte direkte som grundlag for udarbejdelse af dimensionsregler for forskellige typer af konstruktionsforbindelser (stødlængder og forankringslængder i jernbeton, sømsamlinger i trækonstruktioner etc). Sådanne regler er ofte blevet formuleret ved anvendelse af dimensionsanalyse kombineret med brug af simple mekaniske modeller, der forudsættes at udpege de for egenskaben mest betydende dimensionsløse størrelser samt relationen mellem disse. Den eksperimentelle metode bruges derefter til bestemmelse af passende korrektionsfaktorer eller led, der bringer den opstillede formel i overensstemmelse med forsøgsresultaterne. Undertiden må hele relationen mellem de udvalgte dimensionsløse størrelser bestemmes eksperimentelt.

På grund af det sædvanligvis begrænsede antal forsøg, der af økonomiske og tidsmæssige grunde kan ofres på verifikationen eller korrektionen af en given model, bliver den statistiske usikkerhed af betydning, når modellen skal indgå i en sikkerhedsanalyse. Denne statistiske usikkerhed udgør et væsentligt bidrag til modelusikkerheden. Rapporteret kvantitativ information om den statistiske usikkerhed knyttet til eksperimentelle modelfastsættelser gør det lettere at udøve professionel vurdering af modelusikkerhed. Dette emne er derfor af betydelig relevans for sikkerhedsanalysen. Selvom problematikken udgør et centralt emne i den almindelige statistiske teori (regressionsanalyse) og derfor er behandlet i de fleste statistiske lærebøger, er det nyttigt her at behandle de mest grundlæggende begreber ud fra den

anvendelsessynsvinkel, der er særegen for sikkerhedsanalysen. I dette kapitel vender vi derfor tilbage til begreber allerede omtalt i kapitel 3: "probabilistisk information".

### 11.2 Likelihoodfunktionen. Sufficiente stikprøvefunktioner.

Vi vil her gøre fremstillingen en smule mere generel ved i formel (3.22.10) og de efterfølgende formler at erstatte parameteren  $\mu$  med en vektor  $\boldsymbol{\mu}$  af parametre. Likelihoodfunktionen (3.2.13) vil vi skrive som

$$L(\boldsymbol{\mu}; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i | \boldsymbol{\mu}) \quad (1)$$

Det ses, at den har egenskaben

$$L(\boldsymbol{\mu}; x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s}) = L(\boldsymbol{\mu}; x_1, \dots, x_r) L(\boldsymbol{\mu}; x_{r+1}, \dots, x_{r+s}) \quad (2)$$

således at a posteriori-tætheden (3.2.12) kan skrives

$$f_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu} | x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_{r+s}) \propto L(\boldsymbol{\mu}; x_{r+1}, \dots, x_{r+s}) f_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu} | x_1, \dots, x_r) \quad (3)$$

hvor

$$f_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu} | x_1, \dots, x_r) \propto L(\boldsymbol{\mu}; x_1, \dots, x_r) f_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu}) \quad (4)$$

Formel (3) har helt samme struktur som formel (4). Den probabilistiske information givet ved a posteriori-tætheden  $f_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu} | x_1, \dots, x_r)$  opdateres derfor ved brug af informationen fra den ekstra stikprøve  $x_{r+1}, \dots, x_{r+s}$  ved at tage  $f_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu} | x_1, \dots, x_r)$  som a priori-tæthed for  $\mathbf{M}$ . Svarende til en given (ikke stikprøvebaseret) a priori-tæthed  $f_{\mathbf{M}}(\boldsymbol{\mu})$  i (4) danner mængden af alle mulige a posteriori-tætheder en mange-parameterfamilie af tætheder, hvor stikprøvevariablene  $x_1, \dots, x_n$  (med  $n$  vilkårlig) er parametrene. Denne familie er naturligvis lukket med hensyn til multiplikation med likelihoodfunktionen givet ved en vilkårlig stikprøve. Hvis man kan udtrykke forhåndsinformation om parametersættet  $\boldsymbol{\mu}$  ved at vælge en tæthed fra denne familie som a

priori-tæthed, fås derfor a posteriori-tætheden efter indregning af stikprøven  $x_1, \dots, x_n$  som en  $(n+k)$ -parametertæthed fra familien. Et sådant valg af a priori-tæthed er åbenbart ækvivalent med at udtrykke forhåndsinformation i form af en fiktiv stikprøve af  $X$  af størrelsen  $k$ .

Denne egenskab får en særlig bekvem form i tilfælde, hvor likelihoodfunktionen (der jo skal opfattes som en funktion af  $\mu$ ) for enhver stikprøvestørrelse  $n$  på nær en proportionalitetsfaktor er entydigt defineret ved et fast antal  $q$  af funktioner  $t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_q(x_1, \dots, x_n)$  af stikprøvevariablene  $x_1, \dots, x_n$ . Alle stikprøver, der giver samme sæt af  $q$  værdier af disse funktioner, indeholder da nøjagtig samme information om  $\mu$ . Disse  $q$  funktioner siges at være forenet sufficente stikprøvefunktioner for  $\mu$ . Forhåndsinformation kan altså i sådanne tilfælde udtrykkes alene ved valg af værdierne for  $q$  forenet sufficente stikprøvefunktioner. Et sæt af sufficente stikprøvefunktioner eksisterer dog ikke for alle typer af fordelinger. Det kan vises, at et sådant sæt kun eksisterer, hvis fordelingen tilhører den såkaldte eksponentielle familie, hvormed menes, at tæthedsfunktionen for  $X$  har formen

$$f_X(x|\mu) = g(x) h(\mu) \exp\left[\sum_{j=1}^q u_j(x) \varphi_j(\mu)\right] \quad (5)$$

hvor  $g, u_1, \dots, u_q$  er funktioner alene af  $x$ , medens  $h, \varphi_1, \dots, \varphi_q$  er funktioner alene af  $\mu$ . Det følger direkte af (1) og (5) at funktionerne

$$t_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n u_j(x_i) \quad , \quad j = 1, \dots, q \quad (6)$$

udgør et sæt af forenet sufficente stikprøvefunktioner for  $\mu$ . Det er vanskeligere at vise, at tætheder af formen (5) er de eneste, for hvilke der uafhængigt af stikprøvestørrelsen  $n$  eksisterer et fast antal  $q$  af forenet sufficente stikprøvefunktioner for parametersættet  $\mu$ .

Det skal bemærkes, at udtrykket (5) også lader sig tolke som frekvensfunktion for en diskret stokastisk variabel  $X$  i betydningen  $P(X=x) = f_X(x|\mu)$ .

Det følger altså, at hvis den betragtede fordelingsfamilie med parameter  $\mu$  har  $q$  forenet sufficente stikprøvefunktioner for  $\mu$ , da reduceres familien af alle mulige a posteriori-tætheder svarende til a priori-tætheden  $f_M(\mu)$  til en  $q$ -parameter familie af tætheder. Disse tætheder kaldes naturligt konjugerede a priori-tætheder svarende til tæthedstypen  $f_X(x|\mu)$  og a priori-tætheden  $f_M(\mu)$ .

### 11.3 Normalfordelingens naturligt konjugerede tætheder

Normalfordelingstætheden

$$f_X(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right] \propto \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right] \quad (1)$$

med parametrene  $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , tilhører åbenbart den eksponentielle familie. Ved direkte udregning af likelihoodfunktionen fås

$$L(\mu, \sigma; x_1, \dots, x_n) \propto \left[\frac{1}{\sigma}\right]^n \exp\left[-\frac{n}{2}\left[\frac{s}{\sigma}\right]^2\right] \varphi\left[\frac{\mu-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \quad (2)$$

hvor

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (4)$$

og  $n$  er tre tilsammen sufficente stikprøvefunktioner for  $(\mu, \sigma)$ .

Lad  $(M, \log \Sigma)$  som i kapitel 3 være det par af bayeske stokastiske variable, som repræsenterer det usikre kendskab til  $(\mu, \log \sigma)$ . Manglende forhåndsinformation om parametrene kan modelleres formelt ved for eksempel at vælge a priori-tætheden af  $(M, \log \Sigma)$  som en konstant over et område  $\Omega$  af  $(\mu, \log \sigma)$ -planen med endeligt areal, og nul uden for dette område. Da  $d(\log \sigma)/d\sigma = 1/\sigma$ , medfører dette valg, at

priori-tæthed, fås derfor a posteriori-tætheden efter indregning af stikprøven  $x_1, \dots, x_n$  som en  $(n+k)$ -parametertæthed fra familien. Et sådant valg af a priori-tæthed er åbenbart ækvivalent med at udtrykke forhåndsinformation i form af en fiktiv stikprøve af  $X$  af størrelsen  $k$ .

Denne egenskab får en særlig bekvem form i tilfælde, hvor likelihoodfunktionen (der jo skal opfattes som en funktion af  $\mu$ ) for enhver stikprøvestørrelse  $n$  på nær en proportionalitetsfaktor er entydigt defineret ved et fast antal  $q$  af funktioner  $t_1(x_1, \dots, x_n), \dots, t_q(x_1, \dots, x_n)$  af stikprøvevariablene  $x_1, \dots, x_n$ . Alle stikprøver, der giver samme sæt af  $q$  værdier af disse funktioner, indeholder da nøjagtig samme information om  $\mu$ . Disse  $q$  funktioner siges at være *forenet sufficente stikprøvefunktioner* for  $\mu$ . Forhåndsinformation kan altså i sådanne tilfælde udtrykkes alene ved valg af værdierne for  $q$  forenet sufficente stikprøvefunktioner. Et sæt af sufficente stikprøvefunktioner eksisterer dog ikke for alle typer af fordelinger. Det kan vises, at et sådant sæt kun eksisterer, hvis fordelingen tilhører den såkaldte *eksponentielle familie*, hvormed menes, at tæthedsfunktionen for  $X$  har formen

$$f_X(x|\mu) = g(x) h(\mu) \exp\left[\sum_{j=1}^q u_j(x) \varphi_j(\mu)\right] \quad (5)$$

hvor  $g, u_1, \dots, u_q$  er funktioner alene af  $x$ , medens  $h, \varphi_1, \dots, \varphi_q$  er funktioner alene af  $\mu$ . Det følger direkte af (1) og (5) at funktionerne

$$t_j(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n u_j(x_i) \quad , \quad j = 1, \dots, q \quad (6)$$

udgør et sæt af forenet sufficente stikprøvefunktioner for  $\mu$ . Det er vanskeligere at vise, at tætheder af formen (5) er de eneste, for hvilke der uafhængigt af stikprøvestørrelsen  $n$  eksisterer et fast antal  $q$  af forenet sufficente stikprøvefunktioner for parametersættet  $\mu$ .

Det skal bemærkes, at udtrykket (5) også lader sig tolke som frekvensfunktion for en diskret stokastisk variabel  $X$  i betydningen  $P(X=x) = f_X(x|\mu)$ .

Det følger altså, at hvis den betragtede fordelingsfamilie med parameter  $\mu$  har  $q$  forenet sufficente stikprøvefunktioner for  $\mu$ , da reduceres familien af alle mulige a posteriori-tætheder svarende til a priori-tætheden  $f_M(\mu)$  til en  $q$ -parameter familie af tætheder. Disse tætheder kaldes *naturligt konjugerede a priori-tætheder* svarende til tæthedstypen  $f_X(x|\mu)$  og a priori-tætheden  $f_M(\mu)$ .

### 11.3 Normalfordelingens naturligt konjugerede tætheder

Normalfordelingstætheden

$$f_X(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right] \propto \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right] \quad (1)$$

med parametrene  $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , tilhører åbenbart den eksponentielle familie. Ved direkte udregning af likelihoodfunktionen fås

$$L(\mu, \sigma; x_1, \dots, x_n) \propto \left[\frac{1}{\sigma}\right]^n \exp\left[-\frac{n}{2}\left[\frac{s}{\sigma}\right]^2\right] \varphi\left[\frac{\mu-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \quad (2)$$

hvor

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (3)$$

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (4)$$

og  $n$  er tre tilsammen sufficente stikprøvefunktioner for  $(\mu, \sigma)$ .

Lad  $(M, \log \Sigma)$  som i kapitel 3 være det par af bayeske stokastiske variable, som repræsenterer det usikre kendskab til  $(\mu, \log \sigma)$ . Manglende forhåndsinformation om parametrene kan modelleres formelt ved for eksempel at vælge a priori-tætheden af  $(M, \log \Sigma)$  som en konstant over et område  $\Omega$  af  $(\mu, \log \sigma)$ -planen med endeligt areal, og nul uden for dette område. Da  $d(\log \sigma)/d\sigma = 1/\sigma$ , medfører dette valg, at

$$f_{M,\Sigma}(\mu, \sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \quad (5)$$

for  $(\mu, \sigma) \in \Omega$ . Idet man lader  $\Omega$  udvide sig til hele  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ , giver (8.1.4), (2) og (5) at a posteriori-tætheden bliver

$$f_{M,\Sigma}(\mu, \sigma | x_1, \dots, x_n) \propto \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n+1} \exp\left[-\frac{n}{2}\left(\frac{s}{\sigma}\right)^2\right] \varphi\left[\frac{\mu - \bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \quad (6)$$

for  $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ . Heraf ses, at de naturligt konjugerede a priori-tætheder er af formen

$$f_{M,\Sigma}(\mu, \sigma) \propto \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+1} \exp\left[-\frac{\nu}{2}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)^2\right] \varphi\left[\frac{\mu - \alpha}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right], (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \quad (7)$$

med parametre  $(\alpha, \beta, \nu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^2$ . Med brug af (7) som a priori-tæthed fås herefter a posteriori-tætheden (6), hvor de tilsammen sufficente stikprøvefunktioner  $n$ ,  $\bar{x}$  og  $s^2$  er erstattet af henholdsvis

$$n + \nu \quad (8)$$

$$\frac{n\bar{x} + \nu\alpha}{n + \nu} \quad (9)$$

$$\frac{n(s^2 + \bar{x}^2) + \nu(\beta^2 + \alpha^2)}{n + \nu} - \left[\frac{n\bar{x} + \nu\alpha}{n + \nu}\right]^2 = \frac{ns^2 + \nu\beta^2}{n + \nu} + n\nu\left[\frac{\bar{x} - \alpha}{n + \nu}\right]^2 \quad (10)$$

Det bemærkes, at  $\nu$  ikke behøver at være et helt tal.

Det ses, at de stokastiske variable

$$U = \frac{M - \alpha}{\Sigma/\sqrt{\nu}} \quad (11)$$

og  $\Sigma$  er indbyrdes uafhængige, og at  $U$  er standardiseret normalfordelt, medens  $\Sigma$  har tætheden

$$f_{\Sigma}(\sigma) \propto \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu} \exp\left[-\frac{\nu}{2}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)^2\right], \sigma \in \mathbb{R}_+ \quad (12)$$

Dette følger af produktformen i (7), idet det bemærkes, at Jacobideterminanten er  $\sqrt{\nu}/\sigma$ .

**Øvelse 11.1** Vis ved simpel tæthedstransformation, at  $\nu\beta^2/\Sigma^2$  har tætheden

$$f_{\nu\beta^2/\Sigma^2}(t; \nu) \propto t^{\frac{\nu-1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}, t \in \mathbb{R}_+ \quad (13)$$

Dette er en såkaldt gammataethed med parametre  $(\nu-1)/2$  og  $1/2$ . Specielt for  $\nu$  hel kaldes den en  $\chi^2$ -tæthed med  $\nu-1$  frihedsgrader.

Udregn normaliseringskonstanten, der skal bruges i (13), udtrykt ved gammafunktionen (15). Vis derved formen (14).  $\square$

Ved brug af standardformlen

$$(a > 0, b > 0): \int_0^{\infty} x^{-(2a+1)} e^{-b/x^2} dx = \frac{1}{2} \Gamma(a) b^{-a} \quad (14)$$

hvor  $\Gamma(\cdot)$  er gammalfunktionen

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du \quad (15)$$

giver integration af (7) med hensyn til  $\sigma$  fra 0 til  $\infty$ , at den marginale tæthed af  $M$  bliver

$$f_M(\mu) \propto \left[1 + \left(\frac{\mu - \alpha}{\beta}\right)^2\right]^{-\nu/2} \quad (16)$$

Heraf ses, at

$$f_{(M-\alpha)\sqrt{\nu-1}/\beta}(t) \propto \left[1 + \frac{t^2}{\nu-1}\right]^{-[(\nu-1)+1]/2} \quad (17)$$

der for  $\nu$  hel er en såkaldt  $t$ -tæthed (Students tæthed) med  $\nu - 1$  frihedsgrader. For  $\nu = 2$  er det Cauchys tæthed.

Under forudsætning af, at  $(M, \Sigma)$  har den ved (7) definerede tæthed, kan den ubetingede tæthed af  $X$  udregnes. Den betingede tæthed af  $X$  givet  $(M, \Sigma) = (\mu, \sigma)$  er defineret ved (1), og vi får derfor ifølge additionssætningen at

$$f_X(x; \alpha, \beta, \nu) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f_X(x | \mu, \sigma) f_{M, \Sigma}(\mu, \sigma) d\mu d\sigma \propto$$

$$\int_0^\infty \left[ \frac{1}{\sigma} \right]^{\nu+2} \exp \left[ -\frac{\nu}{2} \left[ \frac{\beta}{\sigma} \right]^2 \right] d\sigma \int_{-\infty}^\infty \varphi \left[ \frac{\mu-x}{\sigma} \right] \varphi \left[ \frac{\mu-\alpha}{\sigma/\sqrt{\nu}} \right] d\mu \propto$$

$$\int_0^\infty \left[ \frac{1}{\sigma} \right]^{\nu+1} \exp \left[ -\frac{\nu}{2} \left[ \frac{\beta}{\sigma} \right]^2 \left\{ 1 + \frac{((x-\alpha)/\beta)^2}{\nu+1} \right\} \right] d\sigma \quad (18)$$

hvor vi har brugt (3.2.21). Denne ubetingede tæthed kaldes den *prædiktive* tæthed af  $X$ . Ved sammenligning af det sidste integral med (14) ses, at

$$2a + 1 = \nu + 1 \quad (19)$$

$$b = \frac{\nu\beta^2}{2} \left[ 1 + \frac{1}{\nu+1} \left[ \frac{x-\alpha}{\beta} \right]^2 \right] \quad (20)$$

hvoraf følger, at den prædiktive tæthed af  $X$  er

$$f_X(x; \alpha, \beta, \nu) \propto \left[ 1 + \frac{1}{\nu+1} \left[ \frac{x-\alpha}{\beta} \right]^2 \right]^{-[(\nu-1)+1]/2} \quad (21)$$

og dermed, at den stokastiske variabel

$$\frac{X-\alpha}{b} \sqrt{\frac{\nu-1}{\nu+1}} \quad (22)$$

for a priori-tætheden (7) og for  $\nu$  hel har en prædiktiv tæthed, der er en

$t$ -tæthed med  $\nu - 1$  frihedsgrader. Hvis stikprøveinformation er til rådighed, erstattes  $\nu$ ,  $\alpha$  og  $\beta^2$  med henholdsvis (8), (9) og (10). Manglende forhåndsinformation repræsenteres ved at sætte  $\nu = 0$  i (8), (9) og (10).

**Eksempel 11.1** En konstruktion belastes med en følge af stokastiske laster  $X_1, \dots, X_m, \dots$ , således at  $X_i$  fjernes før  $X_{i+1}$  påføres. Konstruktionen overlever de  $m$  første laster hvis og kun hvis

$$\max\{X_1, \dots, X_m\} \leq L \quad (23)$$

hvor  $L$  antages at være et givet lastniveau. Det forudsættes, at lasterne er indbyrdes uafhængige og normalfordelte med fælles, men ukendt middelværdi  $\mu$  og standardafvigelse  $\sigma$ . Der er givet indirekte information om  $\mu$  og  $\sigma$  gennem en tidligere opmålt stikprøve  $x_1, \dots, x_n$  af  $n$  laster.

Sandsynligheden for overlevelseshændelsen (23) er da for en given a priori-tæthed lig med

$$\int_{-\infty}^\infty d\mu \int_0^\infty \Phi \left[ \frac{L-\mu}{\sigma} \right]^m f_{M, \Sigma}(\mu, \sigma | x_1, \dots, x_n) d\sigma \quad (24)$$

hvor  $f_{M, \Sigma}(\mu, \sigma | x_1, \dots, x_n)$  er den til a priori-tætheden svarende a posteriori-tæthed. Lad os holde os til de naturligt konjugerede a priori-tætheder (7) og indsætte en sådan for  $f_{M, \Sigma}(\mu, \sigma | x_1, \dots, x_n)$  i (24). Når  $m > 1$  kan integralet ikke udregnes analytisk ved kendte funktioner. Vi kan imidlertid opfatte hændelsen (23) som fælleshændelsen

$$\{X_1 \leq L\} \cap \dots \cap \{X_m \leq L\} \quad (25)$$

beskrevet ved de  $m$  sikkerhedsmargener

$$M_i = L - X_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (26)$$

og derfor benytte ulighederne (6.3.12) til vurdering af svigtsandsynligheden. De marginale svigthændelser

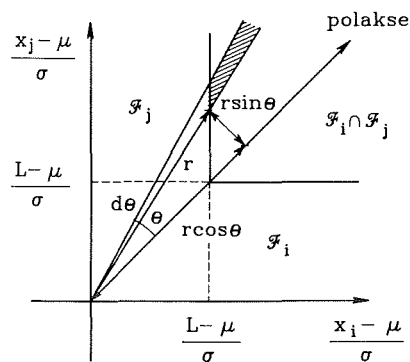
$$\mathcal{X}_i = \{X_i > L\}, i = 1, \dots, m \tag{27}$$

har ifølge (22) alle den samme sandsynlighed

$$p_1 = P(\mathcal{X}_i) = F_S\left[-\lambda \sqrt{\frac{\nu-1}{\nu+1}}; \nu-1\right], \lambda = \frac{L-\alpha}{\beta} \tag{28}$$

hvor  $F_S(\cdot; \nu-1)$  er t-fordelingsfunktionen med  $\nu - 1$  frihedsgrader.

For fællesmængderne  $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$  er beregningen mere kompliceret. For  $(M, \Sigma)$  =  $(\mu, \sigma)$  givet, kan  $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$  afbildes som i figur 11.1.



Figur 11.1. Retvinklet og polær repræsentation af den i eksempel 11.1 betragtede fælleshændelse  $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$ .

Ved den polære repræsentation vist i figur 11.1 fås for  $0 \leq \theta < \pi/4$  at

$$P(R > r | M = \mu, \Sigma = \sigma, \Theta = \theta) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \varphi(r) & \text{for } \mu \leq L \\ 1 & \text{for } \mu > L \end{cases} \geq \sqrt{2\pi} \varphi(r) \tag{29}$$

(se øvelse 11.2) hvor

$$R^2 = \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2 + \left(\frac{X_j - \mu}{\sigma}\right)^2 \tag{30}$$

og

$$r = \psi(\theta) \frac{L - \mu}{\sigma} \tag{31}$$

$$\psi(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\cos \theta - \sin \theta} \tag{32}$$

medens  $\Theta$  er ensformig fordelt på intervallet  $[-\pi, \pi]$ .

Øvelse 11.2 Vis, at  $R$  defineret ved (30) har Rayleighs tæthed

$$f_R(r) = r e^{-\frac{1}{2}r^2}, r \in \mathbb{R}_+ \tag{33}$$

og vis derved (29). □

Med brug af (7) til afbetingning af (29) fås herefter uligheden

$$\begin{aligned} P(R > r, M \leq L | \Theta = \theta) < \\ K \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+1} \exp\left[-\frac{\nu}{2}\left(\frac{\beta}{\sigma}\right)^2\right] d\sigma \int_{-\infty}^\infty \varphi\left[\frac{L-\mu}{\sigma/\psi}\right] \varphi\left[\frac{\mu-\alpha}{\sigma/\sqrt{\nu}}\right] d\mu \\ < P(R > r | \Theta = \theta) \end{aligned} \tag{34}$$

der gælder for  $0 \leq \theta < \pi/4$ , og hvori  $\psi = \psi(\theta)$ , medens  $K$  er normaliseringskonstanten hørende til (7):

$$K = \frac{2\sqrt{2} \beta^{\nu-1} (\nu/2)^{\nu/2}}{\Gamma\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \tag{35}$$

Øvelse 11.3 Vis (35) ved brug af (14). □

Det inderste integral i (34) udregnes ved brug af (3.2.21) til

$$\frac{\sigma}{\psi\sqrt{\nu}} \frac{\varphi\left[\frac{L-\alpha}{\sigma\sqrt{\frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{\nu}}}\right]}{\sqrt{\frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{\nu}}} \tag{36}$$

således at uligheden (34) ved brug af integralformlen (14) bliver

$$P(R > r, M \leq L | \Theta = \theta) <$$

$$\frac{K}{\sqrt{\psi^2 + \nu}} \int_0^\infty \left[ \frac{1}{\sigma} \right]^\nu \exp \left[ -\frac{\nu}{2} \left[ \frac{\beta}{\sigma} \right]^2 \left\{ 1 + \frac{\psi^2 \lambda^2}{\psi^2 + \nu} \right\} \right] d\sigma =$$

$$\sqrt{\frac{\nu}{\psi^2 + \nu}} \left[ 1 + \frac{\psi^2 \lambda^2}{\psi^2 + \nu} \right]^{-(\nu-1)/2} < P(R > r | \Theta = \theta) \quad (37)$$

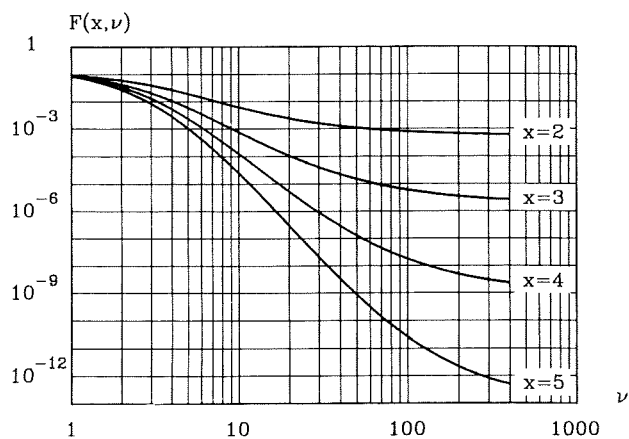
gældende for  $0 \leq \theta < \pi/4$ . Heraf følger, at

$$P(R > r, M \leq L, \Theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]) < F(\lambda, \nu) < P(R > r, \Theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]) \quad (38)$$

hvor

$$F(x, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{\nu}{\psi(\theta)^2 + \nu}} \left[ 1 + \frac{\psi(\theta)^2}{\psi(\theta)^2 + \nu} x^2 \right]^{-(\nu-1)/2} d\theta \quad (39)$$

er afbildet som funktion af  $\nu$  for forskellige værdier af  $x$  i figur 11.2.



Figur 11.2. Grafer for funktionen  $F(x, \nu)$  defineret ved (11.3.39).

$$F(x, \nu) \rightarrow \Phi(-x)^2 \text{ for } \nu \rightarrow \infty.$$

Det fremgår af figur 11.1, at højre side af (38) er en nedre grænse til  $P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j)$  medens venstre side af (38) er lig med  $P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \{M \leq L\})$ . Idet det bemærkes, at

$$p_2 = P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j) = P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \{M \leq L\}) + P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j \cap \{M > L\}) \quad (40)$$

følger det da af (38), at

$$F(\lambda, \nu) < p_2 < F(\lambda, \nu) + P(M > L) \quad (41)$$

hvor

$$P(M > L) = F_S \left[ -\lambda \sqrt{\nu-1}; \nu-1 \right] \quad (42)$$

ifølge (17). Med  $p_1 = P(\mathcal{A}_i)$  og  $p_2 = P(\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j)$  får ulighederne (6.3.12) formen

$$P(\mathcal{A}) \begin{cases} \geq p_1 \max_{j \in \{1, \dots, m\}} \left\{ j \left[ 1 - (j-1) \frac{p_2}{2p_1} \right] \right\} \\ \leq p_1 \left[ m - (m-1) \frac{p_2}{p_1} \right] \end{cases} \quad (43)$$

$$\quad (44)$$

idet mellemregningerne er helt magen til regningerne i eksempel 6.3. Den maksimale værdi i (43) antages for  $j$  lig med det heltal  $q$ , der er nærmest ved tallet  $1/2 + p_1/p_2$ . Hvis  $m < q$  sættes  $j = m$  i (43). Da  $p_2$  kun er bestemt med en nøjagtighed givet ved grænserne i (41), må  $p_2$  i (43) sættes til højre side af (41), medens  $p_2$  i (44) må sættes til venstre side af (41). For  $P(\mathcal{A})$  i det sædvanlige værdiområde og  $\nu$  passende stor er forskellen mellem de to sider negligerel. For  $m < q$  fås altså

$$P(\mathcal{A}) \geq mp_1 \left[ 1 - (m-1) \frac{F(\lambda, \nu) + P(M > L)}{2p_1} \right] \quad (45)$$

medens vi for alle  $m$  har

$$P(\mathcal{A}) \leq \text{mp}_1 \left[ 1 - \left[ 1 - \frac{1}{m} \right] \frac{F(\lambda, \nu)}{p_1} \right] \tag{46}$$

Den ikke-informative a priori-tæthed (5) fremkommer af (7) ved at sætte  $\nu = 0$ . Med en stikprøve af  $X$  af størrelse  $n$  til rådighed og med brug af den ikke-informative a priori-tæthed (5) skal vi ifølge (8), (9) og (10) i (45) og (46) sætte

$$\alpha = \bar{x}, \beta = \sqrt{s^2}, \nu = n \tag{47}$$

Antag eksempelvis, at  $\lambda = 5$  og  $\nu = 20$ . Af figur 11.2 aflæses  $F(5,20) \simeq 2.5 \cdot 10^{-7}$ , medens  $p_1 = F_S(-4.76;19) \simeq 0.687 \cdot 10^{-4}$  og  $P(M > L) = F_S(-21.79;19) \simeq 0$ . Af (41) følger da, at  $p_2 \simeq 2.5 \cdot 10^{-7}$ , således at  $q = 275$ . Hermed giver (45) og (46), at

$$\frac{P(\mathcal{A})}{m \cdot 0.687 \cdot 10^{-4}} \begin{cases} \geq 1 - \frac{1}{2} (m-1) 3.64 \cdot 10^{-3} \\ \leq 1 - \left[ 1 - \frac{1}{m} \right] 3.64 \cdot 10^{-3} \end{cases} \tag{48}$$

$$\tag{49}$$

For  $m > 275$  sættes højre side af (48) til 0.50, som er den værdi, der svarer til  $m = 275$ . Resultaterne er vist i tabel 11.1. Den sidste række i tabellen svarer til, at den statistiske usikkerhed er fjernet, og at  $(L-\mu)/\sigma = 5$ . Den statistiske usikkerhed ses at have en betydelig indflydelse på det generaliserede sikkerhedsindeks. □

$m$	$=$	1	10	100	275	500
$10^4 P(\mathcal{A}) \geq$		0.687	6.76	56.3	94.7	171.8
$10^4 P(\mathcal{A}) \leq$		0.687	6.85	68.5	188.2	342.3
$\beta_G \leq$		3.81	3.20	2.53	2.35	2.12
$\beta_G \geq$		3.81	3.20	2.47	2.08	1.82
$\beta_G$ for $\nu = \infty$		5.00	4.54	4.02	3.78	3.63

Tabel 11.1. Grænser for det generaliserede sikkerhedsindeks for en konstruktion, der underkastes  $m$  uafhængige lastgentagelser med ensfordelte og normalfordelte laster med parametre, der kun kendes ufuldstændigt gennem 20 lastobservationer. Tabellens sidste række svarer til kendte værdier af parametrene.

**Eksempel 11.2** Et konstruktionselement har bæreevnen  $R$  med hensyn til lastvirkningen  $S$ . Svigt indtræder, hvis og kun hvis  $R < S$ . Det antages, at  $R$  og  $S$  er indbyrdes uafhængige logaritmisk normalfordelte stokastiske variable. Fordelingsparametrene er ukendte, men der er givet stikprøven  $x_{11}, \dots, x_{1n_1}$  af  $X_1 = \log R$  og stikprøven  $x_{21}, \dots, x_{2n_2}$  af  $X_2 = \log S$ . Sættet af parametre  $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$  i den todimensionale normale fordeling for  $(X_1, X_2)$  antages at være et udfald af den stokastiske vektor  $(M_1, M_2, \Sigma_1, \Sigma_2)$ . Der forudsættes en ikke-informativ a priori-tæthed for  $(M_1, M_2, \Sigma_1, \Sigma_2)$  fastlagt ved diffus tæthed af  $(M_1, M_2, \log \Sigma_1, \log \Sigma_2)$  over hele  $\mathbb{R}^4$ .

Det følger da af (22), at variablene

$$T_1 = \frac{X_1 - \bar{x}_1}{s_1} \sqrt{\frac{n_1 - 1}{n_1 + 1}}, \quad T_2 = \frac{X_2 - \bar{x}_2}{s_2} \sqrt{\frac{n_2 - 1}{n_2 + 1}} \tag{50}$$

har prædiktive tætheder, der er  $t$ -tætheder med henholdsvis  $n_1 - 1$  og  $n_2 - 1$  frihedsgrader. Variablene  $T_1$  og  $T_2$  er desuden indbyrdes uafhængige. Svigthændelsen  $\{X_1 < X_2\}$  kan skrives som

$$\{X_1 < X_2\} = \left\{ T_1 \cos \omega - T_2 \sin \omega < \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{\sqrt{s_1^2 \frac{n_1 + 1}{n_1 - 1} + s_2^2 \frac{n_2 + 1}{n_2 - 1}}} \right\} \tag{51}$$

hvor  $0 \leq \omega \leq \pi/2$  og

$$\tan \omega = \frac{s_2 \sqrt{\frac{n_2 + 1}{n_2 - 1}}}{s_1 \sqrt{\frac{n_1 + 1}{n_1 - 1}}} \tag{52}$$

Den prædiktive fordeling for den stokastiske variable  $T_1 \cos \omega - T_2 \sin \omega$  kaldes Behrens fordeling med parameter  $\omega$  og frihedsgrader  $(\nu_1, \nu_2) = (n_1 - 1, n_2 - 1)$ . Den tilsvarende fordelingsfunktion  $\text{Beh}(\cdot; \omega, \nu_1, \nu_2)$  udregnes simplest ved numerisk integration af integralet



$$\text{Beh}(t; \omega, \nu_1, \nu_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_S(x; \nu_1) F_S\left[\frac{t-x \cos \omega}{\sin \omega}; \nu_2\right] dx \quad (53)$$

Behrenstæthed er symmetrisk omkring  $t = 0$ . Det generaliserede sikkerhedsindeks bliver altså

$$\beta = \Phi^{-1}\left[\text{Beh}\left[\frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_1^2 \frac{n_1+1}{n_1-1} + s_2^2 \frac{n_2+1}{n_2-1}}}; \omega, n_1-1, n_2-1\right]\right] \quad (54)$$

hvor  $\omega$  er givet ved (52).

Vi vil illustrere virkningen af den statistiske usikkerhed ved at anvende (54) på voksende stikprøver udtrykket uafhængigt fra to normalfordelinger med middelværdier  $\mu_1, \mu_2$  og standardafvigelser  $\sigma_1, \sigma_2$ . Værdierne  $\mu_1 = 4\sqrt{2}$ ,  $\mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$  er anvendt. Det betyder, at  $\beta \rightarrow 4$  for  $n_1 \rightarrow \infty$  og  $n_2 \rightarrow \infty$ .

Figur 11.3 viser 8 uafhængige simuleringer af det generaliserede sikkerhedsindeks  $\beta$  givet ved (54) for  $n_1 = n_2$  (fuldt optrukne kurver). Det ses, at en overvurdering af sikkerheden relativt til den komplette informationstilstand svarende til givne værdier af  $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$  meget vel kan finde sted, men almindeligvis undervurderes sikkerheden specielt for små stikprøver. Dette er en konsekvens af den anvendte ikke-informative a priori-fordeling, som er ekstremt afvigende fra den virkelige a priori-fordeling, som de 8 simuleringer svarer til. Denne sidste fordeling er jo en enkelt koncentreret sandsynlighedsmasse i punktet  $(\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) = (4\sqrt{2}, 0, 1, 1)$ . Undervurderingens størrelse afhænger af grænsesvigtssandsynligheden for  $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ . Jo mindre denne er, des mere udtalt bliver undervurderingen.

Hvis princippet om revision i det lange løb efterleves, må den ikke-informative a priori-fordeling opdateres på grundlag af indhøstede erfaringer. Regnemæssigt mest hensigtsmæssig er tilpasningen af en a priori-tæthed fra familien af naturligt konjugerede tætheder (7) ved passende valg af parametrene  $\alpha, \beta, \nu$ .

Det i store træk stigende forløb af kurverne viser, at forøgelse af stikprøvestørrelsen giver en gevinst i form af forøget sikkerhed. Med givne dimensione

ringskriterier, der fastlægger sikkerhedsniveauet, kan der altså opnås materialebesparelser ved forøget opsamling af information.

Figur 11.3 viser også kurverne for de sikkerhedsindeks, der fås, når  $\sigma_1$  og  $\sigma_2$  forudsættes kendte (punkterede kurver). Ifølge (3.2.19) har  $X_1$  og  $X_2$  da prædiktive normalfordelinger med middelværdier  $\bar{x}_1$  og  $\bar{x}_2$  og varianser  $\sigma_1^2(1+1/n_1)$  og  $\sigma_2^2(1+1/n_2)$ . Sikkerhedsindekset bliver derfor

$$\beta = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\sigma_1^2 \left[1 + \frac{1}{n_1}\right] + \sigma_2^2 \left[1 + \frac{1}{n_2}\right]}} \quad (55)$$

Den forøgede information ses at slå igennem i simuleringerne. Det bemærkes, at det kan forekomme, at  $\beta$  bestemt ved (55) bliver mindre end  $\beta$  bestemt ved (54). □

Valget af parametrene  $\alpha, \beta, \nu$  i a priori-tætheden (7) kan støttes på formlerne

$$E[M] = \alpha \quad (56)$$

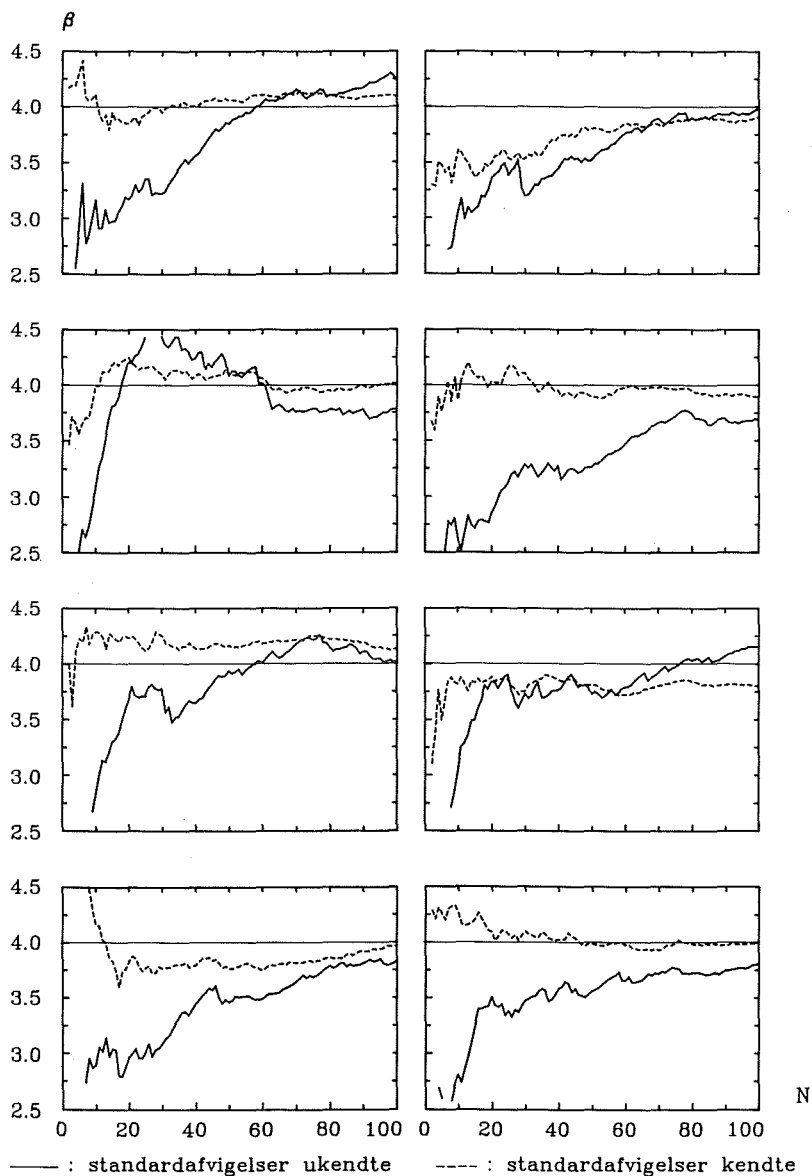
$$D[M] = \frac{\beta}{\sqrt{\nu-3}} \quad (57)$$

der følger af (17) (idet en standard t-tæthed med  $\nu$  frihedsgrader har variansen  $\nu/(\nu-2)$ ), samt formlen

$$E[\Sigma] = \frac{\Gamma\left[\frac{\nu-2}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \sqrt{\frac{\nu}{2}} \beta \quad (58)$$

der følger af (12) ved brug af standardformlen (14).

Hvis et ingeniørmæssigt skøn kan give forsigtigt ansatte værdier for variationskoefficienterne  $V_M$  og  $V_X$ , kan man sætte



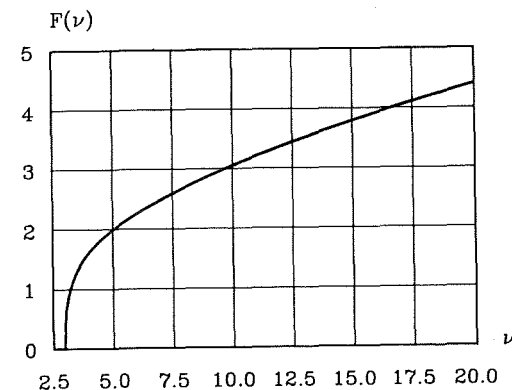
Figur 11.3. Otte udfald af uafhængigt simulerede generaliserede sikkerhedsindeks som funktion af stikprøvestørrelsen.

$$\frac{V_X}{V_M} \approx \frac{E[\Sigma]/E[M]}{D[M]/E[M]} = \sqrt{\frac{\nu(\nu-3)}{2}} \frac{\Gamma\left[\frac{\nu-2}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} \quad (59)$$

hvoraf  $\nu$  kan bestemmes, idet højre side af (59) er en voksende funktion af  $\nu$ . Denne funktion er afbildet i figur 11.4. Middelværdien  $E[M]$  ansættes direkte, hvorved  $\alpha$  er bestemt ved (60). Sluttelig findes  $\beta$  af formlen

$$\beta = \alpha \sqrt{\nu-3} V_M \quad (60)$$

der følger direkte af (56) og (57).



Figur 11.4. Grafen for funktionen  $F(\nu)$  defineret ved højre side af (11.3.59).

#### 11.4 Eksperimentel kalibrering af matematiske modeller \*

Lad os antage, at der er formuleret en deterministisk model for sammenhængen mellem et sæt variable  $y, x_1, \dots, x_m$  og at denne model fører til formlen

$$y_{\text{model}} = f(x_1, \dots, x_m) \quad (1)$$

hvor  $f$  er en given funktion af  $x_1, \dots, x_m$ . Eksempelvis kan  $y$  være en bæreevne og  $x_1, \dots, x_m$  være materialevariable og geometriske variable. En sådan formel tages ofte som udgangspunkt for formulering af en probabilistisk

model. En gængs måde er at erstatte inputvariablene  $x_1, \dots, x_m$  med de stokastiske variable  $X_1, \dots, X_m$  for derved at definere den stokastiske variable

$$Y_{\text{model}} = f(X_1, \dots, X_m) \quad (2)$$

Formålet hermed er at opnå, at denne stokastiske variable bliver korreleret (og helst stærkt korreleret) med den tilsvarende direkte observerbare stokastiske variable  $Y_{\text{målt}}$ .

Lad os antage, at en stikprøve af  $(Y_{\text{målt}}, X_1, \dots, X_m)$  kan observeres. Derved kan en stikprøve af  $(Y_{\text{målt}}, Y_{\text{model}})$  etableres. Forholdet

$$K = \frac{Y_{\text{målt}}}{Y_{\text{model}}} \quad (3)$$

vil kun blive konstanten 1, hvis modellen er perfekt. I almindelighed vil  $K$  variere mere eller mindre tilfældigt.

Det er rimeligt at hævde, at modellen kun kan påstås at indfange den væsentlige afhængighed mellem  $Y_{\text{målt}}$  og  $(X_1, \dots, X_m)$ , enten hvis den stokastiske variable  $K$  har en passende lille variationskoefficient (hvor lille er et spørgsmål om den praktiske betydning af modellens nøjagtighed), eller hvis  $K$  er ukorreleret med  $(X_1, \dots, X_m)$ , eller bedre, stokastisk uafhængig af  $(X_1, \dots, X_m)$ .

Antag, at  $X_1, \dots, X_m$  kan kontrolleres til at have givne værdier  $x_1, \dots, x_m$  i den eksperimentelle situation, medens  $Y_{\text{målt}}$  kommer ud som et måleresultat svarende til disse værdier. Vi skal da sammenligne udfald af  $Y_{\text{målt}}$  med  $y_{\text{model}} = f(x_1, \dots, x_m)$ , hvilket fører til korrektionsfaktoren

$$K(x_1, \dots, x_m) = \frac{Y_{\text{målt}}}{y_{\text{model}}} \quad (4)$$

Stikprøven af disse korrektionsfaktorer kan behandles ved regressionsanalyse med det formål at afsløre  $K$ 's afhængighed af  $(x_1, \dots, x_m)$ . De to almindeligst benyttede regressionsmodeller er den lineære model

$$K(x_1, \dots, x_m) = \alpha + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m + R \quad (5)$$

og potensproduktmodellen

$$K(x_1, \dots, x_m) = x_1^{\beta_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\beta_m} e^{(\alpha+R)} \quad (6)$$

hvor  $R$  er det stokastiske residue med middelværdi nul. Den sidste model er ækvivalent med den lineære model

$$\log K(x_1, \dots, x_m) = \alpha + \beta_1 \log x_1 + \dots + \beta_m \log x_m + R \quad (7)$$

Lad os derfor koncentrere os om (5). Vi vil antage, at  $R$  er normalfordelt med ukendt standardafvigelse  $\sigma$ . Heraf følger, at  $K$  er en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi  $\alpha + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m$ , hvor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$  er en fri inputvektor, medens  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m$  er ukendte parametre. Ved den eksperimentelle undersøgelse frembringes en stikprøve

$$(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n) \quad (8)$$

hvor  $y_i$  er den målte værdi for  $Y_i = K(\mathbf{x}_i)$ . Det antages, at de stokastiske variable  $Y_1, \dots, Y_n$  er indbyrdes uafhængige. For givne værdier af  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m$ ,  $\sigma$  er  $Y_i$  normalfordelt med middelværdien

$$E[Y_i | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n] = \alpha + \beta' \mathbf{x}_i \quad (9)$$

hvor  $\beta' = [\beta_1 \dots \beta_m]$ . Likelihoodfunktionen

$$L(\alpha, \beta, \sigma; (\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n)) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \prod_{i=1}^n \varphi\left[\frac{y_i - (\alpha + \beta' \mathbf{x}_i)}{\sigma}\right] \quad (10)$$

kan efter nogen regning vises at være

$$L(\alpha, \beta, \sigma; (\mathbf{x}_1, y_1), \dots, (\mathbf{x}_n, y_n)) \propto \varphi\left[\frac{\alpha - \bar{y}}{\sigma/\sqrt{n}}\right] \cdot$$

$$\left(\frac{1}{\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{n}{2} \frac{c[y,y] - c[x,y]'c[x,x']^{-1}c[x,y]}{\sigma^2}\right] \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(\beta - c[x,x']^{-1}c[x,y])'c[x,x'](\beta - c[x,x']^{-1}c[x,y])}{\sigma^2/n}\right] \quad (11)$$

hvor

$$c[y,y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (12)$$

$$c[x,y] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (13)$$

$$c[x,x'] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(x_i - \bar{x})' \quad (14)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (15)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (16)$$

Lad den til parametrene  $(\alpha, \beta, \log \sigma)$  svarende bayeske stokastiske vektor  $(A, B, \log \Sigma)$  have en diffus a priori-tæthed over hele  $\mathbb{R}^{m+2}$ . A posteriori-tætheden for  $(A, B, \log \Sigma)$  fremkommer da af likelihoodfunktionen ved division med  $\sigma$ . Formen på likelihoodfunktionen viser, at den stokastiske variable

$$U = \frac{A - \bar{y}}{\Sigma / \sqrt{n}} \quad (17)$$

derved bliver standardiseret normalfordelt og uafhængig af vektoren

$$Z = \frac{B - c[x,x']^{-1}c[x,y]}{\Sigma / \sqrt{n}} \quad (18)$$

Denne vektor  $Z$  ses at være normalfordelt med nulvektoren som middelværdivektor og med kovariansmatricen  $c[x,x']^{-1}$ . Det ses yderligere, at  $\Sigma$  har a posteriori-tætheden

$$f_{\Sigma}(\sigma) \propto \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{n-m} \exp\left[-\frac{n}{2} \left(\frac{s}{\sigma}\right)^2\right], \sigma \in \mathbb{R}_+ \quad (19)$$

hvor

$$s^2 = c[y,y] - c[x,y]'c[x,x']^{-1}c[x,y] \quad (20)$$

Som i øvelse 11.1 ses, at den stokastiske variable

$$\frac{ns^2}{\Sigma^2} \quad (21)$$

har  $\chi^2$ -tæthed med  $n - m - 1$  frihedsgrader.

**Øvelse 11.4** Students  $t$ -fordeling med  $\nu$  frihedsgrader kan defineres som fordelingen af forholdet  $X/\sqrt{Y/\nu}$ , hvor  $X$  og  $Y$  er indbyrdes uafhængige stokastiske variable,  $X$  er standardiseret normalfordelt, og  $Y$  er  $\chi^2$ -fordelt med  $\nu$  frihedsgrader.

Vis ved brug af dette resultat, at

$$\frac{A - \bar{y}}{s} \sqrt{n - m - 1} \quad (22)$$

og hvert af elementerne i den stokastiske vektor

$$\frac{B - c[x,x']^{-1}c[x,y]}{s} \sqrt{n - m - 1} \quad (23)$$

efter multiplikation med passende konstanter alle har  $t$ -fordeling med  $n - m - 1$  frihedsgrader.  $\square$

For sikkerhedsanalysen har den prædiktive fordeling af  $K(\mathbf{x})$  naturligvis særlig interesse. Vi har

$$f_{K(\mathbf{x})}(y | \alpha, \beta, \sigma, \mathbf{x}) \propto \frac{1}{\sigma} \varphi \left[ \frac{y - (\alpha + \beta'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}))}{\sigma} \right] \quad (24)$$

og dermed

$$f_{K(\mathbf{x})}(y | (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \mathbf{x}) =$$

$$E \left[ \frac{1}{\Sigma} \varphi \left[ \frac{y - (A + B'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}))}{\Sigma} \right] \right] =$$

$$E \left[ \frac{1}{\Sigma} \varphi \left[ \frac{y - \hat{e}[y | \mathbf{x}]}{\Sigma} - \frac{1}{\sqrt{n}} U - \frac{1}{\sqrt{n}} Z'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \right] \right] \quad (25)$$

hvor vi har indført  $U$  og  $Z$  defineret ved (17) og (18), og hvor

$$\hat{e}[y | \mathbf{x}] = \bar{y} + c[\mathbf{x}, y]' c[\mathbf{x}, \mathbf{x}']^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (26)$$

Det bemærkes, at  $\Sigma$ ,  $U$  og

$$W = Z'(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (27)$$

er indbyrdes uafhængige, og at  $W$  er normalfordelt med middelværdi nul og varians

$$\sigma_W^2 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})' c[\mathbf{x}, \mathbf{x}']^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \quad (28)$$

Idet (25) skrives som  $E[h(U, W, \Sigma)]$ , har vi  $E[h(U, W, \Sigma)] = E[E[h(U, W, \Sigma) | \Sigma]] = E[E[E[h(U, W, \Sigma) | W, \Sigma] | \Sigma]]$ , se (4.3.24). Dette skema for udregning af en middelværdi ved successiv bestemmelse af betingede

middelværdier (begyndende "indefra") anvendes på (25). Ved brug af (3.2.21) finder vi da

$$E \left[ \frac{1}{\Sigma} \varphi \left[ \frac{y - \hat{e}[y | \mathbf{x}]}{\Sigma} - \frac{1}{\sqrt{n}} U - \frac{1}{\sqrt{n}} W \right] \right] =$$

$$E \left[ \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left[ \frac{\dots - u}{\sqrt{n}} \right] \varphi(u) du \right] \propto$$

$$E \left[ \frac{1}{\Sigma} \varphi \left[ \frac{(y - \hat{e}[y | \mathbf{x}]) \sqrt{n} / \Sigma - W}{\sqrt{n+1}} \right] \right] \propto$$

$$E \left[ \frac{1}{\Sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi \left[ \frac{\dots - w}{\sqrt{n+1}} \right] \varphi \left[ \frac{w}{\sigma_W} \right] dw \right] \propto$$

$$E \left[ \frac{1}{\Sigma} \varphi \left[ \frac{(y - \hat{e}[y | \mathbf{x}]) \sqrt{n}}{\Sigma \sqrt{n+1 + \sigma_W^2}} \right] \right] \propto$$

$$\int_0^{\infty} \left[ \frac{1}{\sigma} \right]^{n-m+1} \exp \left[ -\frac{n}{2} \left[ \frac{s}{\sigma} \right]^2 \left\{ 1 + \frac{(y - \hat{e}[y | \mathbf{x}])^2}{s^2 (n+1 + \sigma_W^2)} \right\} \right] d\sigma \quad (29)$$

hvor a posteriori-tætheden (19) for  $\Sigma$  er benyttet i sidste skridt. Integralformlen (9.3.14) kan herefter benyttes på (29). Vi har altså den prædiktive tæthed

$$f_{K(\mathbf{x})}(y | (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \mathbf{x}) \propto$$

$$\left[ 1 + \frac{1}{n+1 + \sigma_W^2} \left[ \frac{y - \hat{e}[y | \mathbf{x}]}{s} \right]^2 \right]^{-\frac{(n-m-1)+1}{2}} \quad (30)$$

der viser, at  $K(\mathbf{x})$  med hensyn til prædiktiv fordeling kan skrives som

$$K(\mathbf{x}, T_{n-m-1}) =$$

$$\hat{e}[y|x] + T_{n-m-1} \sqrt{\frac{c[y,y] - c[x,y]' c[x,x]^{-1} c[x,y]}{n-m-1}} \sqrt{\frac{n+1+\sigma_W^2}{n-m-1}} \quad (31)$$

hvor  $T_{n-m-1}$  er en stokastisk variabel, der er  $t$ -fordelt med  $n - m - 1$  frihedsgrader, sml (9.3.21) og (9.3.22). Det ses, at  $K(x)$  afhænger lineært af  $x$  gennem den lineære regressionsdel  $\hat{e}[y|x]$  defineret ved (26), som ifølge teorien for lineær regression givet i kapitel 4 netop er den lineære funktion, der svarer til mindste kvadratsumsafvigelse ("method of least squares"). Herudover indgår der et ikke-lineært bidrag gennem  $\sigma_W^2$ , som er givet ved den kvadratiske form (28).

Ved anvendelserne i bærende konstruktioners sikkerhed vil  $K(x)$  typisk være en korrektion til en bæreevneformel, der skal sammenlignes med en last eller en snitkraft  $S$ . Lad os antage, at  $K(x)$  er en additiv korrektion, dvs at  $K(x)$  er defineret ved

$$K(x) = Y_{\text{målt}} - y_{\text{model}} \quad (32)$$

Da har vi, at ligningen

$$R(x) + K(x,t) - S(x,x_1) = 0 \quad (33)$$

definerer grænsetilstanden. Heri er  $R(x)$  bæreevne modellen, medens  $S(x,x_1)$  er den relevante last eller lastvirkning, der kan afhænge af  $x$  og derudover af andre inputvariable samlet i  $x_1$ . Grænsetilstanden er herved beskrevet i rummet af  $(x,x_1,t)$ , hvor  $t$  er den ekstra variabel, der indeholder den stokastiske del af modelusikkerheden vedrørende  $R(x)$ . Den til denne inputvariabel svarende fordeling er da  $t$ -fordelingen med  $n - m - 1$  frihedsgrader. Herved omfatter modelusikkerheden både statistisk usikkerhed og egentlig modelusikkerhed. For  $n \rightarrow \infty$  forsvinder den statistiske usikkerhed og tilbage bliver en normalfordelt modelusikkerhed.

For  $x = \bar{x}$  er  $\sigma_W^2 = 0$ . Hvis formlen kun anvendes inden for det område af  $x$ -rummet, der er dækket af eksperimenterne, vil  $\sigma_W^2$  næppe blive meget større end  $3m$ .

**Bemærkning 11.1** Den øvre grænse  $3m$  for  $\sigma_W^2$  fremkommer ved et simpelt overslag, hvis det forudsættes, at  $x_1, \dots, x_n$  er jævnt fordelt over en kubus centreret i gennemsnitspunktet  $\bar{x}$ , og  $x$  vælges svarende til et hjørne af denne kubus.

Hvis  $x$  forudsættes at være et udfald af en stokastisk vektor, der er ensformigt fordelt over kubusen, da vil  $\sigma_W^2$  i middel have værdien  $m$ .  $\square$

I mange praktiske situationer er  $n$  ikke nødvendigvis stor i forhold til  $m$ . Derfor kan man ikke på forhånd simplificere (31) ved at sætte  $\sigma_W$  til en passende konstant. Det kan generelt siges, at modelusikkerheden undervurderes, hvis  $\sigma_W$  sættes til nul. I gennemsnit vil  $\sigma_W^2 = m$  nok være en brugbar approksimation, såfremt  $n$  er rimelig stor i forhold til  $m$ .

Det skal fremhæves, at den ovenfor behandlede stokastiske model ud over normalfordeling for residuet forudsætter varianshomogenitet over det betragtede variationsområde for  $x$  (i statistiken betegnet som det homoscedastiske tilfælde). Redegørelse for undersøgelsesmetoder vedrørende denne forudsætnings holdbarhed er givet i standardværker om matematisk statistisk teori. Dette gælder ligeledes metoder til udpegning af netop de variable blandt elementerne i  $x$ , der bidrager signifikant til variationen af  $K(x)$ . Blandt disse metoder bygger de bayeske metoder på, at man undersøger, hvordan nulværdier af en eller flere af parametrene  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m$  ligger i forhold til den samlede a posteriori-fordeling for disse parametre. Hvis disse nulværdier i en nøjere specificeret forstand ikke er usandsynlige i a posteriori-fordelingen, kan man uden åbenlys modstrid med de givne data sætte de pågældende parametre til nul, dvs man kan fjerne de tilsvarende variable i  $x$  fra regressionsmodellen (simpelhedsprincippet).

Valget af regressionsmodel må bygge på passende grafiske afbildninger af datamaterialet og grafiske studier af den empiriske fordeling af de tilsvarende residuer. Eksempelvis kan man måske herved se tendenser til afvigelse fra varianshomogenitet. Måske ses tendens til at variationskoefficienten er uafhængig af  $x$  og dermed at logaritmisk transformation vil føre til det homoscedastiske tilfælde, se (7.1.5). Ikke-lineær tendens i middelvariationen med hensyn til  $x$  forhindrer naturligvis ikke brug af lineær regression, idet

det afgørende for anvendelsen af den ovenfor givne teori er linearitet i parametrene  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m$  (og ikke i  $\mathbf{x}$ ), samt at der er varianshomogenitet.

Hvis stikprøvestørrelsen  $n$  er passende stor, er afvigelser af residuets fordeling fra normalfordeling mindre kritisk, når det drejer sig om at bestemme brugbare a posteriori-fordelinger for parametrene. Begrundelsen herfor er at finde i den centrale grænseværdisætning, der i en af sine simpleste former udsiger, at summen af  $n$  indbyrdes uafhængige ensfordelte stokastiske vektorer med endelig kovariansmatrix asymptotisk er normalfordelt for  $n \rightarrow \infty$ . Denne sætning bekræfter den erfaring, at statistiske metoder baseret på normalfordelingen har en betydelig robusthed med hensyn til afvigelser fra fordelingsforudsætningerne. Vejledninger om stikprøvestørrelser kan findes i den praktiske statistiske litteratur, men approksimationsgodheden kan altid efterprøves ved Monte Carlo simulering på computer.

Medens disse bemærkninger gælder for bestemmelsen af a posteriori-fordelingen af parametrene  $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_m$ , må større forsigtighed iagttages ved bestemmelse af den prædiktive fordeling af  $K(\mathbf{x})$ , såfremt residuet ikke er normalfordelt. Den aktuelle betingede fordeling af  $K(\mathbf{x})$  (givet parametrene) bør bruges, men den på normalfordelingsantagelsen udregnede a posteriori-fordeling kan bruges til at afbetinge, hvis den eksakte a posteriori-fordeling vanskeligt lader sig bestemme. At  $K(\mathbf{x})$  ikke uden videre kan antages at være normalfordelt, har især betydning i bærende konstruktioners sikkerhed, hvor halefølsomhedsproblemet (se eksempel 7.2) endda kan nødvendiggøre normmæssig standardisering af fordelingstyper for visse inputvariable. Blandt disse variable kan være modelusikkerhedsvariable (se kapitel 3), som er relateret til  $K(\mathbf{x})$ . Dette kan bevirke, at fordelingstypen for  $K(\mathbf{x})$  for  $n \rightarrow \infty$  følger af standardiseringen, og dermed at residuet har fået tillagt en betinget fordeling (givet parametrene) af normstandardiseret type.

Den måde, hvorpå vi i kapitel 3 har repræsenteret modelusikkerhederne alene ved brug af stokastiske faktorer eller addender til inputvariablene, er ikke i overensstemmelse med den form, hvori korrektionen  $K(\mathbf{x})$  er indført ovenfor. Der er imidlertid en meget væsentlig grund til at fastholde den i kapitel 3 indførte repræsentation af modelusikkerhederne. Det er det overordnede pragmatiske hensyn, der dikteres af selve den tekniske mekaniske teori, hvorpå enhver rationel analyse af bærende konstruktioners sikkerhed nødvendigvis må bygge. Det er således særdeles hensigtsmæssigt, at man kan

regne konsistent inden for en afrundet mekanisk fysisk teori, der ikke kræver, at man holder rede på korrektioner til ganske bestemte formeludtryk opstået i mere eller mindre arbitrære eksperimentelle sammenhænge. Denne frihed opnås ved at benytte den invariante modelusikkerhedsrepræsentation, der består i at lade modelusikkerhederne følge inputvariablene i alle regninger, ganske på samme måde som partialkoefficienterne i den deterministiske sikkerhedseftervisningsmetode følger inputvariablene. I anvendelserne bygger man herefter på den hypotese, at den mekaniske model har en tilstrækkelig empirisk forudsigelseskraft til, at den med de indførte modelusikkerhedssementer kan anvendes på konstruktive variationer, der afviger inden for visse rimelige grænser fra de udformninger, der er blevet prøvet eksperimentelt. Hvis denne hypotese ikke kan accepteres, er konsekvensen, at anvendeligheden af den mekaniske teori i høj grad begrænses, og at en lang række konstruktionsdetaljer må fastlåses til de former, der er afprøvet eksperimentelt. En sådan restriktion synes ikke at være særlig fornuftig, når man betænker, at relationen mellem den eksperimentelle situation (ofte en meget "ideal" laboratoriesituation) og den virkelige situation i den aktuelle konstruktion kan være særdeles usikker. U hensigtsmæssige begrænsninger af denne art præger mange landes normer med det resultat, at disse normer er blevet meget voluminøse med standardisering af alle mulige slags detaljer. De danske normer hører ikke til denne kategori.

Ud over at pragmatiske hensyn lader os foretrække at have modelusikkerhederne knyttet til inputvariablene, stiller hensynet til anvendeligheden af den tekniske mekaniske teori det krav, at modelusikkerhedsvariablene vedrørende en anvendt bæreevneteorier ikke bliver eksplicit afhængig af geometriske størrelser, der specificerer lasternes opstilling på konstruktionen. Hvis dette ikke kan opnås med en for praksis tilstrækkelig nøjagtighed, bliver den pågældende bæreevneteorier af tvivlsom værdi for det betragtede anvendelsesområde.

På baggrund af den foregående diskussion må vi altså omsætte den ved eksperimenterne opnåede information om  $K(\mathbf{x})$  til den invariante form. Antag eksempelvis, at  $K(\mathbf{x})$  er defineret ved

$$\log Y_{\text{målt}} = \log f(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x}) \quad (34)$$

og at  $x_1$  er en materialestyrkevariabel, hvortil vi naturligt kan knytte modelusikkerheden på faktorform. Da har vi

$$\log f(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x}) = \log f(I_1(\mathbf{x}) x_1, \dots, x_m) \quad (35)$$

hvoraf vi finder

$$I_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{x_1} h(\log f(\mathbf{x}) + K(\mathbf{x}), x_2, \dots, x_m) \quad (36)$$

hvor  $h$  er den funktion, der fremkommer ved løsningen af (35). Ved hjælp af dette udtryk og den givne prædiktive fordeling for  $K(\mathbf{x})$  kan man da bestemme den prædiktive fordeling for modelusikkerhedsfaktoren  $I_1(\mathbf{x})$ . Hvis  $I_1(\mathbf{x})$  har fået tillagt en normstandardiseret fordelingstype under forudsætning af, at der ikke er statistisk usikkerhed, kan man af (35) bestemme den fordelingstype, som må tillægges  $K(\mathbf{x})$ , og dermed residuet i regressionsmodellen.

### 11.5 Historiske og bibliografiske noter

Det falder uden for denne bogs rammer at komme ind på den bayesske statistiks historiske udvikling. Dertil er emnet alt for stort og litteraturen overvældende. Her skal blot nævnes, at *D.V. Lindleys* elementære lærebogsværk fra 1965 [11.3] har været til speciel inspiration for denne bogs forfattere. Det samme gælder *J.R. Benjamin* og *C.A. Cornells* bog fra 1970 [11.1] for sin ingeniørmæssige relevans.

Hensyntagen til statistisk usikkerhed ved sikkerhedsindeksets definition blev diskuteret først af *D. Veneziano* [11.5] i 1975, som foreslog at basere definitionen på prædiktive fordelinger. Siden har dette princip været bredt accepteret blandt de fleste tilhængere af den bayesske tolkning af sandsynlighedsbegrebet. Blandt bidragsyderne til anvendelse af bayesske metoder på problemer relateret til bærende konstruktioners sikkerhed bør nævnes *R. Rackwitz* for adskillige konkrete anvendelser [11.4].

Der findes også en del kritikere af det i dette kapitel definerede sikkerhedsindeks i form af det generaliserede sikkerhedsindeks udregnet ved brug af de prædiktive fordelinger. Kritikken har at gøre med visse egenskaber ved den

beslutningsteori, som introduceres i næste kapitel. Indvendinger er således fornyligt blevet rejst af *A. Der Kiureghian* [11.2] blandt andet på grundlag af studier af problemet i eksempel 11.2.

### Referencer

- 11.1 J.R. Benjamin and C.A. Cornell: *Probability, Statistics and Decision for Civil Engineers*. McGraw-Hill, New York, 1970.
- 11.2 A. Der Kiureghian: Measures of Structural Safety Under Imperfect States of Knowledge, *Journal of Structural Engineering*, vol.115, 1989.
- 11.3 D.V. Lindley: *Introduction to Probability and Statistics, pt. 2, Inference*. Cambridge, London, 1965.
- 11.4 R. Rackwitz: Predictive Distribution of Strength under Control, *Materials & Structures*, vol.16, 1983.
- 11.5 D. Veneziano: A Theory of Reliability which Includes Statistical Uncertainty, *Proceedings, Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP2)*, 2nd International Conference 1975, vol.1, Aachen, F.R. Germany.



## 12. BESLUTNINGSDILOGI

### 12.1 Beslutningsproblemet

Den i det foregående beskrevne teori for bærende konstruktioners sikkerhed giver i sig selv ingen anvisning på, hvordan man skal vælge sikkerhedsniveauet. Spørgsmålet er hvilket niveau man bør kræve, for at en konstruktion i lyset af den til rådighed værende information om konstruktionen og dens laster netop kan erklæres for at være tilstrækkeligt sikker. Det er forfatterens holdning, at det for samfundet acceptable og i praksis normativt givne sikkerhedsniveau for sædvanlige konstruktioner højst bør ændre sig evolutionært med udgangspunkt i en kalibrering til eksisterende byggepraksis.

Det er på den anden side klart, at der nødvendigvis må formuleres nogle overordnede principper for rationel styring af denne sikkerhedsniveauevolution. Det synes således indlysende fornuftigt at lade det acceptable sikkerhedsniveau med hensyn til en uønsket hændelse være afhængig af de skadekonsekvenser, der følger af hændelsen. For at opnå indsigt i disse problemers natur vil vi i det følgende gå gennem de grundlæggende træk af den teori for beslutningstagen, som blev formuleret i USA under anden verdenskrig af *von Neumann* og *Morgenstern*, [12.1].

Først må vi gøre os klart, at en beslutning udløser en handling, der fører til visse konsekvenser. Blandt de konsekvenser, der følger ved realiseringen af et projekt for en bærende konstruktion, er et for projektets realisering nødvendigt forbrug af kapital, der varierer med konstruktionens udformning og dimensionering. Andre konsekvenser er svigt og ikke-svigt af forskellig type, holdbarhedskonsekvenser etc. Kun i meget simple beslutningssituationer fører de udløste handlinger til entydige udfald af konsekvenserne. I almindelighed medfører handlingen, at der igangsættes et lotteri mellem konsekvenserne i den forstand, at der ved handlingen udvælges en sandsynlighedsfordeling fra en given mængde af sandsynlighedsfordelinger over mængden af mulige konsekvenser. Eksempelvis svarer et valg mellem forskellige stangtyper og stangdimensioner i en gitterkonstruktion til et valg fra en mængde af styrkeegenskabsfordelinger og tilhørende priser. Hvert valg er indirekte et valg mellem sandsynlighedsfordelinger over den for gitterkonstruktionen relevante

mængde af konsekvenser. Elementerne i mængden af sandsynlighedsfordelinger over konsekvenserne betegnes i beslutningsteorien formelt som lotterier mellem konsekvenserne. Et lotteri er altså en vægtet mængde af konsekvenser.

Den basale ide i *von Neumanns* og *Morgensterns* beslutningsteori er, at beslutningstageren formulerer sine "personlige" præferencer ved at definere en nyttefunktion på mængden af konsekvenser. En betragtet konsekvens foretrækkes for enhver anden konsekvens med lavere nytteværdi. Gennem nogle få "selvindlysende" aksiomer udvides denne nyttefunktion til mængden af alle lotterier mellem konsekvenserne, idet mængden af konsekvenser naturligvis identificeres med mængden af de trivielle lotterier, der hver især har en koncentreret (nul-et) sandsynlighedsfordeling. Herved indføres en præferenceordning i mængden af lotterier mellem konsekvenserne. Denne ordning inducerer åbenbart en præferenceordning i mængden af relevante beslutninger. Hvis den eksisterer, er den bedste beslutning da den, for hvilket det tilsvarende lotteri har størst nytteværdi.

Ved anvendelse af en sådan beslutningsteori som grundlag for valg af en bærende konstruktion acceptable sikkerhedsniveau må den projekterende ingeniørs "personlige" præferencer naturligvis reguleres normativt. Den normative fastlæggelse af acceptable sikkerhedsniveauer afløses altså af normative værdifastsættelser af visse af de elementer, der fastlægger relevante nyttefunktioner. Normer med sådanne angivelser eksisterer ikke ved denne bogs udgivelse. Problemet har imidlertid påtrængende relevans, især i forbindelse med beslutninger vedrørende reparationer eller ændringer af eksisterende bygværker, der behandles i kapitel 13.

Hvis rationalitet og optimal handling bør kendetegne ingeniørmæssigt virke, og en norm ikke er foreskrevet, er der næppe nogen vej uden om nytteværdibetragtninger. I en speciel tolkning giver konsekvensberegningsskemaet en mulighed for at hente støtte i de eksisterende normer. Forudsætningen herfor er, at det accepteres, at de eksisterende normer reflekterer for tiden optimal ingeniørmæssig beslutningstagen. En nærmere analyse af en repræsentativ population af forskellige konstruktioner med samme svigtkonsekvenser ingeniørmæssigt bedømt og alle dimensioneret efter de i 1990 eksisterende normer vil dog vise, at optimalitetspostulatet ikke er konsistent med den konsekvensmæssige ligeværdighed af konstruktionerne. Optimali-

tetspostulatet må derfor nødvendigvis knyttes til en passende valgt repræsentativ konstruktion for den betragtede population af konstruktioner. Gennem dette valg bliver der frihed til at kalibrere en ny norm på en sådan måde, at dens brug i gennemsnit vil føre til materialebesparelser samtidig med, at den ifølge konsekvensberegningens principper giver et samfundsmæssigt acceptabelt sikkerhedsniveau.

## 12.2 Von Neumanns og Morgensterns aksiomer for præferenceordning

Lad  $\mathcal{K}$  være mængden af konsekvenser i et givet beslutningsproblem og lad  $\mathcal{L}$  være mængden af lotterier mellem konsekvenserne i  $\mathcal{K}$ . Det viser sig at være hensigtsmæssigt at benytte følgende formelle notation

$$L = \alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_n K_n \quad (1)$$

for et lotteri mellem endeligt mange konsekvenser  $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$ , hvor

$$\alpha_i = E[1_{K_i}], i = 1, \dots, n \quad (2)$$

er sandsynligheden for at få konsekvensen  $K_i$ , og  $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ . På tilsvarende måde vil vi skrive et lotteri mellem  $m$  lotterier  $L_1, \dots, L_m$  som

$$L = \gamma_1 L_1 + \dots + \gamma_m L_m \quad (3)$$

hvor

$$\gamma_j = E[1_{L_j}], j = 1, \dots, m \quad (4)$$

er sandsynligheden for, at lotteriet  $L_j$  udtrækkes, og  $\gamma_1 + \dots + \gamma_m = 1$ . Et lotteri mellem lotterier fra  $\mathcal{L}$  kaldes et *sammensat lotteri*. Skrivemåden (3) er hensigtsmæssig, fordi det sammensatte lotteri ifølge sandsynlighedsregningens regneregler jo også kan skrives som

$$L = \left[ \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_{1j} \right] K_1 + \dots + \left[ \sum_{j=1}^m \gamma_j \alpha_{nj} \right] K_n \quad (5)$$

der netop fremkommer ved formel regning med skrivemåden

$$L = \sum_{j=1}^m \gamma_j \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_{ij} K_i \right] \quad (6)$$

Som nævnt i det forrige afsnit er det bekvemt at identificere en vilkårlig konsekvens  $K \in \mathcal{K}$  med det lotteri, som sikkert (dvs med sandsynlighed 1) giver konsekvensen  $K$ . Dermed har vi, at  $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$

Det første skridt i beslutningsprocessen er, at beslutningstageren definerer en præferenceordning " $<$ " i  $\mathcal{K}$ , således at følgende egenskaber accepteres af beslutningstageren. Lad  $A, B, C \in \mathcal{K}$ . Hvis  $B$  foretrækkes for  $A$  og  $C$  foretrækkes for  $B$ , da foretrækkes  $C$  for  $A$  (ordningen er *transitiv*:  $A < B \wedge B < C \Rightarrow A < C$ ). Hvis  $B$  foretrækkes for  $A$  og  $A$  foretrækkes for  $B$ , da er der indifferens med hensyn til  $A$  og  $B$ , og vi siger, at  $A$  og  $B$  er *ækvivalente* og skriver  $A \sim B$  (ordningen er *refleksiv*:  $A < B \wedge B < A \Rightarrow A \sim B$ ).

En præferenceordning af  $\mathcal{K}$  alene er naturligvis ikke særlig nyttig, da valget i praksis står mellem lotterier i  $\mathcal{L}$ , der sædvanligvis ikke tilhører  $\mathcal{K}$ . Beslutningstageren søger altså en *udvidelse* af præferenceordningen fra  $\mathcal{K}$  til  $\mathcal{L}$ . Her er det at vanskelighederne for alvor begynder at melde sig for beslutningstageren, fordi han eller hun ikke kan gøre et valg uden at blive konfronteret med både for og imod. Von Neumanns og Morgensterns ide er at afhjælpe problemet ved at opstille nogle simple aksiomer for rationel beslutningstagen på en sådan måde, at disse aksiomer med matematisk nødvendighed fører til en entydig udvidelse af præferenceordningen fra  $\mathcal{K}$  til  $\mathcal{L}$ , og altså fritager beslutningstageren fra denne vanskelige stillingtagen mod til gengæld at acceptere de i aksiomerne nedfældede udsagn.

Det viser sig dog, at beslutningstageren ikke kan nøjes med at vælge præferenceordningen i  $\mathcal{K}$ . Han eller hun må også tage stilling til en relativ vægtning af konsekvenserne i  $\mathcal{K}$ . Det er ikke nok at vælge, at  $A < B$ . Der skal også tages stilling til hvor meget  $B$  foretrækkes for  $A$ . Vi tvinges altså til at indordne alle konsekvenserne på en talskala ved hjælp af en passende funktion  $u: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ , der ikke blot bevarer præferenceordningen ved at tilfredsstille betingelsen

$$A < B \Leftrightarrow u(A) \leq u(B) \quad (7)$$

men hvor værdierne måler de relative nytter for beslutningstageren af de forskellige konsekvenser. Funktionen  $u: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  kaldes derfor beslutningstagerens *nyttefunktion*. Nytteværdiskalaens nulpunkt og enhed har derimod ingen betydning for beslutningsprocessen. Problemet om udvidelsen af præferenceordningen fra  $\mathcal{K}$  til  $\mathcal{L}$  kan herefter alternativt formuleres som et problem om udvidelse af nyttefunktionen fra  $\mathcal{K}$  til  $\mathcal{L}$ .

Den relative vægtning af konsekvenserne i  $\mathcal{K}$ , der fastlægges ved beslutningstagerens valg af nyttefunktionen, får en præciseret tolkning gennem det første af von Neumanns og Morgensterns fem aksiomer. Denne tolkning kan være en mental hjælp for beslutningstageren ved dennes valg af nyttefunktionen på  $\mathcal{K}$ . Vi vender tilbage til denne tolkningsproblematik efter den følgende opstilling af de fem aksiomer, der udtaler sig om udvidelsen af præferenceordningen fra  $\mathcal{K}$  til  $\mathcal{L}$  under iagttagelse af nyttefunktionen  $u: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{L}$ .

1) For  $A < B < C \in \mathcal{K}$ , hvor A og C ikke er ækvivalente, gælder, at

$$B \sim (1-\alpha) A + \alpha C \quad (8)$$

hvor sandsynligheden  $\alpha$  er entydigt bestemt ved

$$u(B) = (1-\alpha) u(A) + \alpha u(C) \quad (9)$$

Lotteriet  $(1-\alpha) A + \alpha C$  mellem konsekvenserne A og C på hver side af B er altså ækvivalent med B, hvis og kun hvis den forventede nytte af lotteriet er lig med nytten af B.

2) Præferenceordningen " $<$ " af mængden af alle lotterier  $\mathcal{L}$  mellem konsekvenser fra  $\mathcal{K}$  er transitiv, og den er en udvidelse af præferenceordningen " $<$ " af  $\mathcal{K}$ .

3) For vilkårlige  $A, B \in \mathcal{L}$ , hvor A og B ikke er ækvivalente, og for vilkårlige  $\alpha, \beta \in [0,1]$ , gælder at

$$(1-\alpha) A + \alpha B \sim (1-\beta) A + \beta B \Rightarrow \alpha = \beta \quad (10)$$

4) For vilkårlige  $A, B, C \in \mathcal{L}$  og et vilkårligt  $\alpha \in [0,1]$  gælder at

$$A \sim B \Rightarrow (1-\alpha) A + \alpha C \sim (1-\alpha) B + \alpha C \quad (11)$$

5) For vilkårlige  $A < B \in \mathcal{L}$  gælder for ethvert  $\alpha \in [0,1]$  at

$$A < (1-\alpha) A + \alpha B < B \quad (12)$$

Axiomerne 3 til 5 synes at være problemfrit acceptable, hvis axiom 2 accepteres. Antagelsen om transitivitet kan i visse beslutningssituationer være problematisk. Manglende transitivitet kan naturligvis betyde, at en optimal beslutning ikke kan træffes. Problemer af denne art kan specielt opstå, når beslutningstageren er en forsamling med demokratiske afstemningsregler, og hvor medlemmerne har indbyrdes modstridende præferencer.

Vi vil diskutere axiom 1 lidt nøjere. Gennem axiom 1 defineres sandsynlighederne  $1 - \alpha$  og  $\alpha$  i et med B ækvivalent lotteri mellem A og C ved nytteværdien af B vurderet relativt til nytteværdierne af A og C, idet løsning af (9) med hensyn til  $\alpha$  giver

$$\alpha = \frac{u(B) - u(A)}{u(C) - u(A)} \quad (13)$$

I stedet for at vælge nytten af B kan beslutningstageren altså vælge  $\alpha \in [0,1]$ , således at han eller hun er indifferent med hensyn til konsekvensen B og lotteriet  $(1-\alpha) A + \alpha C$  mellem A og C. Det forekommer rimeligt, at en rationel beslutningstager, der ordner konsekvenserne A, B og C således, at  $A < B < C$ , og som ikke er indifferent med hensyn til A og C, må acceptere, at der kan vælges en entydig værdi af  $\alpha \in [0,1]$ , således at han eller hun må godkende ækvivalensen (8). Med beslutningstagerens valg af  $\alpha$  defineres derefter nytten  $u(B)$  ved ligningen (9). Axiomets væsentlige indhold er således påstanden om eksistensen af det til B ækvivalente lotteri mellem A og C og ikke den arbitrære definition af nytten af B som det ækvivalente lotteris forventede nytte. Denne definition er, som vi skal se, blot en af regnemæssige årsager hensigtsmæssig betingelse, der pålægges klassen af nyttefunktioner.

Vi vil nu vise, at den fuldstændige ordning af  $\mathcal{K}$  ved aksiomerne 1 til 5 udvides til en fuldstændig ordning af  $\mathcal{L}$ . Vi skal med andre ord vise, at hvis  $A, B \in \mathcal{L}$ , da er  $A < B$  eller  $B < A$ .

Først bemærkes, at der til ethvert lotteri

$$L = \alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_n K_n \quad (14)$$

mellem endelig mange konsekvenser  $K_1 < K_2 < \dots < K_n$  findes et ækvivalent lotteri

$$L' = \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right] K_1 + \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right] K_n \quad (15)$$

mellem den mindst foretrukne konsekvens  $K_1$  og den mest foretrukne konsekvens  $K_n$ . For at indse dette benyttes axiom 1 til at erstatte  $K_2$  med et ækvivalent lotteri  $(1-\beta_2) K_1 + \beta_2 K_n$  mellem  $K_1$  og  $K_n$ , hvilket ifølge axiom 4 blot medfører, at  $L$  erstattes med et ækvivalent lotteri. Derefter fortsættes på samme måde med at udskifte  $K_3$  med det ækvivalente lotteri  $(1-\beta_3) K_1 + \beta_3 K_n$  og så fremdeles. Sluttelig fremkommer det til  $L$  ækvivalente lotteri  $L'$  i (15), idet  $\beta_1 = 0$  og  $\beta_n = 1$ .

Da  $A$  og  $B$  begge kan skrives som lotterier mellem samtlige konsekvenser  $K_1 < K_2 < \dots < K_n$ , der indgår i både  $A$  og  $B$  (hvis en konsekvens ikke indgår i det ene lotteri, er den tilsvarende sandsynlighed jo blot nul), finder vi ved ovenstående reduktion, at der findes tal  $\gamma, \delta \in [0,1]$  således at

$$A \sim A' = (1-\gamma) K_1 + \gamma K_n \quad (16)$$

$$B \sim B' = (1-\delta) K_1 + \delta K_n \quad (17)$$

Antag, at  $\gamma \leq \delta$ . Da har vi

$$A' = (1-\alpha) K_1 + \alpha B' \quad (18)$$

for  $\alpha = \gamma/\delta$ . Anvendes axiom 5 på (17) haves  $K_1 < B'$  og anvendes samme

axiom derefter på (18) fås

$$A \sim A' < B' \sim B \quad (19)$$

hvilket med brug af axiom 2 afslutter beviset. Hvis specielt  $\gamma = \delta$ , giver axiom 3, at  $A \sim B$ .

Nyttefunktionen udvides fra  $\mathcal{K}$  til  $\mathcal{L}$  på naturlig måde ved at lade nytten af ethvert lotteri mellem to konsekvenser  $A$  og  $B$  være bestemt ved højre side af (9). Da nyttefunktionen naturligvis stadig må være ordensbevarende gælder da, at lotteriet  $L$  givet ved (14) med det ækvivalente lotteri  $L'$  givet ved (15) har nytteværdien

$$u(L) = u(L') = \left[ 1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right] u(K_1) + \left[ \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right] u(K_n) \quad (20)$$

Specielt gælder, at  $u(K_i) = (1-\beta_i) u(K_1) + \beta_i u(K_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , hvilket ved indsætning i

$$E[u(K_1) 1_{K_1} + \dots + u(K_n) 1_{K_n} | 1_L = 1] = \alpha_1 u(K_1) + \dots + \alpha_n u(K_n) \quad (21)$$

fører til højre side af (20). Vi har dermed resultatet

$$u(L) = E[u(K_1) 1_{K_1} + \dots + u(K_n) 1_{K_n} | 1_L = 1] \quad (22)$$

hvor betingelsen  $1_L = 1$  viser, at det er lotteriet  $L$  der realiseres, altså at  $E[1_{K_i}] = \alpha_i$  for  $i = 1, \dots, n$ , hvor  $L = \alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_n K_n$ . Nyttens af lotteriet  $L$  er altså identisk med den forventede nytte ved realisering af lotteriet. Det overlades til læseren at vise, at (7) er tilfredsstillende af den således definerede udvidelse af  $u: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Den beslutningsregel, der følger af von Neumanns og Morgensterns aksiomer kan herefter formuleres således:

*Vælg den handling, der blandt de realiserbare lotterier realiserer det lotteri, der har den største forventede nytte.*

Ved de realiserbare lotterier forstås de lotterier, der i den givne praktiske situation kan bringes til udførelse ved en handling. Mængden  $\mathcal{L}$  af lotterier mellem endelig mange konsekvenser fra  $\mathcal{K}$  kan naturligvis tænkes at indeholde lotterier, der ikke svarer til en mulig handling. Dette gælder for eksempel, når der blandt de mulige handlinger ikke findes en handling, der med sikkerhed kan forudses at føre til en bestemt konsekvens. Lotterierne i  $\mathcal{K} \subset \mathcal{L}$  kan da ikke realiseres ved nogen mulig handling.

Da der kan være uendelig mange mulige handlinger, er det matematisk set ikke givet, at der findes en bedste handling (nyttefunktionens værdimængde  $u(\mathcal{L})$  behøver ikke at være opadtil begrænset). En sådan udartet situation vil imidlertid næppe opstå i praktiske beslutningsproblemer, såfremt alle væsentlige konsekvenser for og imod opfyldelsen af et ønsket formål med en handling er taget i betragtning og vurderet med hensyn til nytte.

Det skal endnu en gang fremhæves, at det følger af nyttefunktionens *definition*, at det er forventningsværdien af nytten, der er skalær indikator for præferenceordningen. Enhver diskussion om at bruge andre karakteristiske parametre i nytteværdiens sandsynlighedsfordeling som ordningsskalarer (såsom fraktilværdier i den nedre hale) er derfor meningsløs. Nyttelværdierne følger automatisk af aksiomerne 2 til 5 på grundlag af beslutningstagerens ordning af  $\mathcal{K}$  ved brug af ækvivalente lotterier som angivet i aksiom 1. I praksis er det sædvanligvis nytteværdierne hørende til konsekvenserne, der angives af beslutningstageren. Han eller hun må derefter per definition acceptere sandsynlighederne i alle de ækvivalente lotterier mellem to konsekvenser, der følger ved brug af (13). En efterfølgende justering af disse sandsynligheder kan da omvendt føre til en justering af nytteværdierne ved brug af (9).

Den i praksis hyppigst forekommende beslutningssituation er den, hvor konsekvensernes omfang hævdes at kunne måles på en monetær skala som gevinster eller tab. Lad os antage, at der til enhver konsekvens  $K \in \mathcal{K}$  er knyttet en monetær gevinst  $g(K)$  (negativ for tab) som den eneste effekt af konsekvensen  $K$ . Beslutningstageren vil da naturligvis ordne  $\mathcal{K}$  ved hjælp af gevinstfunktionen  $g$ . Det er imidlertid ikke nødvendigvis givet, at beslutningstageren vil identificere nyttefunktionen  $u(K)$  med  $g(K)$ . Hvis vi definerer  $u(K) \equiv g(K)$ , bliver den forventede nytte lig med den forventede gevinst, og beslutningsreglen maksimerer altså den forventede gevinst. Hvis det ved handlingen udvalgte lotteri realiseres mange gange ved indbyrdes uafhængige

gentagelser af lotteriet, vil den gennemsnitlige gevinst per lotteri med sandsynlighed 1 nærme sig til den forventede gevinst. I en sådan situation er den antagne beslutningsregel altså åbenbart rationel. Enhver anden regel vil i det lange løb give mindre gevinst.

På den anden side kan beslutningstageren være i den situation, at han eller hun kun en eller nogle få gange i sit liv skal foretage en handling, der realiserer et for ham eller hende betydningsfuldt lotteri. Beslutningstageren kan da have tendens til at foretrække det sikre for det usikre (spillernaturer måske det modsatte). Det betyder, at  $\alpha$  i (9) bør være større end den værdi, der fås, når  $u(K) \equiv g(K)$  benyttes som nyttefunktion.

Det hævdes ofte, at mange konsekvenser af ingeniørmæssigt virke er af en sådan natur, at de ikke lader sig måle på en numerisk skala. Det drejer sig om konsekvenser, der vedrører æstetiske kvaliteter, eller konsekvenser, som rejser etiske problemer for eksempel om værdi af menneskeliv eller vurdering af naturkvaliteter og betydning af økologiske mekanismer. Hvis velovervejede beslutninger skal være mulige, må der imidlertid nødvendigvis implicit eller eksplicit indføres en transitiv præferenceordning i mængden af realiserbare lotterier, omend denne ordning ikke som i von Neumanns og Morgensterns beslutningsteori behøver at være fuldstændig (et realiserbart lotteri kan have præference frem for alle andre realiserbare lotterier, uden at disse behøver at stå i ordningsrelation til hinanden). Accepteres von Neumanns og Morgensterns beslutningsaxiomatik, da accepteres også eksistensen af en skalær nyttefunktion, hvis værdier man kan forestille sig afbildet på en monetær skala. En sådan skalas enheder betegnes ofte som socioøkonomiske enheder. Ved lotteriækvivalenserne i aksiom 1 kan socioøkonomiske værdier gøres sammenlignelige med monetære værdier. Disse ækvivalensvurderinger kan naturligvis meget vel falde sådan ud, at den resulterende forventede socioøkonomiske værdi af et lotteri ikke vokser proportionalt med lotteriets forventede monetære værdi. Dette vil typisk være tilfældet for den ovenfor omtalte forsigtige beslutningstager. I et lotteri mellem små pengebeløb vil han eller hun nok ikke tøve med at bruge den monetære værdivurdering. Bliver pengebeløbene store, kan konsekvensen af tab i forhold til det sikre være langt mere alvorlig for beslutningstagerens fremtid end den fordel, han eller hun kan opnå ved gevinst i forhold til det sikre. I konsekvens heraf forskydes nytteværdien af det sikre til en højere værdi end den forventede gevinst.

### 12.3 Optimal sikkerhed

Vi vil tage udgangspunkt for diskussionen i dette afsnit i en forenklet model af en beslutningsteoretisk fastsættelse af en bærende konstruktions sikkerhed.

Lad  $c(p)$  være den forudsete kapitalinvestering i en konstruktion, der er under projektering, som funktion af den krævede svigtsandsynlighed  $p$ . Denne funktion kan antages at være aftagende. Antag desuden, at tabet af konstruktionen ved et svigt medfører en nyinvestering lig med  $c(p) + d$ , hvor  $d$  er den direkte omkostning knyttet til svigthændelsen (erstatninger for tab, oprydning, etc) målt i monetære enheder. For hver værdi af  $p$  har vi altså et lotteri mellem to konsekvenser, nemlig en konsekvens med nytten  $-c(p)$ , svarende til at der ikke er svigt, og en konsekvens med nytten  $-2c(p) - d$ , svarende til at der er svigt. Disse to konsekvenser refererer til en bestemt tidsperiode. For på dette sted ikke at komplicere diskussionen med kapitaliseringsovervejelser (renteovervejelser), der indebærer hensyntagen til tidspunktet for indtræden af et svigt, vil vi lade referenceperioden være kort, fx 1 år. Den totale omkostning (nyttens modsat fortegn) er da

$$c(p) + [c(p)+d] \mathbf{1}_{\text{svigt}} \quad (1)$$

som har forventningsværdien

$$c(p) + [c(p)+d] p \quad (2)$$

Blandt disse uendeligt mange lotterier mellem to konsekvenser skal vi ifølge von Neumanns og Morgensterns beslutningsregel vælge det lotteri, for hvilket den forventede totale omkostning bliver mindst. Ved differentiation af (2) fås betingelsen

$$c'(p)(1+p) + c(p) + d = 0 \quad (3)$$

til bestemmelse af den optimale svigtsandsynlighed. Da vi for bærende konstruktioner altid har så store værdier af  $d$ , at  $p \ll 1$ , kan ligningen (3) reduceres til

$$d \simeq -c(p) - c'(p) \quad (4)$$

hvoraf  $p$  kan beregnes som funktion af  $d$ .

**Eksempel 12.1** Kapitalinvesteringen inden for et relevant interval af små svigtsandsynligheder  $p$  kan i mange tilfælde approksimeres vel med en funktion af  $p$ , der er lineær i det generaliserede sikkerhedsindeks  $\beta$ :

$$c(p) = a(1 + b\beta) \equiv a[1 - b \Phi^{-1}(p)] \quad (5)$$

hvor  $a$ ,  $b$  er passende positive konstanter. Ligningen (4) bliver da

$$\frac{d}{a} \simeq b \left[ \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2}\beta^2} - \beta \right] - 1 \quad (6)$$

Højre side er afbildet for forskellige værdier af  $b$  i figur 12.1. For givet  $d$  og for værdier af  $\beta$ , der er relevante i bærende konstruktioners sikkerhed, finder vi heraf

$$\beta \simeq \sqrt{2 \log \left[ \frac{d+a}{ab\sqrt{2\pi}} \right]} \quad (7)$$

som det optimale generaliserede sikkerhedsindeks.

Faktoren til  $b$  i (6) er  $0.75 \cdot 10^4$  for  $\beta = 4$  og  $0.67 \cdot 10^6$  for  $\beta = 5$ . Antages, at  $b$  mindst er 0.15 (se eksempel 12.2) bliver  $d/a$  mindst af størrelsesorden  $10^3$  for  $\beta = 4$  og  $10^5$  for  $\beta = 5$ . For at få optimale sikkerheder af den størrelse, der kræves i de nugældende normer, må de direkte skadesomkostninger  $d$  altså være flere størrelsesordener gange større end  $a$  og dermed end investeringen  $c$ . For en optimal værdi af  $\beta$  på 4.5 vil en ændring af  $d/a$  med en faktor på 10 medføre en ændring af den optimale værdi af  $\beta$  af størrelsesorden 10%. □

Lad os tænke os, at ingeniørpraksis for sikkerhedsfastsættelsen ved kon-

struktionsprojektering udvikler sig i retning af bestemmelse af den optimale sikkerhed i henhold til de her behandlede beslutningsteoretiske principper. Der må da fra ingeniørprofessionens side formuleres regulerende normer for visse nytteværdiansættelser, der sikrer en for samfundet acceptabel og af samfundet godkendt præferenceordning af mængden af konsekvenser af byggeaktivitet.

Sådan normer for nytteværdifastsættelser bør ved brug af konsekvensberegningsskemaet kalibreres til i store træk at føre til det sikkerhedsniveau, som er krævet i de eksisterende normer. Som overslaget i eksempel 12.1 antyder, vil der herved blive bestemt meget store værdier for de direkte skadesomkostninger  $d$ . De vil ofte være størrelsesordenen større end de i praksis fra forsikringsselskaber udbetalte erstatninger. Disse store værdier af  $d$  er en konsekvens af ingeniørprofessionens naturlige aversion mod svigt, en aversion, der både er begrundet ved uvilje mod tab af prestige over for samfundet og ved en etik, der påbyder at udøve professionen således, at der ikke forvoldes skade på menneskers helbred og liv.

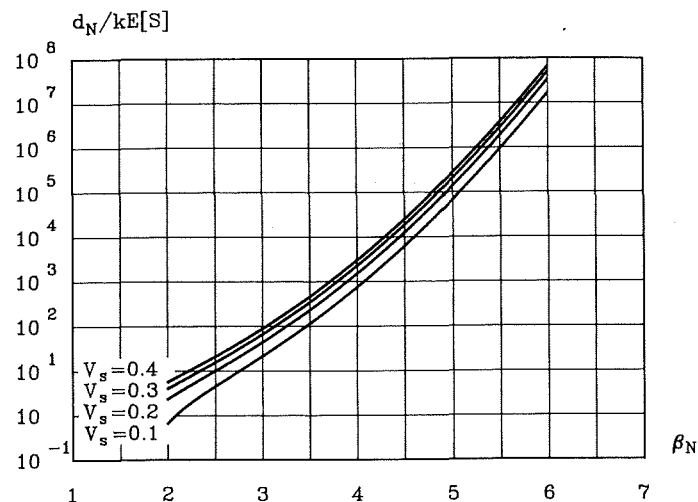
Hvis det postuleres, at sikkerhedsfastsættelse efter de nuværende normer for tiden er optimal (og det må professionen (myndighederne) naturligvis mene, thi i modsat fald burde den ændre normen), vil konsekvensberegninger vise, at  $d$  ikke varierer proportionalt med realistiske monetære erstatningsværdier. Skadesomkostningen  $d$  er altså en socioøkonomisk værdi.

Ud over at specificere kritiske nytteværdier i passende til monetære enheder oversættelige enheder, må en beslutningsteoretisk norm naturligvis ligesom en probabilistisk norm med specificerede sikkerhedsniveauer standardisere en række sandsynlighedsfordelingstyper for inputvariablene. Normstandardiseringsprincippets nødvendighed også for en beslutningsteori baseret norm illustreres ved det følgende eksempel.

**Eksempel 12.2** De to ingeniører omtalt i eksempel 7.2 antager, at kablets pris inklusive dets installation er  $kR$ , hvor  $k$  er en konstant.

Med brug af sikkerhedsindekset  $\beta_N$  hørende til (7.1.12) og  $V = V_S$  bliver kapitalinvesteringen da

$$c(p) = kE[S](1 + V\beta_N) \quad (8)$$



Figur 12.1. Den direkte svigtomkostning  $d_N$  som funktion af det optimale sikkerhedsindeks  $\beta_N$  svarende til normalfordelingsmodellen. Kurverne er givet ved (12.3.6) med  $a = kE[S]$  og  $b = V_S$ .

der har formen (5) med  $a = kE[S]$  og  $b = V$ . Formlen (6) giver altså relationen mellem den direkte svigtomkostning  $d = d_N$  og den optimale værdi af  $\beta = \beta_N$ . Relationen er vist i figur 12.1 for forskellige værdier af  $V$ .

For den logaritmiske normalfordelingsmodel ses ved indsætning af (7.1.12) i (7.1.14) at kapitalinvesteringen bliver

$$c(p) = \frac{kE[S]}{\sqrt{1+V^2}} e^{\beta_{LN} \sqrt{\log(1+V^2)}} \quad (9)$$

der kun kan bringes på formen (5) med tilstrækkelig nøjagtighed, når  $\beta_{LN} V$  er meget mindre end 1. Bruges (9) i (4) fås

$$\frac{d_{LN}}{kE[S]} \approx \frac{\exp[\beta_{LN} \sqrt{\log(1+V^2)}]}{\sqrt{1+V^2}} \left[ \frac{\sqrt{\log(1+V^2)}}{\varphi(\beta_{LN})} - 1 \right]$$

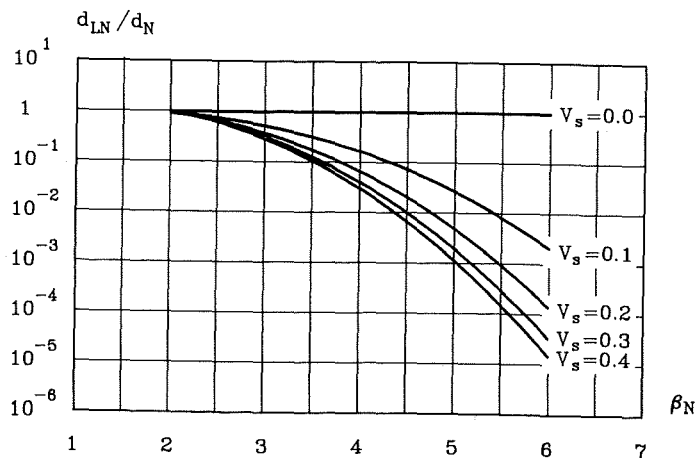
$$\approx (1 + \beta_N V) \frac{\sqrt{\log(1+V^2)}}{\varphi(\beta_{LN})} \quad (10)$$

hvor den sidste approksimation fremkommer dels ved at negligere 1 i den kantede parentes, og dels ved at indføre det til  $\beta_{LN}$  ækvivalente sikkerhedsindeks  $\beta_N$  bestemt ved (7.1.15). Ved brug af (6) med  $d = d_N$  finder vi altså forholdet

$$\frac{d_{LN}}{d_N} \approx \frac{1}{V} (1 + \beta_N V) \sqrt{\log(1+V^2)} \exp\left[\frac{1}{2}(\beta_{LN}^2 - \beta_N^2)\right] \quad (11)$$

hvor  $\beta_{LN}$  er givet ved (7.1.15) som det til  $\beta_N$  ækvivalente sikkerhedsindeks. Forholdet  $d_{LN}/d_N$  er vist i figur 12.2 som funktion af  $\beta_N$  for forskellige værdier af  $V_S$ .

Det ses, at for at få samme optimale modstandsevne af kablet må de to ingeniører anvende helt forskellige værdier ( $d_N$  og  $d_{LN}$ ) for den direkte svigtomkostning  $d$  (figur 12.2) såvel som helt forskellige sikkerhedsindeks-



Figur 12.2. Forholdet mellem de ækvivalente svigtomkostninger  $d_{LN}$  og  $d_N$  for henholdsvis den logaritmiske normale og den normale fordelingsmodel som funktion af det optimale sikkerhedsindeks  $\beta_N$  hørende til den normale fordelingsmodel.

værdier ( $\beta_N$  og  $\beta_{LN}$ ) (figur 7.1). Af figur 12.1 ses på den anden side, som bemærket i eksempel 12.1, at den optimale værdi af  $\beta_N$  kun er lidt følsom over for valget af  $d_N$ . □

Det skal i dette afsnit sluttelig bemærkes, at den nuværende danske partialkoefficientnorm specificerer nogle få forskellige sikkerhedsniveauer i afhængighed af konsekvenserne af svigt. Ved en opdeling af bærende konstruktioner i tre sikkerhedsklasser tages et vist, omend særdeles groft, hensyn til beslutningsteoriens principper.

#### 12.4 Usikker gevinstfunktion og usikker nyttefunktion \*

Byggeaktiviteter medfører direkte monetære omkostninger, der på beslutningstidspunktet i projektfasen ikke kendes med sikkerhed. Omkostningerne ansættes normalt på grundlag af aktuelle prisniveauer og måske ved brug af prognosemodeller for den fremtidige økonomiske situation for projektet. Sådanne betragtninger kan for hvert alternativt projekt føre til opstilling af en sandsynlighedsfordeling for den aktuelle monetære omkostning knyttet til projektet.

Realieringen af projektet kan altså betragtes som en udførelse af et sammensat lotteri, hvor en af lotterikomponenterne er udtrækningen af de direkte monetære omkostninger. Uden ændring af nytteværdien for det sammensatte lotteri kan denne komponent ifølge axiom 4 imidlertid udskiftes med en ækvivalent komponent og derfor også med det specielle ækvivalente lotteri, der består af kun een konsekvens, nemlig den forventede værdi af den direkte monetære omkostning. Heraf fremgår, at det for beslutningsproblematikken kun kræves, at forventningsværdien af den direkte omkostning fastlægges. Observerede gennemsnitsomkostninger over adskillige lignende projekter sammen med relevante prognosebetragtninger er derfor tilstrækkelige indikatorer for valget af de monetære omkostninger, der skal bruges som input til beslutningsmodellen. Hvad der her er sagt om omkostninger gælder naturligvis også om driftsgevinster.

Tilsvarende betragtninger holder også, hvis beslutningstageren er usikker om egne præferencer med hensyn til konsekvenser, der ikke er direkte målelige på en monetær skala. Dette giver sig for beslutningstageren udtryk i



usikkerhed om valget af nytteværdien  $u(K)$  for en sådan konsekvens  $K \in \mathcal{K}$ .

Beslutningstagerens usikkerhed udtrykkes da naturligt ved, at han eller hun vælger en sandsynlighedsfordeling af nytteværdier i stedet for en enkelt nytteværdi. Herefter kan anvendes en ækvivalensbetragtning nøjagtig som ovenfor. Denne betragtning medfører, at det er tilstrækkeligt at bruge forventningsværdien i beslutningstagerens nytteværdifordeling som entydig nytteværdi for  $K$  i beslutningsmodellen.

### 12.5 Indflydelse af statistisk usikkerhed og modelusikkerhed \*

I de lotterier  $L = \alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_n K_n$ , der er relevante i ingeniørmæssige beslutningsovervejelser, er lotterisandsynlighederne  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sædvanligvis bestemt ved beregning på grundlag af idealiserede modeller, der anticipatorisk (dvs forestillingsmæssigt forudsigende) kombinerer geometriske egenskaber og fysiske love og antagelser. Som vi har diskuteret i kapitel 3, følger der modelusikkerhed hermed. Hertil kommer den statistiske usikkerhed, der evalueres ved modellernes kalibrering til resultater af eksperimentelle undersøgelser af begrænset omfang, kapitel 11. Yderligere gælder, at den tilgængelige viden om værdierne af de parametre, der fastlægger inputvariablenes sandsynlighedsfordelinger, kan være mere eller mindre usikker.

Den samlede usikkerhed repræsenteret formelt ved en passende sandsynlighedsfordeling har naturligvis den effekt, at lotterisandsynlighederne  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  bliver usikkert bestemt, idet der ved den omtalte beregning kun kan bestemmes en sandsynlighedsfordeling af den til  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  svarende bayeske stokastiske vektor  $(A_1, \dots, A_n)$ .

Heraf følger, at lotteriet  $\alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_n K_n$  ikke er realiserbart (det kan ikke udføres med sikkerhed). Lotteriet får derimod rolle som en konsekvens i et realiserbart lotteri  $L$  mellem alle lotterier i mængden af lotterier mellem  $K_1, \dots, K_n$ . Lotterisandsynlighederne i dette lotteri  $L$  mellem lotterier er bestemt ved fordelingen af  $(A_1, \dots, A_n)$ , og vi har åbenbart

$$L = \int_{[0,1]^n} (\alpha_1 K_1 + \dots + \alpha_n K_n) f_{A_1, \dots, A_n}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = E[A_1] K_1 + \dots + E[A_n] K_n \quad (1)$$

Vi kan altså heraf slutte, at fordelingen af  $(A_1, \dots, A_n)$  på nær forventningsværdierne er uden relevans for beslutningstageren.

Hvis vi vender tilbage til lotteriet i afsnit 12.3, ser det tilsyneladende ud, som om konsekvenserne i dette lotteri er funktioner af lotterisandsynlighederne. En sådan afhængighed ville naturligvis ikke føre til det simple resultat (1). For problemstillingen i dette afsnit er den korrekte formulering af (12.3.2) imidlertid

$$c(E[P]) + [c(E[P])+d] P \quad (2)$$

hvor  $P$  er den bayeske stokastiske variable, der svarer til den ukendte parameter  $p$ . Investeringen  $c$ , der realiseres ved en handling, kan jo kun variere med hensyn til de realiserbare lotterier, fordi kun et realiserbart lotteri udvælges ved handlingen.

Det vil være fejlagtigt at konkludere fra resultatet (1), at graden af usikkerhed om fx inputvariablenes fordelingsparametre ikke har nogen som helst indflydelse. Da  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  i almindelighed er ikke-lineære funktioner af fordelingsparametrene, bliver middelværdierne  $E[A_1], \dots, E[A_n]$  ikke alene afhængige af middelværdierne af fordelingsparametrene. Dette er illustreret i det følgende eksempel.

**Eksempel 12.3** Antag, at et bygvæk bæres af to søjler, og at disse søjlers svigthændelser for givne fordelingsparametre er indbyrdes uafhængige og har samme sandsynlighed  $p$ . Lad  $1_I$  og  $1_{II}$  være indikatorvariablene for svigt i henholdsvis første og anden søjle. Vi har da et lotteri mellem konsekvenserne af tre mulige hændelser med sandsynlighederne

$$P(\text{intet svigt}) = E[(1-1_I)(1-1_{II})] = (1-p)^2 \quad (3)$$

$$P(\text{svigt af kun een søjle}) = E[1_I(1-1_{II}) + (1-1_I)1_{II}] = 2p(1-p) \quad (4)$$

$$P(\text{svigt af begge søjler}) = E[1_I 1_{II}] = p^2 \quad (5)$$

Ifølge (1) bliver det relevante lotteri af formen

$$E[(1-P)^2] K_1 + E[2P(1-P)] K_2 + E[P^2] K_3 \quad (6)$$

hvor  $P$  er den bayeske stokastiske variable, der svarer til  $p$ .

Lad det direkte tab ved svigt være  $d$  og antag, at tabet er det samme, hvad enten en enkelt søjle svigter, eller begge søjler svigter. Det forventede svigttab bliver da lig med

$$E[2P(1-P)+P^2] d = (2E[P]-E[P^2]) d \quad (7)$$

der ses for fast  $E[P]$  at aftage med voksende varians  $\text{Var}[P] = E[P^2] - E[P]^2$ . Dette betyder ikke, at det af denne årsag ikke kan betale sig at indsamle mere information med det formål at formindske usikkerheden i bestemmelsen af sandsynligheden  $p$ . Hensyntagen til ny information vil jo både ændre  $E[P]$  og  $\text{Var}[P]$ , og, hvis  $p$  er lille, som regel i gunstig retning.  $\square$

### 12.6 Fejltagelsers indflydelse \*

Lad os se lidt mere kritisk på de antagelser, hvorpå (12.3.1) bygger. Vi har defineret indikatorvariablen  $1_{\text{svigt}}$  inden for rammerne af en probabilistisk model, der omfatter de iboende uundgåelige tilfældige fluktuationer af de relevante inputvariable samt usikkerhederne af disse inputvariables fordelingsparametre. Inkluderet er også modelusikkerhed, både hvad angår fordelingstyper og grænsetilstand. Denne probabilistiske model reflekterer imidlertid ikke muligheden for forekomst af egentlige fejltagelser ved projektering, udførelse eller brug (menneskelige fejl eller "acts of God" (dvs naturkatastrofer, krigshændelser eller lignende)). Sådanne hændelser klassificeres sædvanligvis ikke som altid tilstedeværende kilder til usikkerhed knyttet til det givne konstruktionsprojekt. De er sjældne tilfælde (forhåbentligvis) af radikale uoverensstemmelser mellem den realiserede konstruktive udformning eller konstruktionsdimensionerne og den teoretiske analysemodel, der er brugt i sikkerhedsanalysen.

For at tage hensyn til forekomst af fejltagelser må vi udvide den probabilistiske model og tillægge  $1_{\text{svigt}}$  forventningsværdien

$$E[1_{\text{svigt}}] = P(\text{svigt og ingen fejltagelser}) + P(\text{svigt og fejltagelser}) \quad (1)$$

Første led på højre side af (1) kan skrives som produktet af den betingede sandsynlighed

$$P_{\text{teor}} = P(\text{svigt} | \text{ingen fejltagelser}) \quad (2)$$

(den "teoretiske" svigtsandsynlighed) og sandsynligheden

$$1 - p_{\text{fejl}} = P(\text{ingen fejltagelser}) \quad (3)$$

Det andet led på højre side af (1) kan skrives som summen

$$P(\text{svigt og fejltagelser}) = \sum_i P(\text{svigt} | \text{fejltagelse nr } i) p_{\text{fejl } i} \quad (4)$$

hvor  $p_{\text{fejl } i}$  er sandsynligheden for forekomst af fejltagelse nr  $i$ . Det er her forudsat, at mængden af forskellige mulige fejltagelser er tællelig. Flere sammen forekommende fejltagelser betragtes som en kombineret fejltagelse (en fællesmængde af fejltagelseshændelser). Derved bliver de nummererede fejltagelseshændelser indbyrdes disjunkte, og vi har, at

$$p_{\text{fejl}} = \sum_i p_{\text{fejl } i} \quad (5)$$

er sandsynligheden for forekomst af fejltagelser. Den betingede sandsynlighed

$$h_i(p_{\text{teor}}) = P(\text{svigt} | \text{fejltagelse nr } i) \quad (6)$$

beregnes ved brug af en modifikation af den probabilistiske model svarende til den ændrede konstruktion, der fremkommer som følge af forekomsten af fejltagelse nr  $i$ . Dimensionerne af den ændrede konstruktion, og dermed  $P(\text{svigt} | \text{fejltagelse nr } i)$ , er naturligvis funktioner af den tilstræbte teoretiske svigtsandsynlighed  $p_{\text{teor}}$ . Alt i alt kan svigtsandsynligheden (1) altså skrives

$$E[1_{\text{svigt}}] = p_{\text{teor}}(1-p_{\text{fejl}}) + \sum_i h_i(p_{\text{teor}}) p_{\text{fejl } i} \quad (7)$$

Med dette resultat modificeres den forventede omkostning (12.3.2) til

$$c(p) + [c(p)+d] [p(1-p_{\text{fejl}}) + \sum_i h_i(p) p_{\text{fejl } i}] \quad (8)$$

hvor  $p = p_{\text{teor}}$ . I dette udtryk burde kapitalinvesteringen  $c(p)$  ret beset defineres mere nuanceret i afhængighed af om konstruktionen realiseres uden fejltagelser eller under forekomst af den ene eller den anden fejltagelse. Da  $p_{\text{fejl}} \ll 1$ ,  $c(p) \ll d$ , og kapitalinvesteringen for den fejlbehæftede konstruktion og den fejlfri konstruktion er næsten ens, er betydningen heraf underordnet.

Det kan sædvanligvis antages, at  $p_{\text{fejl}}$  er uafhængig af eller kun lidt afhængig af  $p_{\text{teor}}$ . Essentielt haves kun variation af  $p_{\text{fejl}}$  over mængden af alternative udformninger af konstruktionen, idet dimensionsvariationer for en given udformning må forventes kun at have beskeden indflydelse på de potentielle muligheder for, at der kan opstå fejltagelser. For en given udformning af konstruktionen har det derfor mening at søge minimum for den forventede omkostning (8) under fastholdte værdier af  $p_{\text{fejl } 1}$ ,  $p_{\text{fejl } 2}$ , .... Ved differentiation af (8) med hensyn til  $p$  fås betingelsen

$$c'(p)[1+p(1-p_{\text{fejl}}) + \sum_i h_i(p) p_{\text{fejl } i}] + [c(p)+d][1-p_{\text{fejl}} + \sum_i h_i'(p) p_{\text{fejl } i}] = 0 \quad (9)$$

Forudsættes, at  $p \ll 1$  og  $p_{\text{fejl}} \ll 1$  reduceres denne betingelse under brug af (5) til

$$c'(p) + [c(p)+d]\{1 + \sum_i [1-h_i'(p)]p_{\text{fejl } i}\} = 0 \quad (10)$$

Uden yderligere modellering af de betragtede fejltagelsers konstruktionsmæssige konsekvenser er det vanskeligt at afgøre, om sumleddet i den sidste

parentes kan negligeres, og dermed om resultatet (12.3.4) kan anses for at repræsentere optimal dimensionering uafhængig af, om der kan forekomme fejltagelser eller ej.

Da  $c(p)$  aftager med  $p$ , gælder det samme for  $-c'(p)$ , og forudsættes, at  $c(p)$  kan negligeres i forhold til  $d$ , viser (10) umiddelbart, at løsningen  $p$  vokser, hvis sumleddet gøres mindre. Da vi rimeligvis kan forudsætte, at  $h_i'(p) > 0$ , er sumleddet opadtil begrænset af  $p_{\text{fejl}}$ , som er forudsat at være neglignabel sammenlignet med 1. Det følger heraf, at  $p$  bestemmes ved (12.3.4) i praksis er en nedre værdi for  $p$  bestemt ved løsning af (10).

Blandt de forskellige alternative udformninger er den optimale udformning den, for hvilken (8) bliver mindst efter indsætning af den for hver udformning optimale værdi af  $p$ .

Det skal sluttelig bemærkes, at der er undtagelser fra reglen om, at  $p_{\text{fejl}}$  er uafhængig af  $p_{\text{teor}}$ . Et eksempel er den projekteringsfejltagelse at glemme at undersøge en søjles sikkerhed mod stabilitetssvigt. Hvis  $p_{\text{teor}}$  er meget lille, bliver søjlen måske så kraftig, at den opfattes som en pille, der næppe leder tanken hen på et stabilitetssvigt. Sandsynligheden  $p_{\text{fejl}}$  for at glemme stabilitetsproblemet er formentlig stor i denne situation. Hvis  $p_{\text{teor}}$  er passende stor, bliver søjlen så slank, at behovet for stabilitetsanalyse er åbenbart. Stabilitetsanalysen glemmes derfor mindre let. Det må derfor forventes, at  $p_{\text{fejl}}$  er en aftagende funktion af  $p_{\text{teor}}$ .

## Referencer

- 12.1 Von Neumann and Morgenstern: *Theory of Games and Economical Behavior*. Princeton University Press, 1943.

## 13. EKSISTERENDE KONSTRUKTIONERS SIKKERHED

### 13.1 Informationstyper for en eksisterende konstruktion

Dette kapitel omhandler den filosofi og de løsningsmetoder, der er relevante for vurdering af en eksisterende konstruktions sikkerhed. Fremstillingen koncentrerer om opdatering af sikkerhedsanalysen, når ny information bliver tilgængelig.

Vurdering af en eksisterende konstruktion er aktuel når skader observeres, brugen af konstruktionen ønskes ændret, afvigelser fra byggeplaner observeres, levetiden ønskes forlænget ud over den planlagte, inspektionsplaner ønskes korrigeret, etc.

Sammenlignes med den information, der var tilgængelig ved projekteringen, kan ny information eksempelvis hidrøre fra modtagekontrol af beton, certifikater for stål og armering, måling af virkelig geometri, indsamling af lastdata, prøvebelastning, inspektion og skadesvurdering. Denne efter projekteringen registrerede information bruges sædvanligvis til at verificere, at konstruktionen i rimelig grad er som foreskrevet, dvs til at afsløre eventuelle fejltagelser ved udførelsen. Undertiden kan herved også afsløres fejltagelser vedrørende modelantagelser og beregninger. I relation til denne kontrol af beregningsforudsætningerne kan informationen bruges til en opdatering af sikkerhedsanalysen. I dette kapitel vil vi udelukkende beskæftige os med opdatering og de deraf følgende beslutninger vedrørende indgreb i den eksisterende konstruktion (alternative handlinger: nedrivning, lade være uforandret, reparation, forstærkning, indføre brugsrestriktioner).

Informationen kan deles i to hovedtyper:

1) *Stikprøveinformation*, der opdaterer vor viden om fordelings typer med tilhørende fordelingsparametre for den stokastiske inputvektor  $\mathbf{X}$  uden betingning på eventuelle observerede relationer mellem komponenterne i  $\mathbf{X}$ . Denne informationstype er blevet behandlet i kapitel 11: "statistisk usikkerhed og modelusikkerhed", og vil ikke blive betragtet yderligere.

2) *Relationsinformation*, der medfører, at der gælder en eller flere kendte relationer mellem elementerne i  $\mathbf{X}$ . Hvad der forstås herved uddybes ved følgende opdeling i to typer:

2.1) En eller flere af komponenterne i  $\mathbf{X}$  er realiseret således, at det ukendte udfald af  $\mathbf{X}$  vides at tilhøre en passende karakteriseret delmængde  $\Omega$  af  $\mathbb{R}^n$ . Denne mængde kan ofte bekvemt defineres ved en funktion  $h(\mathbf{x})$ , således at

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid h(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (1)$$

Funktionen  $h(\mathbf{x})$  udspringer sædvanligvis af en idealiseret model for konstruktionens opførsel. Der vil derfor være knyttet modelusikkerhed til definitionen af  $\Omega$  på samme måde, som der er knyttet modelusikkerhed til definitionen af en grænsetilstand. Modelusikkerheden kan indgå direkte i definitionen af  $h(\mathbf{x})$  ved brug af passende stokastiske parametre, hvis udfald fastlægger  $\Omega$ . Mængden  $\Omega$  bliver herved en stokastisk mængde. I mere forenklet form kan modelusikkerheden repræsenteres ved en stokastisk korrektion af  $\mathbf{X}$  helt på samme måde som ved repræsentationen af en idealiseret grænsetilstands modelusikkerhed beskrevet i afsnit 3.4. Mængden  $\Omega$  i (1) er da en bestemt før eller ved informationens registrering fastlagt mængde. Hvis der er betydende måleusikkerhed ved afgørelsen af, om hændelsen  $\mathbf{X} \in \Omega$  er realiseret, må denne måleusikkerhed ligeledes repræsenteres ved en stokastisk korrektion af  $\mathbf{X}$ .

I visse anvendelser kan  $\Omega$  også have iboende tilfældighed, hvorved  $\Omega$  i selve sin natur bliver en stokastisk mængde. Eksempler gives nedenfor.

2.2) En eller flere af komponenterne i  $\mathbf{X}$  er realiseret således, at det ukendte udfald af  $\mathbf{X}$  har givet en virkning, der på nær modelusikkerhed dels kan udregnes entydigt ved en teoretisk model  $\psi(\mathbf{x})$  for enhver realisation  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ , og dels kan måles entydigt på nær måleusikkerhed. Det antages, at både modelusikkerheden og måleusikkerheden er kendt fra tidligere undersøgelser eller eventuelt kan evalueres ved henholdsvis teoretiske og eksperimentelle vurderinger af modellen og

ved gentagne målinger af den betragtede virkning.

Den ved måling af virkningen indsamlede information siger da, at det ukendte udfald af  $\mathbf{X}$  tilfredsstiller relationen

$$\psi(\mathbf{X}) = Z \quad (2)$$

hvor  $Z$  er en stokastisk variabel, hvis fordeling er fastlagt ved målingen.

**Eksempel 13.1** Et konstruktionselement har bæreevnen  $R$  med hensyn til lastvirkningen  $S$ . Svigt indtræder, hvis og kun hvis  $R < S$ . Det antages ved projekteringen af elementet, at  $R$  og  $S$  er indbyrdes uafhængige logaritmisk normalfordelte stokastiske variable, hvor  $X_1 = \log R$  har parametre  $(\mu_1, \sigma_1)$  og  $X_2 = \log S$  har parametre  $(\mu_2, \sigma_2)$ . Sikkerhedsindekset bliver da

$$\beta = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \quad (3)$$

Antag, at konstruktionselementet underkastes en prøvebelastning op til værdien  $S = s$ , og at elementet ikke svigter ved denne belastning. Herved observeres altså, at den ukendte realisation af  $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$  tilhører mængden

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > \log s\} \quad (4)$$

Hvis  $s$  er fastlagt uden væsentlig usikkerhed, kan vi heraf slutte, at  $X_1$  har den betingede fordelingsfunktion

$$F_{X_1}(x \mid \mathbf{X} \in \Omega) = \Phi_\gamma \left[ \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right] \quad (5)$$

hvor

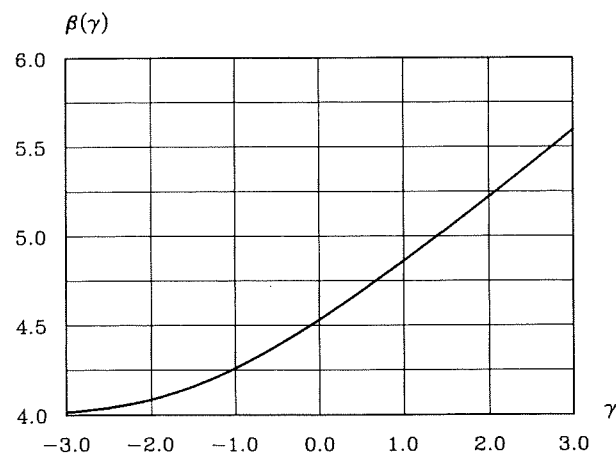
$$\gamma = \frac{\log s - \mu_1}{\sigma_1} \quad (6)$$

og  $\Phi_\gamma(\cdot)$  er den i punktet  $\gamma$  nedretrunkerede standardiserede normale tæthedsfunktion, se (10.3.8).

Den betingede svigtsandsynlighed bliver da

$$P(R < S \mid \mathbf{X} \in \Omega) = \frac{1}{\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\gamma \left[ \frac{x - \mu_1}{\sigma_1} \right] \varphi \left[ \frac{x - \mu_2}{\sigma_2} \right] dx \quad (7)$$

Med værdierne  $\sigma_1 = 0.2$  ( $\approx V_R$ ),  $\sigma_2 = 0.5$  ( $\approx V_S$ ),  $\mu_1 = 4\sqrt{0.29} = 2.154$ ,  $\mu_2 = 0$  får det ubetingede sikkerhedsindeks (3) værdien 4. Det betingede sikkerhedsindeks svarende til (7) er afbildet i figur 13.1. Det ses, at prøvebelastningen skal føres op til betydelige værdier i forhold til styrkefordelingen for at få en væsentlig forøgelse af sikkerhedsindekset over værdien 4. Eksempelvis fås kun en forøgelse på 5% (fra 4 til 4.2) for  $\gamma \approx -1.3$ . Denne fraktilværdi svarer til ca 10% sandsynlighed for svigt ved prøvebelastningen.  $\square$



Figur 13.1. Betinget sikkerhedsindeks  $\beta(\gamma)$  som funktion af prøvebelastningsniveau  $\gamma$  (= antal standardafvigelser større end middelværdien i normalfordelingen for logaritmen til modstandsevnen).

**Eksempel 13.2** Lad os antage, at konstruktionselementet i eksempel 13.1 ikke blot udsættes for en enkelt lastvirkning  $S$ , men derimod for en følge  $S_1, S_2, \dots, S_m, \dots$  af indbyrdes afhængige lastvirkninger, der er ensfordelte med logaritmisk normalfordeling. Ved projekteringen er det for simpelhedens skyld fejlagtigt blevet antaget, at elementet ville blive udsat for en og kun en sådan

lastvirkning. Elementet er realiseret i en konstruktion, for hvilken den samlede planlagte levetid er  $T$ . Lastvirkningerne  $S_1, S_2, \dots$  er af kort varighed, og de forekommer i et tidsinterval af given varighed  $\tau$  med et stokastisk antal  $N(\tau)$ , der har sandsynlighedsfordelingen

$$P[N(\tau)=n] = \frac{(c\tau)^n}{n!} e^{-c\tau} \quad (8)$$

Dette er en Poissonfordeling med parameter  $c\tau$ , hvor  $c$  er en konstant, der angiver middelværdien af antallet af lastvirkninger per tidsenhed.

Med betingelsen  $N(T) = n$  får den maksimale værdi af  $\log S_1, \dots, \log S_n$  fordelingsfunktionen  $\Phi\left[\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right]^n$ . Fordelingsfunktionen for

$$\log S \equiv \max\{\log S_1, \dots, \log S_{N(T)}\} \quad (9)$$

kan da ved brug af (8) udregnes til

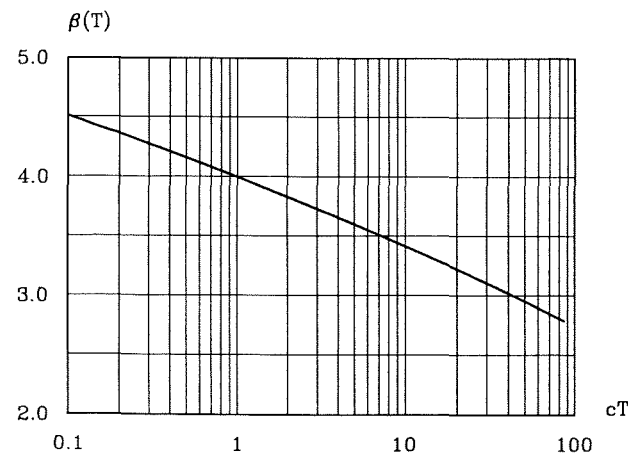
$$F_{\log S}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left[\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right]^n \frac{(cT)^n}{n!} e^{-cT} = \exp\left[-cT \Phi\left[-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right]\right] \quad (10)$$

For  $cT = 1$  og for store  $x$  er denne fordelingsfunktion approksimativt lig med  $\Phi\left[\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right]$ . Specielt for  $cT = 1$  bliver virkningen af den ved projekteringen brugte simplifikation derfor betydningsløs. Det korrekte sikkerhedsindeks er

$$\beta(T) = \Phi^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-cT \Phi\left[-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right]\right] \varphi\left[\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right] \frac{dx}{\sigma_1}\right] \quad (11)$$

og det er vist i figur 13.2 som funktion af  $cT$  for de i eksempel 13.1 betragtede parameterværdier.

Foranlediget af en reparationssag til tiden  $t$  efter konstruktionens ibrugtagning er det ved gennemgang af de gamle beregninger opdaget, at den



Figur 13.2. Sikkerhedsindeks for konstruktionselement med logaritmisk normalfordelt styrke som funktion af middeltallet  $cT$  af uafhængige ensfordelte logaritmisk normalfordelte lastvirkninger i tidsperioden  $T$ , hvor  $c$  er intensiteten for lastvirkningernes forekomst i tiden ved en Poissonproces.

gjorte lastforudsætning er på den usikre side, idet  $cT$  snarere end at være nær 1 er af størrelsesorden 100. Det skønnes derfor at være nødvendigt at vurdere dette konstruktionselements sikkerhed med hensyn til svigt i den tilbageværende funktionsperiode  $T - t$ . Hertil benyttes den information, der ligger i, at konstruktionselementet uden svigt har båret alle forekommende laster i et tidsinterval af længden  $t$ . Modstandsevnen  $R$  tilfredsstiller altså betingelsen

$$R > \max\{S_1, \dots, S_{N(t)}\} \quad (12)$$

Dette er et eksempel på relationsinformation af typen  $X \in \Omega$ , hvor  $\Omega$  er en stokastisk mængde. Den betingede svigtsandsynlighed bliver

$$P(R < \max\{S_{N(t)+1}, \dots, S_{N(T)}\} | R > \max\{S_1, \dots, S_{N(t)}\}) =$$

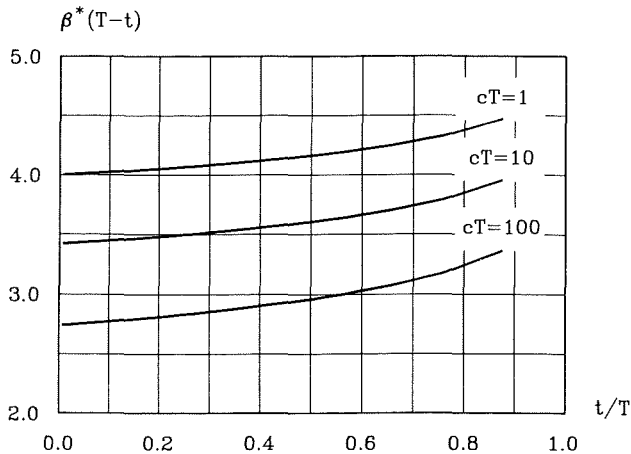
$$\frac{P(\max\{S_1, \dots, S_{N(t)}\} < R < \max\{S_{N(t)+1}, \dots, S_{N(T)}\})}{P(\max\{S_1, \dots, S_{N(t)}\} < R)}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ct\Phi\left[-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right]\right] \left\{1 - \exp\left[-c(T-t)\Phi\left[-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right]\right]\right\} \varphi\left[\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right] \frac{dx}{\sigma_1}}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-ct\Phi\left[-\frac{x-\mu_2}{\sigma_2}\right]\right] \varphi\left[\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right] \frac{dx}{\sigma_1}} = 1 - \frac{\Phi[\beta(T)]}{\Phi[\beta(t)]} \quad (13)$$

hvoraf fås det opdaterede sikkerhedsindeks

$$\beta^*(T-t) = \Phi^{-1}\left[\frac{\Phi[\beta(T)]}{\Phi[\beta(t)]}\right] \quad (14)$$

svarende til restlevetiden  $T - t$ . Figur 13.3 viser  $\beta^*(T-t)$  som funktion af  $t/T$  for  $cT = 1, 10, 100$ .



Figur 13.3. Opdatering af sikkerhedsindekset i figur 13.2 på grundlag af den ved (13.1.12) givne information.

Det ses, at opdateringsvirkningen er beskeden, med mindre  $t/T$  er stor. □

Det er mindre let at finde lignende simple eksempler på sikkerhedsopdatering ved brug af relationsinformation af typen  $\psi(X) = Z$  (typen 2.2) fremskaffet ved ikke-destruktive målemetoder anvendt på den eksisterende konstruktion.

Et realistisk, men ret kompliceret eksempel vil blive givet senere. Det er naturligvis lettere at give simple eksempler, når det drejer sig om opdatering af sandsynligheden for overskridelse af en anvendelsesgrænsetilstand. Et typisk eksempel er brug af målte deformationer for givne laster. Disse måleresultater kan sammenholdes med teoretiske modeller, hvori inputvariable for stivheder af konstruktionsdele og understøtninger indgår. Et andet typisk eksempel er måling af den mindste egenfrekvens for en mast. Den beregnede egenfrekvens afhænger af inputvariable, som beskriver fordeling af masser og stivheder.

### 13.2 Generel systemformulering af opdatering ved brug af relationsinformation \*

Det er for repræsentation af relationsinformation formålstjenligt at indføre begrebet hændelsesmargen som en udvidelse af begrebet sikkerhedsmargen. En hændelsesmargen er defineret ved den stokastiske variable

$$H = h(X, Z) \quad (1)$$

hvor  $h(x, z)$  er identisk med funktionen  $h(x)$  i (13.1.1), når relationsinformation af typen  $X \in \Omega(Z)$  betragtes. Med tilføjelsen af den stokastiske vektor  $Z$  er det antydnet, at  $\Omega$  kan være stokastisk, men iøvrigt fuldstændig fastlagt ved et udfald af  $Z$ .

Hvis relationsinformation af typen  $\psi(X) = Z$  betragtes, defineres funktionen  $h(x, z)$  ved

$$h(x, z) = \psi(x) - z \quad (2)$$

Relationsinformation udtrykkes altså ved, at det for typen 2.1 er givet, at  $H \leq 0$ , og for typen 2.2 at  $H = 0$ .

I den følgende fremstilling vil vi ændre betegnelse for  $(x, z)$  og  $(X, Z)$  til henholdsvis  $x$  og  $X$ . Funktionen i (2) vil blive betegnet ved  $h(x)$ .

For relationsinformation af første type har vi da den opdaterede svigtsandsynlighed

$$P(M \leq 0 | H \leq 0) = \frac{P(M \leq 0, H \leq 0)}{P(H \leq 0)} \quad (3)$$

hvor  $M$  er den relevante sikkerhedsmargen.

Hændelsen  $H \leq 0$  kan være en fælleshændelse mellem adskillige hændelser  $H_1 \leq 0, \dots, H_m \leq 0$ , hvor  $H_1, \dots, H_m$  er hændelsesmargener svarende til  $m$  forskellige informationsbidrag. Svighthændelsen  $M \leq 0$  kan være mere eller mindre kompliceret defineret som svighthændelser for et seriesystem af parallelsystemer eller som et parallelsystem af seriesystemer.

Tælleren i (3) ses at have form som sandsynligheden for svigt af et parallelsystem med de to svighthændelser  $M \leq 0$  og  $H \leq 0$ . Hvis sandsynligheden  $P(M \leq 0)$  er lille, kan både tælleren og nævneren sædvanligvis udregnes med tilstrækkelig nøjagtighed ved brug af (6.6.7) (enkelt punkt multipel FORM) eller en tilsvarende på SORM baseret formel.

For relationsinformation af anden type bliver den opdaterede svigtsandsynlighed defineret ved

$$P(M \leq 0 | H = 0) = \lim_{\theta \downarrow 0} P(M \leq 0 | -\theta < H \leq 0) =$$

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{P(M \leq 0, H \leq 0) - P(M \leq 0, H < -\theta)}{P(H \leq 0) - P(H < -\theta)} =$$

$$\left[ \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(M \leq 0, H + \theta \leq 0)}{\frac{\partial}{\partial \theta} P(H + \theta \leq 0)} \right]_{\theta=0} \quad (4)$$

**Bemærkning 13.1** Betingede sandsynligheder  $P(B|A)$ , hvor  $P(A) = 0$ , skal defineres med særlig omhu, fordi både tæller og nævner i forholdet  $P(A \cap B)/P(A)$  er nul.

For enhver dalende følge af mængder  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$  med  $P(A_i) \neq 0$  for alle  $i$  og med grænsemængden

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \quad (5)$$

har vi en veldefineret følge af betingede sandsynligheder

$$P(B|A_1), P(B|A_2), \dots, P(B|A_n), \dots \quad (6)$$

Hvis denne følge er konvergent, er det naturligt at definere den betingede sandsynlighed  $P(B|A)$  som følgens grænseværdi. Herved bliver  $P(B|A)$  imidlertid ikke entydigt defineret, idet grænseværdien afhænger af den valgte mængdefølge  $A_1, \dots, A_n, \dots$ , se nedenfor. Enhver definition af  $P(B|A)$  er derfor knyttet til en nøje defineret klasse af mængder, hvorfra enhver udtaget dalende mængdefølge med  $A$  som grænsemængde har den egenskab, at den tilsvarende følge af betingede sandsynligheder er defineret og konvergent med en grænseværdi, der er fælles for alle sådanne følger udtaget fra den betragtede klasse af mængder. Den i en given anvendelse relevante definition af  $P(B|A)$  er bestemt af de for anvendelsen relevante mængdefølger, der har  $A$  som grænsemængde.

Problemet illustreres på elementær måde ved at betragte et par  $(X, Y)$  af stokastiske variable med tæthedsfunktion  $f_{X, Y}(x, y)$  sammen med parret  $(X, Z) = (X, XY)$ , for hvilket tæthedsfunktionen er

$$f_{X, Z}(x, z) = f_{X, Y}\left[x, \frac{z}{x}\right] \frac{1}{|x|} \quad (7)$$

(afbildningen  $(x, y) \rightarrow (x, z) = (x, xy)$  har Jacobideterminanten  $\partial(x, z)/\partial(x, y) = x$ ). Vi har da de betingede tætheder

$$f_X(x | Y=0) = \frac{f_{X, Y}(x, 0)}{f_Y(0)} \quad (8)$$

$$f_X(x | XY=0) = \frac{f_{X, Y}(x, 0) \frac{1}{|x|}}{\int_{-\infty}^{\infty} f_{X, Y}(x, 0) \frac{1}{|x|} dx} \quad (9)$$

Antag, at  $X$  ikke kan antage værdien nul. Man kan da uden at ændre hændelsen  $XY = 0$  skrive den som  $Y = 0$ . Men herved bliver venstresiderne i (8) og (9) skrevet med ens symboler, selvom højresiderne er åbenbart forskellige. Man bør derfor ikke bortforkorte  $X$  i hændelsen  $XY = 0$ , idet notationen viser, at klassen af relevante mængder, der har hændelsen  $Y = 0$  som fællesmængde, skal defineres ved  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -\theta < xy \leq 0\}$  hvor  $\theta \in \mathbb{R}_+$ . Når betingelsen er  $Y = 0$ , bliver den definerende klasse af mængder givet ved  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -\theta < y \leq 0\}$ , hvor  $\theta \in \mathbb{R}_+$ .  $\square$



I (4) kan tælleren tolkes som en følsomhed af sikkerheden af parallelsystemet  $\{M \leq 0\} \cap \{H \leq 0\}$  med hensyn til en parameter  $\theta$ . Den til hændelsen  $H + \theta = 0$  svarende ligning er

$$h(\mathbf{x}) + \theta = 0 \quad (10)$$

Følsomheden udregnes for  $\theta = 0$ . Nævneren kan tolkes på tilsvarende måde som en følsomhed af sandsynligheden  $P(H \leq 0)$  med hensyn til  $\theta$  for  $\theta = 0$ .

I det standardiserede gaussiske rum defineret ved transformationen  $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$  bliver fladen (10) repræsenteret ved ligningen

$$h[T^{-1}(\mathbf{y})] + \theta = 0 \quad (11)$$

Det følger da af (8.2.10), at vi for det geometriske hændelsesindeks (analogt til det geometriske sikkerhedsindeks)  $\beta_H$  svarende til  $H$  har

$$\frac{d\beta_H}{d\theta} = \frac{1}{\|\nabla h[T^{-1}(\alpha_H \beta_H)]\|} \quad (12)$$

hvor  $\nabla$  er gradientoperatoren med hensyn til  $\mathbf{y}$ , og  $\alpha_H$  er enhedsnormalvektoren i det globalt mest centrale punkt på den ved (11) for  $\theta = 0$  definerede flade. For nævneren i (4) bliver FORM-tilnærmelsen (8.2.16) derfor

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \theta} P(H + \theta \leq 0) \right]_{\theta=0} \simeq -\varphi(\beta_H) \frac{d\beta_H}{d\theta} \quad (13)$$

hvor  $d\beta_H/d\theta$  indsættes fra (12)

FORM-tilnærmelsen for tælleren i (4) bestemmes ved at benytte (8.3.4) og (8.3.5). For  $q = 2$  giver (8.3.5) følgende formel

$$\frac{d\Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho)}{d\theta} = \left[ -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} \frac{d\beta_1}{d\theta} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \frac{d\beta_2}{d\theta} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\theta} \right]_{(-\beta_1, -\beta_2; \rho)} \quad (14)$$

Ved at benytte fremstillingen, se øvelse 4.3,

$$\Phi_2(x_1, x_2; \rho) = \int_{-\infty}^{x_2} dy \int_{-\infty}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \varphi\left[\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] \varphi(x) dx \quad (15)$$

ses, at

$$\frac{\partial \Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho)}{\partial x_1} = \int_{-\infty}^{-\beta_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \varphi\left[\frac{y+\rho\beta_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] \varphi(\beta_1) dy = \varphi(\beta_1) \Phi\left[-\frac{\beta_2-\rho\beta_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] \quad (16)$$

medens (8.3.7) giver

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \rho} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (17)$$

hvor højre side er identisk med den 2-dimensional normale tæthed. Vi har derfor

$$\frac{\partial \Phi_2(-\beta_1, -\beta_2; \rho)}{\partial \rho} = \varphi(\beta_1) \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \varphi\left[\frac{\beta_2-\rho\beta_1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right] \quad (18)$$

For store værdier af  $(\beta_2 - \rho\beta_1)/\sqrt{1-\rho^2}$  er forholdet mellem (18) og (16) af størrelsesorden som  $(\beta_2 - \rho\beta_1)/(1-\rho^2)$  (da  $\Phi(-x) \propto \phi(x)/x$  for  $x \rightarrow \infty$ ). På nær for  $\rho$  tæt ved 1 (i tilfældet  $\beta_1 \neq \beta_2$ ) er de afledede (16) og (18) altså ikke af væsentlig forskellig størrelsesorden. Man kan imidlertid uden at begå fejl af betydning sædvanligvis udelade det sidste led i (14) ved anvendelsen på (4). Dette skyldes, at faktoren  $d\rho/d\theta$  sædvanligvis er lille sammenlignet med den afledede  $d\beta_H/d\theta$ . Vi har

$$\rho = \alpha'_{MH} \alpha_{HM} \quad (19)$$

og dermed

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \alpha'_{MH} \frac{d\alpha_{HM}}{d\theta} + \alpha'_{HM} \frac{d\alpha_{MH}}{d\theta} \quad (20)$$

hvor  $\alpha_{MH}$  og  $\alpha_{HM}$  er normalenhedsvektorerne til fladerne, der svarer til henholdsvis  $M = 0$  og  $H = 0$ , og dannet i det globalt mest centrale punkt i fællesmængden  $\{M=0\} \cap \{H=0\}$  repræsenteret i det standardiserede gaussiske rum. Hvis  $H$  er lineær i de gaussiske variable, bliver de til hændelserne  $H = 0$  og  $H + \theta = 0$  svarende flader to parallelle hyperplaner. Det følger da, at  $d\alpha_{HM}/d\theta = 0$ . Hvis yderligere hændelsen  $M = 0$  svarer til en hyperplan, da bliver også  $d\alpha_{MH}/d\theta = 0$ . Ved geometriske betragtninger kan man overbevise sig om, at de afledede  $d\alpha_{MH}/d\theta$  og  $d\alpha_{HM}/d\theta$  er proportionale med hovedkrumningerne af henholdsvis fladen  $M = 0$  og fladen  $H = 0$  i det globalt mest centrale punkt. Idet vi forudsætter små krumninger, vil vi se bort fra det sidste led i (14).

Medens vi ovenfor lod  $\beta_H$  betegne det til  $H$  svarende geometriske hændelsesindeks, vil vi lade  $\beta_{HM}$  betegne det simple hændelsesindeks for den lineære hændelsesmargin, der defineres ved tangenthyperplanen til fladen  $h[T^{-1}(y)] = 0$  i det globalt mest centrale punkt  $y_{MH}$  i fællesmængden

$$\{y | h[T^{-1}(y)] = 0\} \cap \{y | g(y) = 0\} \quad (21)$$

hvor  $g(y) = 0$  er grænsetilstandsfladen svarende til hændelsen  $M = 0$ . Denne hyperplan har normalenhedsvektoren  $\alpha_{HM}$ . Tilsvarende betegner  $\beta_{MH}$  det simple sikkerhedsindeks for den lineære sikkerhedsmargin, der defineres ved tangenthyperplanen til fladen  $g(y) = 0$  i det globalt mest centrale punkt i fællesmængden. Denne hyperplan har normalenhedsvektoren  $\alpha_{MH}$ . Dermed bliver tælleren i (4)

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \theta} P(M \leq 0, H + \theta \leq 0) \right]_{\theta=0} \approx \frac{d\Phi_2(-\beta_{MH}, -\beta_{HM}; \rho)}{d\theta} \approx \left[ -\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} \frac{d\beta_{HM}}{d\theta} \right]_{(-\beta_{MH}, -\beta_{HM}; \rho)} = -\varphi(\beta_{HM}) \Phi \left[ -\frac{\beta_{MH} - \rho \beta_{HM}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] \frac{d\beta_{HM}}{d\theta} \quad (22)$$

idet det bemærkes, at  $d\beta_{MH}/d\theta$  er negligeret under forudsætningen om små krumninger, da  $\beta_{MH} = \alpha'_{MH} y_{MH}$ ,  $\alpha'_{MH} dy_{MH}/d\theta = 0$  og  $d\alpha_{MH}/d\theta \approx 0$ . Korrelationskoefficienten  $\rho$  er bestemt ved (19) og

$$\frac{d\beta_{HM}}{d\theta} = \frac{1}{\|\nabla h[T^{-1}(y_{MH})]\|} \quad (23)$$

er bestemt på samme måde som (12), men med det globalt mest centrale punkt, se (8.3.8),

$$y_{MH} = \begin{bmatrix} \alpha'_{MH} \\ \alpha'_{HM} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_{MH} \\ \beta_{HM} \end{bmatrix} \quad (24)$$

i fællesmængden (21) indsat i stedet for  $\alpha_H \beta_H$ . Hermed har vi ved indsætning af (13) og (22) i (4), at

$$P(M \leq 0 | H = 0) \approx \frac{\varphi(\beta_{HM})}{\varphi(\beta_H)} \Phi \left[ -\frac{\beta_{MH} - \rho \beta_{HM}}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] \frac{\|\nabla h[T^{-1}(\alpha_H \beta_H)]\|}{\|\nabla h[T^{-1}(y_{MH})]\|} \quad (25)$$

Hvis  $M$  og  $H$  er lineære i de gaussiske variable, bliver  $\beta_{HM} = \beta_H$ ,  $\beta_{MH} = \beta_M$  og de to gradientvektorlængder ens. Resultatet (25) bliver da

$$P(M \leq 0 | H = 0) = \Phi \left[ -\frac{\beta_M - \rho \beta_H}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right] = \Phi(-\beta_M | H=0) \quad (26)$$

hvor det betingede sikkerhedsindeks  $\beta_M | H=0$  er indført fra (8.1.6). Resultatet (26) er eksakt.

Med  $k$  relationsinformationer af anden type generaliseres (4) direkte til

$$P(M \leq 0 | H_1=0, \dots, H_k=0) =$$

$$\left[ \frac{\frac{\partial^k}{\partial \theta_1 \dots \partial \theta_k} P(M \leq 0, H_1 + \theta_1 \leq 0, \dots, H_k + \theta_k \leq 0)}{\frac{\partial^k}{\partial \theta_1 \dots \partial \theta_k} P(H_1 + \theta_1 \leq 0, \dots, H_k + \theta_k \leq 0)} \right]_{\theta=0} \quad (27)$$

som ved brug af FORM-tilnærmelsen (8.3.4) bliver

$$\simeq \frac{\frac{\partial^k}{\partial \theta_1 \dots \partial \theta_k} \Phi_{k+1}(-\tilde{\beta}_{k+1}, P_{k+1})}{\frac{\partial^k}{\partial \theta_1, \dots, \partial \theta_k} \Phi_k(-\beta_k; P_k)} \quad (28)$$

Heri er  $\tilde{\beta}_{k+1}$  vektoren af hændelsesindeks  $\tilde{\beta}_0 = \beta_{M(H_1 \dots H_k)}$ ,  $\tilde{\beta}_1 =$

$\beta_{H_1(M H_2 \dots H_k)}$ , ...,  $\tilde{\beta}_k = \beta_{H_k(M H_1 \dots H_{k-1})}$  defineret helt analogt til  $\beta_{MH}$  og  $\beta_{HM}$  ovenfor. Korrelationsmatricen  $P_{k+1}$  er defineret ved de skalære

produkter mellem normalenhedsvektorerne  $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_{M(H_1 \dots H_k)}$ ,  $\tilde{\alpha}_1 =$

$\alpha_{H_1(M H_2 \dots H_k)}$ , ...,  $\tilde{\alpha}_k = \alpha_{H_k(M H_1 \dots H_{k-1})}$ . Tilsvarende er  $\beta_k$  vektoren af hændelsesindeks  $\beta_1 = \beta_{H_1(H_2 \dots H_k)}$ ,  $\beta_2 = \beta_{H_2(H_1 H_3 \dots H_k)}$ , ...,

$\beta_k = \beta_{H_k(H_1 \dots H_{k-1})}$ , medens korrelationsmatricen  $P_k$  er defineret ved de

skalære produkter mellem normalenhedsvektorerne  $\alpha_1 = \alpha_{H_1(H_2 \dots H_k)}$ ,

$\alpha_2 = \alpha_{H_2(H_1 H_3 \dots H_k)}$ , ...,  $\alpha_k = \alpha_{H_k(H_2 \dots H_{k-1})}$ . Alle disse hændelsesindeks

og normalenhedsvektorer er funktioner af  $(\theta_1, \dots, \theta_k)$ . Det bemærkes, at

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_0}{\partial \theta_i} \equiv 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, k \quad (29)$$

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_i}{\partial \theta_j} \equiv \frac{\partial \beta_j}{\partial \theta_i} \equiv 0 \quad \text{for } i \neq j \quad (30)$$

$$\frac{\partial \tilde{\beta}_i}{\partial \theta_i} = \frac{1}{\|\nabla h_i[T^{-1}(y_{M H_1 \dots H_k})]\|} \quad (31)$$

$$\frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_i} = \frac{1}{\|\nabla h_i[T^{-1}(y_{H_1 \dots H_k})]\|} \quad (32)$$

$$y_{M H_1 \dots H_k} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{\beta}_0 \\ \tilde{\beta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}_k \end{bmatrix}; \quad y_{H_1 \dots H_k} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (33)$$

Det følger af (29) og (30) at de blandede afledede af  $\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_k, \beta_1, \dots, \beta_k$  alle er nul. Hvis der som ovenfor ses bort fra de afledede af korrelationskoefficienterne, reduceres (28) til

$$P(M \leq 0 | H_1 = 0, \dots, H_k = 0) \simeq$$

$$\frac{\varphi_k(\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_k; \{\tilde{\alpha}_i \tilde{\alpha}_j\})}{\varphi_k(\beta_1, \dots, \beta_k; \{\alpha_i \alpha_j\})} \Phi \left[ \frac{-\hat{E}[\tilde{M} | \tilde{H}_1 = 0, \dots, \tilde{H}_k = 0]}{\sqrt{1 - \rho[\tilde{M}; (\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_k)]^2}} \right].$$

$$\prod_{i=1}^k \frac{\|\nabla h_i[T^{-1}(y_{H_1 \dots H_k})]\|}{\|\nabla h_i[T^{-1}(y_{M H_1 \dots H_k})]\|} \quad (34)$$

hvor  $\tilde{M}, \tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_k$  er de hændelsesmargener med forventningsværdier  $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1,$

...,  $\tilde{\beta}_k$  og standardafvigelser 1, der svarer til tangenthyperplanerne i

$y_{MH_1 \dots H_k}$ . Den lineære regression  $\hat{E}[\tilde{M} | \tilde{H}_1 = 0, \dots, \tilde{H}_k = 0]$  udregnes ved

brug af (4.3.8), medens den multiple korrelationskoefficient  $\rho[\tilde{M}; (\tilde{H}_1, \dots, \tilde{H}_k)]$

udregnes ved brug af (4.4.17).

Hvis  $M, H_1, \dots, H_k$  alle er lineære i de gaussiske variable fås det eksakte resultat, se (4.4.14),

$$P(M \leq 0 | H_1 = 0, \dots, H_k = 0) =$$

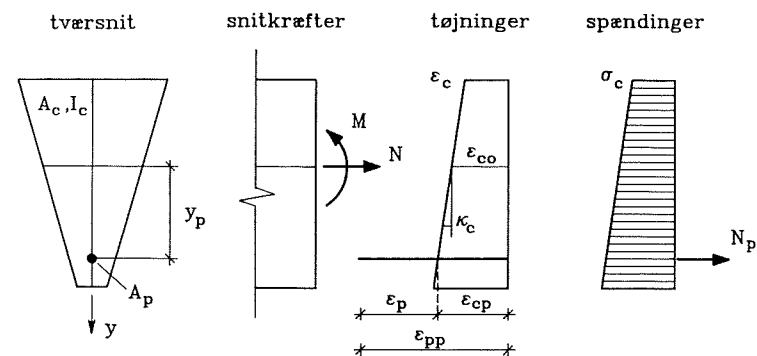
$$\Phi \left[ - \frac{\hat{E}[M | H_1 = 0, \dots, H_k = 0]}{\sqrt{1 - \rho[M; (H_1, \dots, H_k)]^2}} \right] = \Phi(-\beta_{M|H=0}) \quad (35)$$

Formler for blandinger af de to informationstyper kan opskrives efter tilsvarende principper.

**Eksempel 13.3** Betons krybnings- og svindegenskaber er i praksis ofte behæftet med meget større usikkerhed end styrkeegenskaberne. Ved projektering af forspændte betonkonstruktioner er betydningen heraf særlig stor, fordi man ofte søger at vælge forspændings- og efterspændingsarrangementerne med de tilhørende spændingsniveauer således, at krybnings- og svinddeformationerne bliver små. Med den store usikkerhed taget i betragtning kan det være relevant på basis af en probabilistisk model at revidere efterspændingsniveauerne på grundlag af opdateringer fra observerede deformationer under byggeprocessen eller senere.

Lad os som et eksempel betragte forspændingstabet i en prismatisk forspændt betonbjælke med det i figur 13.4 viste tværsnit. Til tiden  $t$  betegnes kraften i forspændingskablet ved  $N(t)$ . Med  $N(0)$  givet, udvikler  $N(t)$  sig i tiden som en stokastisk variabel med fordelingsegenskaber, der afhænger af den forenede fordeling af en række stokastiske inputvariable til den matematiske model, der bestemmer  $N(t)$ . De i de følgende figurer viste resultater er bestemt på grundlag af den sædvanlige lineære visko-elastiske Bernoulli bjælketeori anvendt på forspændte betonbjælker. De for anvendelsen af denne teori nødvendige krybnings- og svindparametre er bestemt ved inputvariablene på grundlag af empiriske modeller formuleret af Bazant og Panula [13.5]. De betragtede stokastiske inputvariable  $X$  er fugtighed  $X_1$ , cementindhold  $X_2$ , vand-cementforhold  $X_3$ , grus-cementforhold  $X_4$ , 28-døgns cylinderstyrke  $X_5$ , additiv modelusikkerhed for svindmodellen  $X_6$ , additiv modelusikkerhed for modellen for den såkaldte grundkrybning  $X_7$ , samt additiv

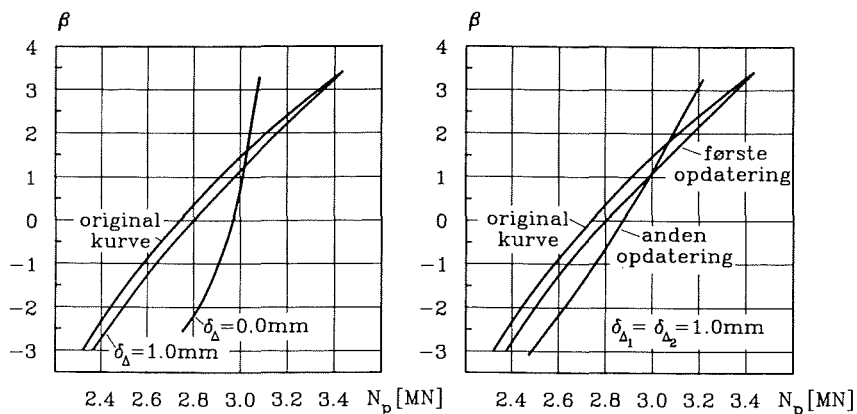
modelusikkerhed for modellen for den såkaldte udtørningskrybning  $X_8$ . Alle 8 inputvariable er antaget at være indbyrdes uafhængige og normalfordelte med realistiske værdier af middelværdier og variationskoefficienter, der ikke skal gengives her, men som kan findes i [13.5].



Figur 13.4. Forspændt betonbjælketværsnit.

For fordelingsfunktionen for forspændingskraften  $N(t)$  kan udregnes for argumentet  $n$  ved at udregne svigtsandsynligheden knyttet til sikkerhedsmargenen  $M = N(t) - n$ . Den i figur 13.5 viste fordelingsfunktion (mærket "original curve" er udregnet ved brug af FORM for forskellige værdier af  $n$ . Ordinataksen viser afvigelser fra middelværdien i antal standardafvigelser svarende til en vilkårlig ved en ret linie defineret normalfordeling (sandsynligheds-papir for normalfordeling). Ved denne beregning er samtidigt bestemt følsomhedsfaktorer med hensyn til de 8 stokastiske inputvariable. For  $n = 2.5$  MN er i nummerorden fundet følgende følsomhedsfaktorer (= kvadraterne på komponenterne i  $\alpha$ , hvor  $\alpha$  er enhedsvektoren rettet fra nulpunktet mod det globalt mest centrale grænsetilstandspunkt i det standardiserede gaussiske rum, se afsnit 8.1): (4.2, 0.0, 0.3, 0.4, 1.4, 0.5, 93.1, 0.1). Det fremgår heraf, at det altovervejende usikkerhedsbidrag kommer fra usikkerheden i fastlæggelsen af modellen for grundkrybning.

Efter at bjælken er produceret og indbygget på sin blivende plads udføres målinger af bjælkemidtpunktets nedbøjningsændringer i tiden  $t$ . Nedbøjningen  $u(t)$  måles til en tid  $t_0$  umiddelbart efter lastens påførsel og til en senere



Figur 13.5. Fordelingsfunktioner før og efter opdatering for forspændingskraft  $N(10.000 \text{ dage})$  i den i figur 13.4 definerede betonbjælke med længde 10 m og bøjningsmoment 1 MNm.

tid  $t_1$ . Der tages hensyn til måleusikkerhed ved at betragte differensen  $\Delta$  som en normalfordelt stokastisk variabel. Vi har da hændelsesmargenen  $H_1 = u(t_1) - u(t_0) - \Delta_1$ . En ny nedbøjningsmåling til tiden  $t_2 > t_1$  giver anledning til definition af hændelsesmargenen  $H_2 = u(t_2) - u(t_0) - \Delta_2$ , etc. Efter måletidspunktet  $t_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  udregnes den opdaterede fordelingsfunktion  $P[N(T) \leq n | H_1 = 0, \dots, H_n = 0]$ .

Til venstre i figur 13.5 er foruden den ikke opdaterede fordelingsfunktion vist to opdaterede fordelingsfunktioner, der svarer til henholdsvis ingen måleusikkerhed  $D[\Delta_1] = 0$  og en måleusikkerhed på  $D[\Delta_1] = 1 \text{ mm}$  ved en nedbøjningsmåling til tiden  $t_1 = 1 \text{ år}$  ( $t_0 = 1 \text{ dag}$ ), der har givet  $E[\Delta_1] = -4 \text{ mm}$ . Betydningen af måleusikkerheden for den information, der opnås ved opdateringen, ses at være meget væsentlig. Til højre i figur 13.5 er de to af kurverne de samme som i venstre side, medens den tredje kurve svarer til en opdatering efter en måling til tiden  $t_2 = 10 \text{ år}$ . Måleusikkerhederne er  $D[\Delta_1] = D[\Delta_2] = 1 \text{ mm}$  og  $\Delta_1, \Delta_2$  er antaget at være indbyrdes uafhængige. Opdateringen efter 10 år har resulteret i en betydelig reduktion i forspændingskraftens usikkerhed. (Forudsætningen om uafhængighed mellem  $\Delta_1$  og  $\Delta_2$  er brugbar, hvis udbøjningsmålingen til tiden  $t_0$  er udført med væsentlig større nøjagtighed end de senere udbøjningsmålinger, og alle udbøjningsmålinger er indbyrdes uafhængige. Under den sidste forudsætning har man jo, at  $\text{Cov}[\Delta_1, \Delta_2]$  er lig med variansen af udbøjningsmålingen til tiden  $t_0$ ).  $\square$

**Eksempel 13.3** Udmattelsesrevner, der vokser i størrelse på grund af vekslende påvirkninger, spiller en afgørende rolle for sikkerheden af mange stål- og aluminiumskonstruktioner. Svigt kan vise sig på mange måder, eksempelvis som en lokal lækage (i rørledninger og beholdere), som lokalt eller globalt sprøbrud, eller som et globalt sejt svigt som følge af et lokalt brud. Ofte kan det relevante svigtkriterium baseres på eksistensen af en kritisk revnelængde, der afhænger af materialets sejhed. Både denne sejhed og de parametre, der har indflydelse på revnevæksten, er i almindelighed behæftet med meget stor usikkerhed.

Som en illustration betragtes en revne i en skive udsat for cykliske påvirkninger vinkelret på revnens plan. Langt væk fra revnen er den cykliske spændingstilstand homogen og enakset med den konstante spændingsvidde  $S$ . Ved revnespidsen er spændingerne intensiverede med den såkaldte spændingsintensitetsfaktor. Ved brug af lineær elasticitetsteori kan denne spændingsintensitetsfaktor udregnes til at være  $\sqrt{\pi x}$ , hvor  $x$  er revnelængden. Dette resultat forudsætter, at revnen er beliggende langt væk fra skivens rande.

Hvis dette ikke er tilfældet, skal faktoren  $\sqrt{\pi x}$  modificeres ved multiplikation med en funktion af  $x$ , der er næsten konstant lig med 1 for små værdier af  $x$ . Denne funktion afhænger af en eller flere geometriske størrelser, der fastlægger revnen i forhold til skivens rande. Den kaldes derfor geometrifunktionen. I dette eksempel kan geometrifunktionen med tilstrækkelig nøjagtighed sættes til 1.

Eksperimentelle undersøgelser har vist, at tilvæksten i revnelængde  $\Delta x$  per spændingsperiode (per cykel) kan approksimeres ved

$$\Delta x = C(\sqrt{\pi x} S)^m \quad (36)$$

hvor  $C$  og  $m$  er materialekonstanter. Denne ligning kaldes ofte Paris-Erdogans lov for revnevækst. Ofte er revnetilvæksten  $\Delta x$  per cykel meget lille i forhold til variationen af  $x^{m/2}$ . Man kan derfor idealisere  $\Delta x$  til differentialkvotienten  $dx/dn$ , hvor  $n$  er cykelantallet opfattet som en kontinuert parameter. Derved bliver (36) til en differentilligning, hvori de variable  $x$  og  $n$  kan adskilles. Løsningen bliver

$$x = \left[ \left( 1 - \frac{m}{2} \right) C \pi^{m/2} S^m n + X_1^{1-m/2} \right]^{-(1-m/2)} \quad (37)$$

hvor  $X_1$  er den stokastiske begyndelsesrevnelængde. Lad  $X_2$  være den stokastiske kritiske revnelængde. Vi kan da formulere sikkerhedsmargenen

$$M(n) = X_2 - \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} X_4 \right) X_5 (\sqrt{\pi} X_3)^{X_4 n} + X_1^{1-\frac{1}{2} X_4} \frac{1}{2} X_4^{-1} \right] \quad (38)$$

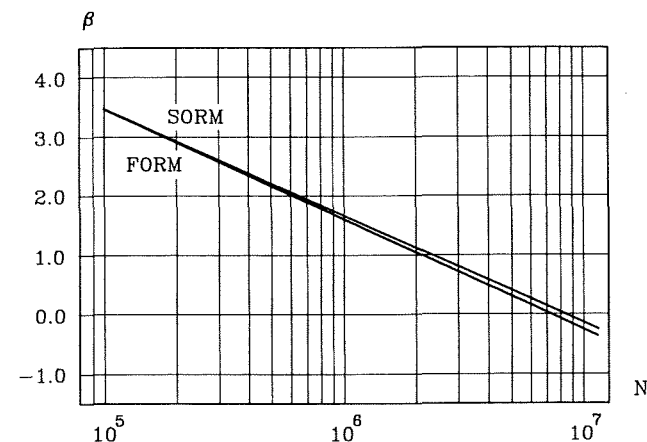
hvor  $X_3 = S$ ,  $X_4 = m$ ,  $X_5 = C$ .

De stokastiske variable  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  og parret  $(X_4, X_5)$  er i det følgende antaget at være indbyrdes uafhængige. De stokastiske variable  $X_4$  og  $X_5$  er derimod korrelerede i en grad, der afhænger af det valgte fysiske enhedssystem. (Da (36) skal være dimensionskorrekt afhænger enheden for konstanten  $C$  foruden af enhederne for længde og spænding af værdien af den dimensionsløse eksponent  $m$ ). Enhederne for længde og spænding er henholdsvis mm og  $N/\text{mm}^2$ . Følgende fordelingsantagelser er givet:  $X_1$  er eksponentialfordelt med middelværdi 1,  $X_2$  er normalfordelt med middelværdi 50 og standardafvigelse 10,  $X_3$  er normalfordelt med middelværdi 60 og standardafvigelse 100,  $(X_4, \log X_5)$  er forenet normalfordelt med middelværdipunkt  $(3.5, -33.00)$ , standardafvigelser  $(0.3, 0.47)$  og korrelationskoefficient  $-0.9$ .

Fordelingsfunktionen for antallet  $N$  af cykler til svigt er  $P(N \leq n) = P[M(n) \leq 0]$ . Den er vist udregnet ved FORM såvel som ved SORM i figur 13.6 med fraktilen i den standardiserede normalfordeling på ordinataksen (sandsynlighedspapir for normalfordeling). For  $n = 1.5 \cdot 10^6$  cykler er udregnet følsomhedsfaktorerne

$$(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2, \alpha_4^2 + \alpha_5^2) = (30, 0, 13, 57)\% \quad (39)$$

hvor  $\alpha_4^2$  og  $\alpha_5^2$  ikke er angivet hver for sig, fordi  $X_4$  og  $X_5$  er stærkt indbyrdes afhængige.



Figur 13.6. Fordelingsfunktion for antal spændingscykler til svigt udregnet ved FORM og SORM. (Ordinatskala svarer til fraktilskala for den standardiserede normalfordeling).

Konstruktioner, hvori der kan opstå farlig revnevækst, bliver sædvanligvis inspiceret med visse mellemrum for at undersøge, om der er revner på vej til at få kritisk størrelse. Antag, at der er fundet en revne efter  $n_j$  cykler, og at revnens længde er målt. Som sædvanlig medfører denne måling ikke, at revnelængden efter målingen kendes eksakt, men kun at målingen fastlægger en stokastisk variabel  $A_j$ , der repræsenterer revnelængden. En sådan måling kan tænkes foretaget til adskillige tidspunkter. Man har altså et antal hændelsesmargener

$$H_j = A_j - x(n_j), \quad j = 1, \dots, s \quad (40)$$

hvor  $x(n_j)$  er givet ved (38). Den indsamlede information er af typen  $H_1 = 0, \dots, H_s = 0$ , dvs relationsinformation af anden type.

Man kan naturligvis også komme ud for, at der ved et såkaldt "hot spot", dvs et punkt i konstruktionen med forudset stærk koncentration af spændinger, ikke observeres nogen revne efter  $n_j$  cykler. Man har da fået information af første type svarende til hændelsesmargenen

$$H_1 = x(n_1) - B_1 \quad (41)$$

hvor  $B_1$  er en stokastisk variabel, der angiver den grænselængde hvorunder en revne ikke kan detekteres med det anvendte måleudstyr. Med et sådant inspektionsresultat opnået  $r$  gange har man altså informationen  $H_1 \leq 0, \dots, H_r \leq 0$  af første type. Det er ved formuleringen (41) forudsat, at der med sandsynlighed 1 findes en lille ikke observeret revne i den umiddelbare omegn af "hot spot" allerede før starten af den cykliske påvirkning. Herudover er det en forudsætning for gyldigheden af Paris-Erdogans lov, at begyndelsesrevnen er større end en vis mindste størrelse.

Det er klart, at hvis  $B_1$  er deterministisk og har samme værdi for alle inspektioner, da er hele informationen indeholdt i den sidste ulighed  $H_r \leq 0$ .

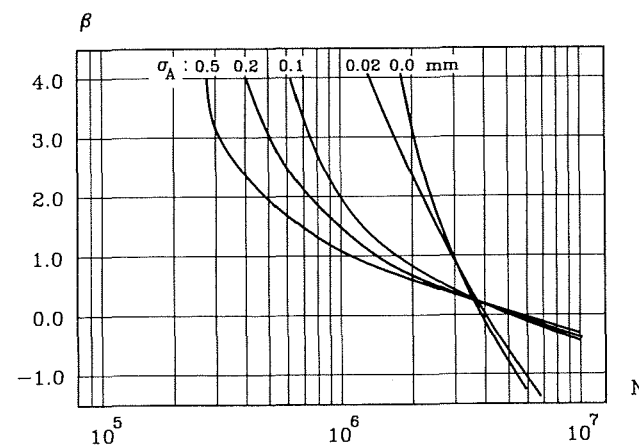
Den generelle situation er, at der første gang observeres en revne ved den  $(r+1)$ te inspektion. Efter  $r + s$  inspektioner har man da opsamlet en information, der fører til den opdaterede fordelingsfunktion for cykelantallet  $N$  til svigt:

$$P(N \leq n | x(n_1) \leq B_1, \dots, x(n_r) \leq B_r, x(n_{r+1}) = A_{r+1}, \dots, x(n_{r+s}) = A_{r+s}) =$$

$$P(M(n) \leq 0 | H_1 \leq 0, \dots, H_r \leq 0, H_{r+r} = 0, \dots, H_{r+s} = 0) \quad (42)$$

Yderligere generalisering omfatter samtidig inspektion af adskillige "hot spots". Under hensyntagen til den indbyrdes afhængighed, der kan eksistere mellem inputvariablene svarende til flere steder på konstruktionen, kan opdatering foretages efter helt de samme principper som angivet ovenfor.

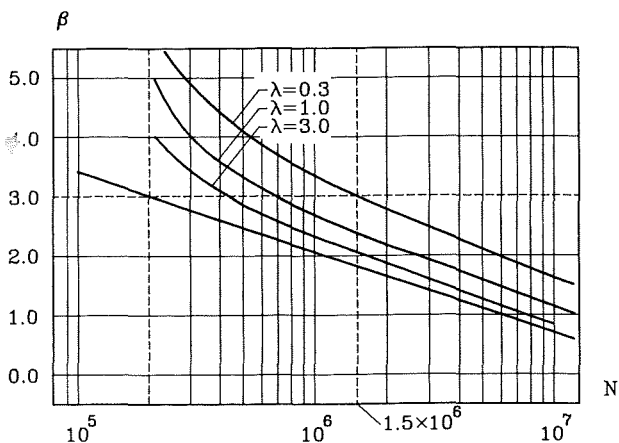
Lad os betragte et eksempel, hvor en revne er observeret efter  $n_1 = 10^5$  cykler. For den stokastiske revnelængde  $A_1$  er ved målingen bestemt middelværdi  $E[A_1] = 3.9$  mm. Det forudsættes, at  $A_1$  er normalfordelt med standardafvigelsen  $\sigma_A$ , der udtrykker målenøjagtigheden. Revnen repareres ikke, men der foretages en ny måling efter  $n_2 = 2 \cdot 10^5$  cykler ved brug af samme målemetode. Man finder  $E[A_2] = 4.0$  mm. Med forudsætning om uafhængighed mellem  $A_1$  og  $A_2$  fås de i figur 13.7 viste efter 2. inspektion opdaterede fordelingsfunktioner for  $N$  i afhængighed af forskellige værdier af  $\sigma_A$ . Målenøjagtigheden ses at have meget stor betydning.



Figur 13.7. Opdateret fordelingsfunktion for antal cykler til svigt efter 2 inspektioner med observerede revnelængder på 3.9 mm og 4.0 mm. Virkningen af måleusikkerhed er belyst ved forskellige valg af  $\sigma_A$ . (Ordinatskala svarer til fraktilskala for den standardiserede normalfordeling).

Hvis situationen er den, at der ikke kan observeres tilstedeværelse af en revne ved første inspektion for  $n_1 = 10^5$  cykler, kommer fordelingssegenskaberne af detekteringsgrænsen  $B_1$  til at indgå i opdateringen. Hvis det antages, at  $B_1$  har en eksponentiel fordeling med middelværdi  $\lambda$ , kan man udregne de i figur 13.8 viste fordelingsfunktioner for  $N$  svarende til forskellige værdier af  $\lambda$ . Disse værdier er udtryk for inspektionsmetodens kvalitet. Figuren viser også fordelingsfunktionen før opdatering. Hvis kravet til sikkerheden er formuleret således, at sikkerhedsindekset skal være mindst 3 gennem en forudsat anvendelsestid for konstruktionen på  $1.5 \cdot 10^6$  cykler, ses af figuren, at det er unødvendigt at foretage flere inspektioner, hvis  $\lambda \leq 0.3$ . For større værdier af  $\lambda$  bør der foretages nye inspektioner til tidspunkter, der kan aflæses ved de successivt opdaterede fordelingsfunktioners skæringspunkter med niveauet  $\beta = 3$ .

Vi kan også studere virkningen af at indhente ny information, efter at en revne er blevet repareret. Resultatet afhænger i betydelig grad af, om reparationen har medført en lokal udskiftning af materialet omkring revnen, således at de nye materialeparametre kan antages at være uafhængige af de gamle



Figur 13.8. Opdateret fordelingsfunktion for antal cykler til svigt efter en inspektion, hvor en revne ikke kan observeres. Middelværdien af detekteringsgrænsen er  $\lambda$ . Den nederste kurve er fordelingsfunktionen før opdatering og den samme som FORM-kurven i figur 13.6. (Ordinatskala svarer til fraktilskala for den standardiserede normalfordeling).

materialeparametre, eller om materialeparametrene må antages at have de samme værdier før og efter reparationen.

Antag, at reparationen udføres efter  $n_{\text{rep}}$  cykler ved en revnedannelse  $A_{\text{rep}}$ . Hertil svarer en hændelsesmargin

$$H_{\text{rep}} = A_{\text{rep}} - x(n_{\text{rep}}) \quad (43)$$

af typen (40). Den opdaterede fordelingsfunktion for  $N$  bliver da

$$P(N \leq n | H_{\text{rep}} = 0) = P(M_{\text{rep}}(n) \leq 0 | H_{\text{rep}} = 0) \quad (44)$$

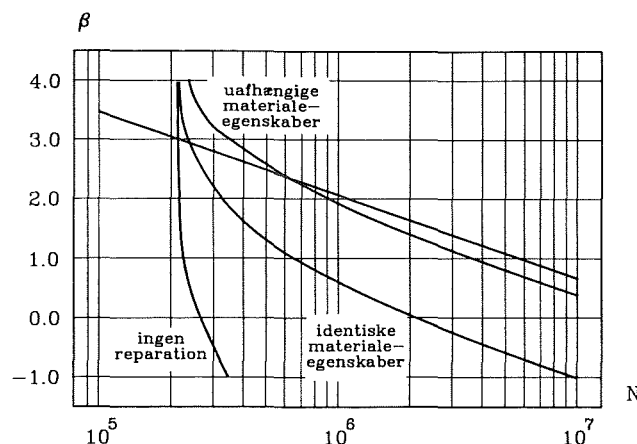
hvor  $M_{\text{rep}}(n)$  er en sikkerhedsmargin, der er forskellig fra  $M(n)$  givet ved (38). Vi har

$$M_{\text{rep}}(n) = X_2 \left[ \left(1 - \frac{1}{2} Y_4\right) Y_5 (\sqrt{\pi} X_3)^{Y_4} Y_1^{1 - \frac{1}{2} Y_4} Y_4^{\frac{1}{2} Y_4 - 1} \right] \quad (45)$$

hvor  $Y_1$  er en ny stokastisk begyndelseslængde af en revne, der antages at

eksistere ved "hot spot" umiddelbart efter reparationen, medens  $(Y_4, Y_5)$  svarer til et nyt værdisæt af  $(m, C)$  med samme fordeling som  $(X_4, X_5)$ . Hvis materialeparametrene har samme værdier før og efter reparationen, erstattes  $(Y_4, Y_5)$  i (45) naturligvis med  $(X_4, X_5)$ .

Figur 13.9 viser fordelingsfunktionen for  $N$  efter en reparation af en revne med længde  $A_{\text{rep}} = 8$  mm for  $n_{\text{rep}} = 2 \cdot 10^5$  cykler, idet det er antaget, at  $Y_1$  har samme eksponentielle fordeling som  $X_1$ . Det ses, at der er en øjeblikkelig forøgelse af sikkerheden efter reparationen, men også at sikkerheden falder hurtigt til et niveau under det niveau, der defineres ved den oprindelige fordelingsfunktion uden opdatering. Dette afspejler, at informationen om den store revnelængde  $A_{\text{rep}}$  ved  $n_{\text{rep}}$  cykler fortæller, at spændingsvidden  $X_3$ , der også virker efter reparationen, har antaget en relativ stor værdi.  $\square$



Figur 13.9. Opdateret fordelingsfunktion for antal cykler til svigt efter en inspektion og revnelængdemåling, der er blevet efterfulgt af en reparation. Den reparerede revnelængde er  $A_{\text{rep}} = 8$  mm svarende til  $n_{\text{rep}} = 2 \cdot 10^5$  cykler. (Ordinatskala svarer til fraktilskala for den standardiserede normalfordeling).

### 13.3 Beslutningskriterier for eksisterende konstruktioner \*

Sædvanligvis er en konstruktion projekteret således, at den med brug af den på projekteringstidspunktet til rådighed værende information beregningsmæssigt tilfredsstillende et normkrav om, at det generaliserede sikkerhedsindeks



$\beta_a$  priori med hensyn til en given grænsetilstand ikke er mindre end en specificeret værdi  $\beta_{krævet}$ . Med betegnelsen  $\beta_a$  priori antydes, at sikkerhedsindekset svarer til projekteringsfasen, dvs til en tidsperiode før konstruktionen er virkeliggjort, og dermed før der er eksistensbetingsinformation til rådighed om den virkeliggjorte konstruktion.

Efter principper beskrevet i det foregående giver indsamling af information efter konstruktionens virkeliggørelse anledning til beregning af et opdateret sikkerhedsindeks, som vi vil betegne ved  $\beta_a$  posteriori. Medens normkravet

$$\beta_a \text{ priori} \geq \beta_{krævet} \quad (1)$$

har en rationel begrundelse, der ikke er i strid med beslutningsteoretiske overvejelser fra samfundets side, se afsnit 12.3, er det mindre klart, om normen under påberåbelse af rationelle beslutningsteoretiske argumenter også kan forlange, at

$$\beta_a \text{ posteriori} \geq \beta_{krævet} \quad (2)$$

Vi skal se, at et beslutningsteoretisk begrundet kriterium for ikke at foretage sig yderligere med hensyn til at opnå en tilfredsstillende sikkerhed af en eksisterende konstruktion er, at (2) er opfyldt. Dette er imidlertid ikke en nødvendig betingelse for, at sikkerheden af den eksisterende konstruktion kan være tilfredsstillende.

For nærmere at belyse og eftervise disse to påstande må vi se på mulige handlinger vedrørende indgreb i den eksisterende konstruktion med tilhørende konsekvenser. Der er i princippet tale om et valg mellem tre handlingskategorier: 1) lade konstruktionen uændret, 2) forstærke konstruktionen og/eller ændre dens brug, 3) nedrive konstruktionen og erstatte den med en ny konstruktion. Handlingskategorien 2 kan indeholde en række alternative handlinger svarende til alternative konstruktive forstærkningsforanstaltninger og/eller brugsmuligheder. Det samme gælder handlingskategorien 3, idet der kan være forskellige nedrivningsmetoder at vælge imellem samt mange alternative konstruktive udformninger af den nye konstruktion.

Som i afsnit 12.3 vil betragtningerne blive knyttet til en forenklet omkost-

ningsfunktion. Lad kapitalinvesteringen i et forstærkningssystem af given udformning være givet som en funktion  $e(\beta)$  af sikkerhedsindekset  $\beta$  for den forstærkede konstruktion. Denne funktion kan åbenbart skrives som

$$e(\beta) = \begin{cases} k + h(\beta) & \text{for } \beta > \beta_a \text{ posteriori} \\ 0 & \text{for } \beta = \beta_a \text{ posteriori} \end{cases} \quad (3)$$

hvor  $k$  er en konstant begyndelsesomkostning ved i det hele taget at gå i gang med at udføre en forstærkning med den givne udformning, medens  $h(\beta)$  er en fra nul voksende funktion af  $\beta$  defineret for  $\beta > \beta_a$  posteriori, se figur 13.10. At  $e(\beta)$  ikke er defineret for  $\beta < \beta_a$  posteriori følger naturligvis af, at ethvert konstruktivt forstærkningssystem har til formål at forøge sikkerhedsindekset ud over værdien  $\beta_a$  posteriori. Den total forventede omkostning er da

$$k + h(\beta) + (d+c_{ny}) \Phi(-\beta) \quad (4)$$

hvor  $\Phi(-\beta)$  er den teoretiske svigtsandsynlighed som funktion af  $\beta$ , se (12.6.2), medens  $c_{ny}$  er den optimale kapitalinvestering i en ny konstruktion, og  $d$  er den direkte omkostning for svigthændelsen. Med den i afsnit 12.6 givne begrundelse har vi for simpelhed skyld set bort fra det bidrag til (4), der kommer fra sandsynligheden for fejltagelser.

Hvis der ikke udføres nogen forstærkning, skal (4) erstattes af

$$(d+c_{ny}) \Phi(-\beta_a \text{ posteriori}) \quad (5)$$

Sammenligning af (4) og (5) fører til følgende beslutningsregel:

- 1) Hvis der er en løsning  $\beta_0 > \beta_a$  posteriori til ligningen

$$h'(\beta) - (d+c_{ny}) \varphi(\beta) = 0 \quad (6)$$

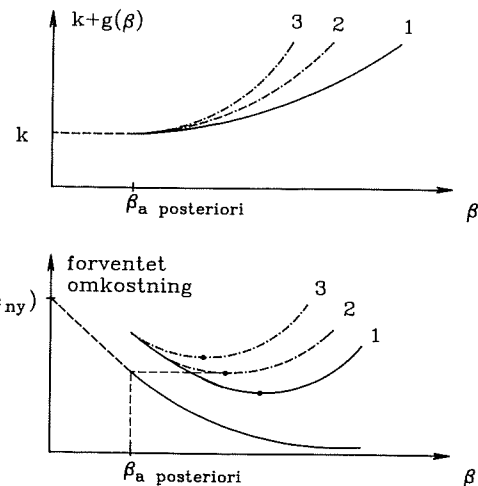
for hvilken

$$k + h(\beta_0) < (d+c_{ny}) [\Phi(-\beta_a \text{ posteriori}) - \Phi(-\beta_0)] \quad (7)$$

da bør der udføres en forstærkning af konstruktionen, men ikke nødvendigvis med den betragtede udformning. Det er muligt, at en alternativ udformning kan give mindre forventet omkostning.

- 2) Hvis der ikke er en sådan løsning til (6), da bør det betragtede forstærkningsforslag ikke bringes til udførelse. Dette udelukker ikke, at en alternativ udformning af forstærkningen bør udføres.

Hvis  $\beta_{a \text{ posteriori}}$  er betydelig mindre end  $\beta_{krævet}$ , kan den bedste beslutning vise sig at være at vælge en handling fra den tredje kategori, dvs nedrivning med efterfølgende opførelse af en ny konstruktion. Lad  $c_{nedrivning}$  være den optimale omkostning for en nedrivning og lad  $\beta_{krævet}$  være det optimale sikkerhedsindeks for den nye konstruktion med den tilhørende optimale kapitalinvestering  $c_{ny}$ . Vi kan da slutte, at en handling af tredje kategori ikke er optimal, hvis kriteriet



Figur 13.10. Illustration af forventet omkostningskurve for forstærkning. For kurven 1 er den korrekte beslutning at iværksætte en forstærkning. For kurven 3 er den korrekte beslutning ikke at anvende den betragtede udformning af forstærkningen. Kurven 2 viser indifferens. Der findes da formodentlig en alternativ forstærkningsudformning, der må foretrækkes frem for at lade konstruktionen uændret. (Kurverne er skematiske).

$$c_{nedrivning} + c_{ny} + (d+c_{ny}) \Phi(-\beta_{krævet}) >$$

$$(d+c_{ny}) \Phi(-\beta_{a \text{ posteriori}}) \quad (8)$$

er opfyldt. Højre side af (8) er den forventede omkostning ved at lade den eksisterende konstruktion være uændret. Sædvanligvis er  $c_{nedrivning} \ll c_{ny}$ , således at  $c_{nedrivning}$  med rimelighed kan negligeres i det følgende. Man kan da omskrive (8) til kriteriet

$$\Phi(-\beta_{a \text{ posteriori}}) < \Phi(-\beta_{krævet}) + \frac{1}{1+d/c_{ny}} \quad (9)$$

Samfundet vil næppe tillade en anvendelse af dette kriterium, med mindre højre side definerer en tilpas lille sandsynlighedsgrænse. Heraf ses, at samfundet må kræve, ikke blot at  $d$  er stor, men også at

$$\frac{d}{c_{ny}} \gg 1 \quad (10)$$

Dette er i overensstemmelse med betragtningerne i eksempel 12.1 vedrørende størrelsen af  $d$ . Vi fandt, at  $c_{ny}/d$  er af størrelsesorden  $10^{-3}$  (for  $\beta_{krævet} = 4$ ) til  $10^{-5}$  (for  $\beta_{krævet} = 5$ ), som er af størrelsesorden  $10^2$  gange større end det første led  $\Phi(-\beta_{krævet})$  på højre side af (9). Vi kan altså alt i alt reducere (9) til kriteriet

$$\beta_{a \text{ posteriori}} > \Phi^{-1} \left[ \frac{c_{ny}}{d} \right] \quad (11)$$

for ikke at foretage nedrivning og fuldstændig fornyelse. Det bemærkes, at bortkastningen af  $c_{nedrivning}$  og  $\Phi(-\beta_{krævet})$  i reduktionen fra (8) til (11) er på den sikre side i retning af at begunstige nedrivning. Hvis (11) ikke er opfyldt, står valget mellem forstærkning af den eksisterende konstruktion eller total fornyelse. Hvis (11) er opfyldt, står valget mellem at lade konstruktionen være uforandret eller at forstærke den.

Vi slutter med at vise, at kriteriet (2) er en i praksis tilstrækkelig nøjagtig

betingelse for intet at gøre ved den eksisterende konstruktion efter opdateringen af sikkerheden. Lad  $k_{\min}$  være den mindste værdi af  $k$ , der forekommer for de forstærkningssystemer, der i den givne praktiske situation kan komme på tale. Det er da klart, at intet af disse forstærkningssystemer opfylder kriteriet (7), såfremt det gælder, at

$$k_{\min} \geq (d+c_{ny}) \Phi(-\beta_{a \text{ postiori}}) \quad (12)$$

Denne betingelse er altså et kriterium for intet at gøre. Det ses da, at hvis det gælder, at

$$k_{\min} \geq (d+c_{ny}) \Phi(-\beta_{krævet}) \quad (13)$$

da er

$$\beta_{a \text{ postiori}} \geq \beta_{krævet} \quad (14)$$

et kriterium for intet at gøre. Da højre side af (13) efter division med  $c_{ny}$  som ovenfor bemærket er af størrelsesorden  $10^{-3}$ , kan (13) skønnes at være opfyldt næsten med sikkerhed. Praktiske tilfælde med  $k_{\min}/c_{ny}$  af lavere størrelsesorden end  $10^{-3}$  vil næppe forekomme ofte. Vi kan derfor konkludere, at det simple kanoniske beslutningskriterium (14) i praksis er konsistent med optimal beslutningstagen.

En redegørelse, der medtager sandsynlighederne for fejltagelser, er givet i [13.1]. Kriterierne (11) og (14) ændres ikke herved. Den eneste modifikation, der kan have nogen betydning for valget af handling, forekommer i uligheden (7). Her skal i den kantede parentes tilføjes et led, der er differensen mellem  $p_0 = P(\text{svigt og fejltagelser for den uændrede konstruktion})$  og  $p_1 = P(\text{svigt og fejltagelser for den forstærkede konstruktion})$ , se afsnit 12.6. Dette led,  $p_0 - p_1$ , kan skønnes at være negativt, fordi  $p_0$  er en a posteriori sandsynlighed svarende til, at man til rådighed har den information, at konstruktionen har overlevet indtil nu. Denne kendsgerning gør det rimeligt at antage, at man kan se bort fra forekomsten af nogle af de mulige og mere alvorlige fejltagelser, der kunne være blevet gjort under opførelse og brug af den eksisterende konstruktion.

sterende konstruktion. Der kan imidlertid stadig være skjulte fejltagelser knyttet til den eksisterende konstruktion, og disse kan blive suppleret med fejltagelser knyttet til udførelsen af forstærkningen. Dette trækker i retning af forøgelse af sandsynligheden for fejl i den forstærkede konstruktion. På den anden side kan forstærkningen formindske den sikkerhedsmæssige alvorlighed af eventuelle skjulte fejl ved den eksisterende konstruktion. Alt i alt synes det dog rimeligt at antage, at  $p_1 \geq p_0$ . Det betyder, at højre side af (7) bliver mindre, altså en ændring i retning af ikke at udføre forstærkningen.

### 13.4 Opdatering ved revision af grænsetilstanden

Ved opdateringen af en eksisterende konstruktions sikkerhed fås undertiden den største virkning ved at revidere den ved projekteringen benyttede matematiske model for det verbalt formulerede grænsetilstandskrav. Dette er specielt relevant, hvis der ved projekteringen er anvendt en grænsetilstandsmodel, der er "på den sikre side". I kapitel 3 er det blevet vist, hvorledes der kan tages hensyn til modelusikkerhed i sikkerhedsanalysen både med hensyn til manglende middelværdikorrektthed af grænsetilstandsfladens beliggenhed og med hensyn til variation omkring middelværdien i en omegn af det globalt mest centrale punkt på grænsetilstandsfladen. Den praksis at anvende modeller, der er "på den sikre side", indebærer, at der ved projekteringen ikke korrigeres for at opnå middelværdikorrektthed, og at der som oftest ses bort fra modelusikkerhed knyttet til den anvendte model. En sådan "på den sikre side" fremgangsmåde er naturligvis ikke uden videre optimal, selvom overvejelser om investering af tid i konstruktionsanalysen trækker i retning af simpelhed. Ikke desto mindre er det og har det været en udbredt praksis og naturligvis i højere grad så for ældre bygværker, der er blevet projekteret med meget primitive regnetekniske hjælpemidler.

For "på den sikre side"-projekterede konstruktioner vil en ændring af grænsetilstandsfladen ved brug af en mere detaljeret og middelværdikorrekt matematisk model, der afspejler det verbalt formulerede grænsetilstandskrav, føre til en udvidelse af den sikre mængde og dermed til en forøgelse af den beregnede sikkerhed. I modsat retning trækker naturligvis den nødvendige hensyntagen til modelusikkerhed.

Man må ved anvendelse af konsekvensberegningssprincippet til kalibrering

af forskellige normer mod hinanden være opmærksom på det her omtalte forhold. Hvis givne sikkerhedselementer (sikkerhedsfaktorer, partialkoefficienter, karakteristiske værdier etc) er knyttet til specificerede grænsetilstandsflader, der er på den sikre side (eller måske endog på den usikre side), må der ved kalibreringen tages omhyggeligt hensyn hertil, således at væsentlige "skjulte sikkerheder" inddrages på korrekt vis i konsekvensberegningerne.

### 13.5 Historiske og bibliografiske noter

Inden for de sædvanlige deterministiske metoder for dimensionering efter partialkoefficientmetoden er det meget vanskeligt om ikke umuligt på en rationel måde at inddrage ny information, som beskrevet i dette kapitel. Det er derfor ikke mærkeligt, at praktiske anvendelser af probabilistiske metoder i disse år vinder indpas for vurdering af eksisterende konstruktioner. Det kan således bemærkes, at inspektion for udmattelsesrevner i alle de danske offshore konstruktioner nu er baseret på planer, der tager sit udgangspunkt i de i dette kapitel beskrevne modeller for revnevækst og inspektion, [13.5].

De beregningsmæssige problemer blev løst i forbindelse med udviklingen af FORM for parallelsystemer. *HOM* [13.3] og *R. Rackwitz et al* [13.6] har i 1985 givet de første resultater i denne retning. En mere fuldstændig beskrivelse af givet af *HOM* i 1987 [13.4].

Det må forventes, at probabilistiske metoder vil blive anvendt i stor udstrækning for eksisterende konstruktioner i fremtiden, og større anvendelser for brokonstruktioner er undervejs både i USA og Europa.

### Referencer

- 13.1 O. Ditlevsen and T. Arnbjerg-Nielsen: Decision Rules in Re-evaluation of Existing Structures. *Proceedings of DABI Symposium on Re-evaluation of Concrete Structures*. (eds.: S. Rostam and M.W. Bræstrup). Danish Concrete Institute, 1989.
- 13.2 H.O. Madsen and Z.P. Bazant: Uncertainty Analysis of Creep and Shrinkage Effects in Concrete Structures. *American Concrete Institute Journal*, vol.80, 1983.

- 13.3 H.O. Madsen: Random Fatigue Crack Growth and Inspection. In *Structural Safety and Reliability*, Proceedings of ICOSSAR 85, Kobe, Japan, IASSAR, vol.1, 1985.
- 13.4 H.O. Madsen: Model Updating in Reliability Theory. In *Reliability and Risk Analysis in Civil Engineering*, Proceedings of ICASP 5, N.C.Lind (ed.), Institute for Risk Research, University of Waterloo, vol.1, 1987.
- 13.5 H.O. Madsen et al: Probabilistic Fatigue Crack Growth Analysis of Offshore Structures, with Reliability Updating Through Inspection. In *Proceedings of Marine Structural Reliability Symposium*, SNAME 54-23, Oct. 1987.
- 13.6 R. Rackwitz and K. Schrupp: Quality Control, Proof Testing and Structural Reliability. *Structural Safety*, vol.2, 1985.

## 14. SYSTEMSIKKERHEDSANALYSE

### 14.1 Seriesystemer og parallelsystemer

Systemsikkerhedsanalyse vedrører formulering af grænsetilstand og beregning af svigtsandsynlighed, når konstruktionen kan svigte på flere måder. Matematisk set har vi at gøre med systemsikkerhedsanalyse, såfremt grænsetilstandsfladen er sammensat af flere stykker, der almindeligvis møder hinanden i mængder af singulære punkter, dvs punkter hvor grænsetilstandsfladen ikke er differentiabel. Hvert af disse stykker vil almindeligvis være en del af en grænsetilstandsflade for en bestemt total svigtmåde eller for et lokalt svigt. Et eksempel på et lokalt svigt er brud i et overtalligt konstruktionselement.

Vi har tidligere beskæftiget os indgående med seriesystemer, dvs systemer, hvor den totale svigthændelse kan skrives som

$$\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{F}_i \quad (1)$$

hvor  $\mathcal{F}_i$  er svigthændelsen svarende til den  $i$ .te svigtmåde. Det mest almindelige eksempel er en statisk bestemt konstruktion opbygget af flere elementer. Hvis blot et af disse elementer svigter, mister konstruktionen sin bæreevne, eksempel 6.3. Et andet eksempel er en rammekonstruktion af stift-idealplastisk materiale. Hver mekanisme er da en mulig svigtmåde, eksempel 6.4. Et seriesystem betegnes ofte som et "svageste led" system.

Vi har også tidligere beskæftiget os med parallelsystemer, dvs systemer hvor den totale svigthændelse kan skrives som

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^m \mathcal{F}_i \quad (2)$$

Her skal samtlige elementer svigte, før et totalt svigt er indtrådt. Parallelsystemer er hyppigst optrædende som elementer i et seriesystem. For en statisk ubestemt konstruktion med flere svigtmåder fremkommer en del af de enkelte svigtmåder først, efter at flere konstruktionselementer er svigtet. I en

statisk ubestemt stift-idealplastisk rammekonstruktion skal der således dannes flere flydede, før en mekanisme kan opstå.

### 14.2 Vilkårlige systemer. Afbrydningsmængder og forbindelsesmængder \*

Seriesystemer og parallelsystemer er de to grundlæggende systemtyper, hvoraf et vilkårligt system er opbygget. Det gælder således, at et vilkårligt system kan repræsenteres både som et seriesystem af parallelsystemer og som et parallelsystem af seriesystemer. For at indse dette kan vi antage, at der er  $m$  forskellige potentielle lokale svigtmåder, som i bestemte kombinationer forårsager totalt svigt. Vi kan da opdele hele  $\mathbb{R}^n$  i de  $2^m$  disjunkte delmængder

$$\mathcal{F}_{i_1} \cap \mathcal{F}_{i_2} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{i_k} \cap \mathcal{F}_{i_{k+1}} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{i_m} \quad (1)$$

hvor  $k = 0, 1, \dots, m$  og  $i_1, \dots, i_k$  er  $k$  forskellige indices udtaget blandt  $1, 2, \dots, m$ , medens  $i_{k+1}, \dots, i_m$  er de tiloversblevne indices. Totalsvigt mængden  $\mathcal{F}$  er naturligvis foreningsmængden af alle de mængder blandt mængderne (1), der svarer til totalt svigt. Vi vil benytte den egenskab, at hvis (1) er en delmængde af totalsvigt mængden, da er enhver af de mængder, der fremkommer ved at erstatte en eller flere af de sikre mængder  $\mathcal{F}_{i_{k+1}}, \dots, \mathcal{F}_{i_m}$  med de tilsvarende svigt mængder blandt  $\mathcal{F}_{i_{k+1}}, \dots, \mathcal{F}_{i_m}$ , også delmængder af totalsvigt mængden (et svigtet system kommer naturligvis ikke i en sikker tilstand ved, at endnu flere elementer svigter). Ved at forene alle disse mængder fremkommer mængden  $\mathcal{F}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{i_k}$ , og vi har altså, at

$$\mathcal{F} = \bigcup (\mathcal{F}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{i_k}) \quad (2)$$

hvor foreningsmængdedannelsen er over alle fællesmængder af formen  $\mathcal{F}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{i_k}$ , der er delmængder af  $\mathcal{F}$ . Hermed er systemet repræsenteret som et seriesystem af parallelsystemer. Det bemærkes, at medens fællesmængderne (1) er disjunkte, da gælder dette ikke nødvendigvis for fælles-

mængderne i (2). Vi kan yderligere erstatte hver af disse fællesmængder med en fællesmængde  $\mathcal{F}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{j_q}$ , der tilfredsstiller betingelsen

$$\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{j_q} \supset \mathcal{F}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{i_k} \quad (3)$$

hvor  $q \leq k$  og  $\{j_1, \dots, j_q\} \subset \{i_1, \dots, i_k\}$ . Enhver af indeksmængderne  $\{j_1, \dots, j_q\}$ , der tilfredsstiller (3), kaldes en afbrydningsmængde ("cut set"). Specielt kan vi vælge  $q$  som det mindste antal, for hvilket (3) gælder. Indeksmængden  $\{j_1, \dots, j_q\}$  siges da at være en minimal afbrydningsmængde ("minimal cut set"). Vi kan altså skrive (2) som

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\text{ma}} (\mathcal{F}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{F}_{j_q}) \quad (4)$$

hvor ma antyder, at foreningsmængden tages over mængden af minimale afbrydningsmængder blandt delmængderne til  $\{1, \dots, m\}$ .

Den sikre mængde  $\mathcal{S}$  med hensyn til totalt svigt er komplementærmængden til totalsvigtmængden  $\mathcal{F}$ , og  $\mathcal{S}$  er foreningsmængden af alle de mængder blandt mængderne i (1), der ikke svarer til svigt. Vi kan nu fremsætte nøjagtig de samme argumenter, der ledte til (2), (3) og (4), med symbolet  $\mathcal{F}$  erstattet i alle udtryk med symbolet  $\mathcal{S}$  og omvendt og med ordet "total-svigtmængde" erstattet alle steder med ordene "sikre mængde med hensyn til totalt svigt" og omvendt. Specielt skal sætningen i parentes i teksten lige over (2) gives ordlyden: "et ikke svigtet system kommer naturligvis ikke i en svigttilstand ved, at endnu flere elementer ændres fra svigtet til ikke svigtet tilstand".

Svarende til (2) får vi altså, at

$$\mathcal{S} = \bigcup (\mathcal{S}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{S}_{i_k}) \quad (5)$$

der ved overgang til komplementærmængder giver (Morgans regel):

$$\mathcal{F} = \bigcap (\mathcal{F}_{i_1} \cup \dots \cup \mathcal{F}_{i_k}) \quad (6)$$

Dette viser, at systemet også kan repræsenteres som et parallelsystem af seriesystemer. Vi kan foretage en yderligere reduktion af (6) svarende til reduktionen fra (2) til (4). Med  $\mathcal{S}$  i stedet for  $\mathcal{F}$  i (3) fremkommer

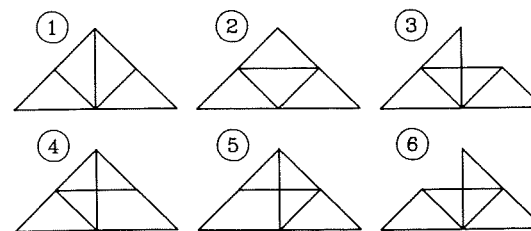
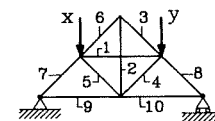
$$\mathcal{S} \supset \mathcal{S}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{S}_{j_q} \supset \mathcal{S}_{i_1} \cap \dots \cap \mathcal{S}_{i_k} \quad (7)$$

hvor  $q \leq k$  og  $\{j_1, \dots, j_q\} \subset \{i_1, \dots, i_k\}$ . Enhver af indeksmængderne  $j_1, \dots, j_q$ , der tilfredsstiller (7), kaldes en forbindelsesmængde ("tie set"). Specielt kan vi vælge  $q$  som det mindste antal, for hvilket (7) gælder. Indeksmængden  $\{j_1, \dots, j_q\}$  siges da at være en minimal forbindelsesmængde ("minimal tie set"). Vi har herefter, at (6) kan reduceres til

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\text{mf}} (\mathcal{F}_{j_1} \cup \dots \cup \mathcal{F}_{j_q}) \quad (8)$$

hvor mf antyder, at fællesmængden tages over mængden af minimale forbindelsesmængder blandt delmængderne til  $\{1, \dots, m\}$ .

Det skal fremhæves, at indeksmængderne  $\{j_1, \dots, j_q\}$  er forskellige i (4) og i (8). Terminologierne "afbrydningsmængde" og "forbindelsesmængde" er låneord fra teorien for elektriske systemer. Svigt af systemet svarer til, at alle forbindelser er afbrudt, medens funktionering af systemet svarer til, at mindst een af forbindelserne virker.



Figur 14.1. Geometrisk een gang overbestemt gitterkonstruktion og tilhørende 6 geometrisk bestemte gitterkonstruktioner, der svarer til de 6 minimale forbindelsesmængder, der bevarer geometrisk bestemthed.

**Eksempel 14.1** Den i figur 14.1 viste gitterkonstruktion med krydsende diagonaler 1 og 2 er een gang geometrisk overbestemt (= een gang statistisk ubestemt). Ved fjernelse af een af stængerne 2, 3, 7, 8, 9, 10 fås en geometrisk bestemt (=statisk bestemt) konstruktion.

De tilsvarende 6 geometrisk bestemte gittersystemer er også vist i figur 14.1. Fjernelse af endnu en stang vil bevirke, at konstruktionen bliver geometrisk underbestemt, dvs den bliver bevægelig. Der er altså ialt 6 minimale forbindelsesmængder:

$$\begin{aligned} & \{2,3,4,5,6; 7,8,9,10\} \\ & \{1,3,4,5,6; 7,8,9,10\} \\ & \{1,2,4,5,6; 7,8,9,10\} \\ & \{1,2,3,5,6; 7,8,9,10\} \\ & \{1,2,3,4,6; 7,8,9,10\} \\ & \{1,2,3,4,5; 7,8,9,10\} \end{aligned} \quad (9)$$

Disse minimale forbindelsesmængder repræsenterer gittersystemet med hensyn til geometrisk bestemthed som et parallelsystem med 6 parallelle elementer. Hver af disse elementer er et seriesystem med 9 elementer.

En afbrydningsmængde med hensyn til geometrisk bestemthed fås ved at vælge et og kun et element fra hver af de minimale forbindelsesmængder. Da stangnumrene 7, 8, 9, 10 indgår i alle de minimale forbindelsesmængder, fås de 4 minimale afbrydningsmængder  $\{7\}$ ,  $\{8\}$ ,  $\{9\}$ ,  $\{10\}$  med kun 1 element i hver. Hver af de resterende 6 stangnumre 1, 2, 3, 4, 5, 6, indgår i 5 af de 6 minimale forbindelsesmængder. Alle øvrige minimale afbrydningsmængder har altså 2 elementer, og de optræder i identiske par, når hver af de 6 stangnumre tages sammen med hver af de 5 resterende stangnumre. Der er altså  $5 \cdot 6/2 = 15$  minimale afbrydningsmængder med 2 stangnumre i hver:

$$\begin{aligned} & \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \\ & \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\} \\ & \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\} \end{aligned} \quad (10)$$

Disse ialt 19 minimale afbrydningsmængder repræsenterer gittersystemet som et seriesystem med 19 elementer, hvoraf de 15 elementer er parallelsystemer med 2 parallelle elementer.  $\square$

**Bemærkning 14.1** I eksempel 14.1 blev der ikke inddraget betragtninger vedrørende svigt eller ikke svigt af de enkelte gitterstænger i afhængighed af deres styrker og de ydre laster på gitteret. Der var alene tale om systemsvigt defineret som geometrisk underbestemthed. Selvom betragtninger herover kan være nyttige ved den statistiske analyse, er de mindre relevante for sikkerhedsanalysen.

Hvis eksempelvis alle gitterstænger er lineærelastiske og idealskøre (hvormed menes, at snitkraften i en stang falder brat til nul, når den overskrider stangstyrken), vil det afhænge af lasthistorien, hvilken stang der bryder først. Man kan endog have en sådan fordeling af stangstivheder og stangstyrker i gitteret i figur 14.1, at det vil være stang 1, der bryder først, ligegyldigt hvordan lasterne  $x$  og  $y$  varierer inden for det positive område. Herefter omlejrer snitkræfterne sig straks til den statisk bestemte løsning, der svarer til system 1. Styrkerne af stængerne 2 til 6 kan imidlertid være sådan, at snitkræfterne efter omlejring overskrider styrkerne i en eller flere af stængerne, således at gittersystemet bryder sammen ved denne snitkraftomlejring. Ingen af de forbindelsesmængder, der blev formuleret i eksempel 14.1, har altså i så tilfælde sikkerhedsmæssig relevans. Det er alene stang 1, der bestemmer systemets sikkerhed.

Lineærelastiske konstruktionssystemer med idealskøre svigtelementer vil blive behandlet i afsnit 14.5.  $\square$

### 14.3 Grænsetilstandsdefinitionens afhængighed af inputvariablenes tidsudvikling

Gitterkonstruktionseksemplet (bemærkning 14.1) antyder, at der for konstruktive systemer kan opstå betydelige vanskeligheder med den matematiske formulering af grænsetilstanden for det bærende system. Disse vanskeligheder opstår specielt, når grænsetilstanden defineres således, at den svarer til tab af konstruktionens bæreevne efter forudgående gradvis nedbrydning af konstruktionen ved svigt af statistisk overtallige dele af denne.

Den gradvise nedbrydning afhænger af forhold, som ikke er entydigt fastlagt ved den blotte angivelse af udfaldet af den stokastiske inputvektor  $X = (X_1, \dots, X_n)$ . I de foregående kapitler er der set bort herfra, da det intet sted er angivet, hvorledes  $X_1, \dots, X_n$  får tillagt værdier ved konstruktionens

virkeliggørelse. Lasthistoriens detaljerede forløb kan imidlertid have afgørende betydning for definitionen af grænsetilstanden.

Virkelighedens konstruktion har en tilblivelsesperiode, hvorunder inputvariablenes værdier ændrer sig gradvist. Efter at konstruktionen er færdiggjort og taget i brug, ændrer konstruktionens laster sig systematisk og/eller tilfældigt gennem hele brugstiden. Den på forskellige stadier af færdiggørelse værende konstruktion kan naturligvis sikkerhedsanalyseres ved de beskrevne metoder. De kræver jo kun, at der er defineret en sikker mængde  $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$  og en sandsynlighedsfordeling for  $\mathbf{X}$ . Ud over modelleringen af disse objekter består sikkerhedsanalysen i at udregne sandsynligheden for at  $\mathbf{X} \in \mathcal{S}$ . Ved brug af en sammenligningsstandard vurderes derefter, om konstruktionen er tilstrækkelig sikker.

Sikkerhedsanalysen kan uden introduktion af nye begreber formuleres på en sådan måde, at den på en gang omfatter forholdene, som de systematisk eller tilfældigt udvikler sig gennem en række på forhånd fastlagte tidspunkter  $t_1, t_2, \dots, t_m$  valgt i byggeperiode og brugsperiode. Konstruktionens sikkerhed vurderes derved på basis af sandsynligheden for hændelsen

$$\{\mathbf{X}(t_1) \in \mathcal{S}(t_1)\} \cap \dots \cap \{\mathbf{X}(t_m) \in \mathcal{S}(t_m)\} \quad (1)$$

hvor  $\mathbf{X}(t_i)$  er den stokastiske vektor af inputvariable til tiden  $t_i$ , og  $\mathcal{S}(t_i) \subset \mathbb{R}^n$  er den til tiden  $t_i$  svarende sikre mængde. I mange situationer kan de sikre mængder  $\mathcal{S}(t_1), \dots, \mathcal{S}(t_m)$  defineres uafhængigt af udfaldene af  $\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_m)$ . Med en veldefineret sandsynlighedsfordeling for den  $n \times m$ -dimensionale stokastiske vektor  $(\mathbf{X}(t_1), \dots, \mathbf{X}(t_m))$  skal da blot udregnes sandsynlighedsindholdet i den sikre mængde  $\mathcal{S}(t_1) \times \dots \times \mathcal{S}(t_m)$ . I de foregående kapitler har vi flere gange set eksempler på dette specielle tilfælde, nemlig eksemplerne med uafhængige udskiftninger af laster. FBC-lastmodellen i kapitel 10 er direkte formuleret med denne specielle tidsmæssige behandling for øje. I disse simple anvendelser har den sikre mængde været konstant i tiden, og der har været en åbenbar definition af en ekstrem skalær lastvirkning gennem den betragtede tidsperiode.

Problemerne bliver betydeligt vanskeligere, hvis den sikre mængde  $\mathcal{S}(t)$  i sin udvikling i tiden er afhængig af den forløbne udvikling af udfaldet af

inputvektoren  $\mathbf{X}(t)$ . Lad os se på en vilkårlig statisk ubestemt gitterkonstruktion, hvor stængerne inklusive samlingerne opfører sig lineærelastisk op til en brudværdi, der er stokastisk varierende fra stang til stang og måske forskellig for træk og tryk. Gitterkonstruktionen udsættes for et sæt af stokastiske laster, som ved styring gennem en lastniveaufaktor  $\lambda$ , der vokser fra 0 til 1, tænkes påført proportionalt voksende fra nul og til de endelige stokastiske værdier, der er blevet udtrukket fra en given fordeling. Ved en elasticitetsteoretisk beregning kan snitkræfterne bestemmes entydigt i samtlige stænger som funktion af lastniveaufaktoren  $\lambda$ . Hvis  $\lambda$  kan nå værdien 1, uden at der fremkommer brud i nogen stang, er vektoren af inputvariable et punkt i den sikre mængde. Det kan imidlertid hændes, at en eller flere overtallige stænger bryder, inden  $\lambda$  når op til værdien 1, men at konstruktionen med disse overtallige stænger fjernet har snitkræfter, der alle er under de respektive brudværdier. Den beskadigede konstruktion kan altså stadig bære lasten, og hvis denne egenskab er det verbalt formulerede grænsetilstandskrav, da er vektoren af inputvariable også i denne situation et punkt i den sikre mængde.

Under den gjorte forudsætning om proportional oplastning er der altså en veldefineret grænsetilstandsflade i rummet af inputvariable. Fladen kan være yderst kompliceret, fordi den afhænger af den rækkefølge, hvori de overtallige stænger brydes. Dette hænger sammen med den omfordeling af snitkræfterne, der finder sted efter hvert stangbrud, og som kan forårsage en kaskade af stangbrud, hvori rækkefølgen er betydende for den tilstand, konstruktionen sluttelig vil befinde sig i.

Hvis der kan forekomme lasthistorier, der ikke er entydigt fastlagt ved sættet af inputvariable  $\mathbf{X}$ , bliver grænsetilstandsfladen i  $\mathbf{x}$ -rummet imidlertid ikke nødvendigvis entydigt fastlagt. Man kan opfatte sådan flertydighed som modelusikkerhed. På grund af problemets komplicerede natur er det ikke let på grundlag af teoretiske overvejelser at kvantificere denne modelusikkerhed med en repræsentation efter de i kapitel 3 anførte principper for øje.

Flertydigheden af grænsetilstandsfladen, når den formuleres i det rum, der svarer til inputvariablene hørende til alle de indlagte diskrete tidspunkter, kommer naturligvis fra den uspecificerede variation af inputvariablene mellem de udvalgte tidspunkter. Med en specificeret variation bliver grænsetilstandsfladen entydig. Herved udelukkes der muligheder for, at der kan optræ-



de svigt på grund af variationerne mellem de udvalgte tidspunkter. En konsistent udvidelse af den tidsdiskretiserede model ved medtagning af flere tidspunkter vil derfor give en stigende svigtsandsynlighed. For at komme ud af dette problem må man ty til teorien for stokastiske processer. Denne teori giver mulighed for i princippet at formulere en sikkerhedsanalyse, der ikke nødvendigvis diskretiserer tiden og rummet. Den procesbaserede sikkerhedsanalyse, der vil blive indledende behandlet i næste kapitel, giver dog selv i de simpleste eksempler kun få muligheder for eksakte bestemmelser af svigtsandsynligheden. Den fører imidlertid til en generel formulering af en øvre grænse til svigtsandsynligheden.

#### 14.4 "Nøddefinitioner" af den sikre mængde

Vanskelighederne med at inddrage lasthistoriens indflydelse på definitionen af den sikre mængde viser sig i litteraturen om sikkerhedsanalyse af generelle konstruktionssystemer ved forskellige ofte uklare forslag til "nøddefinitioner". Dette ord bruges her, fordi tidsudviklingen enten slet ikke er taget i betragtning, eller, når den hævdes at være taget i betragtning, da ofte på grundlag af vage forestillinger om, at den definerede sikre mængde nogenlunde svarer til proportional oplastning fra nul.

Mest almindeligt ses systemsvigtdefinitioner, der er implicit givet gennem et regneskema, en algoritme, der i sig har et svigtrækkefølgebegreb, som uden holdbar begrundelse påstås at efterligne en proportional opvoksen af lasterne. Den følgende nøddefinition synes således at være almindeligt benyttet i mange regneprogrammer.

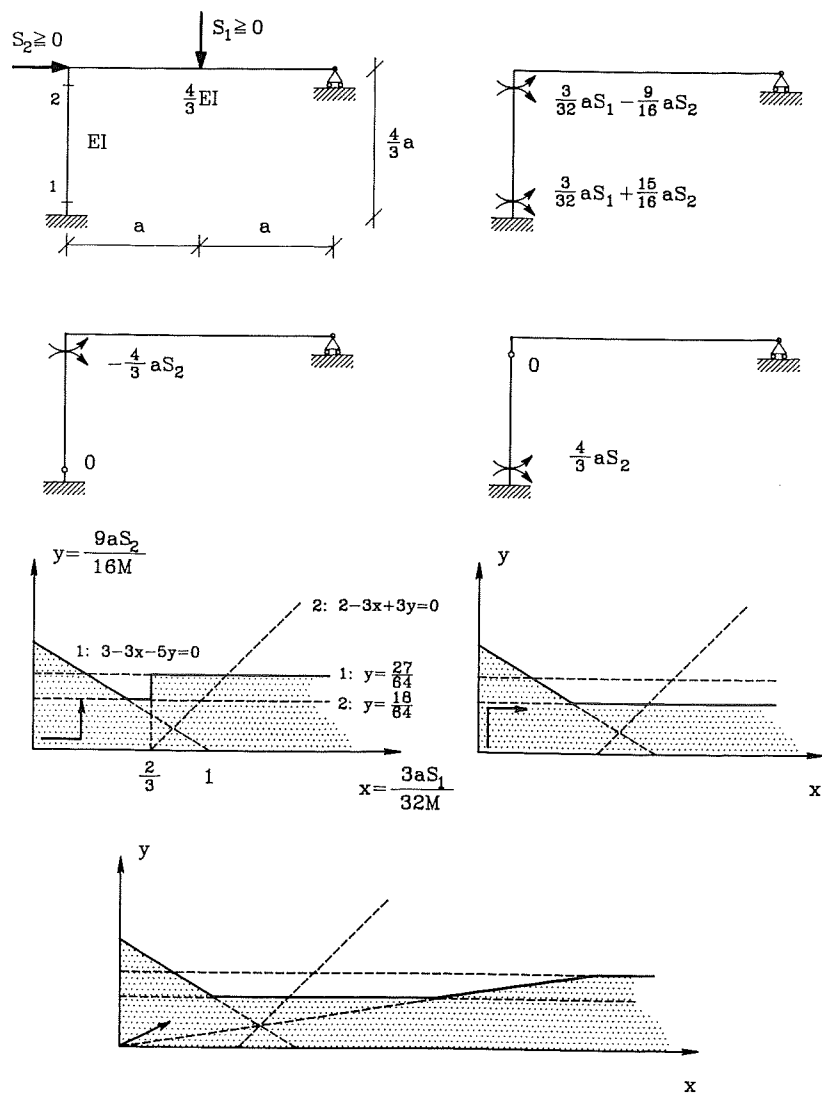
Antag, at der er  $q$  potentielle svigtelementer i konstruktionen og betragt de  $q!$  forskellige ordnede mængder af svigtelementer. Til hver af disse ordnede mængder svarer en ordnet mængde af konstruktionsmodeller, således at de ved deres orden modellerer en konsistent fremadskridende beskadigelse af den oprindelige konstruktion. Hver model i den ordnede mængde har netop eet svigtet element mere end dens umiddelbart foranstående model.

Lad nu  $x$  være en værdi af inputvektoren. Først betragtes basismodellen, dvs modellen af den ubeskadigede konstruktion, der antages at være lineær-elastisk. Den er derfor fuldstændigt defineret ved  $x$ . Hvis der findes en stabil ligevægtstilstand, og grænsetilstanden ikke er overskredet for det første

svigtelement i den betragtede ordnede mængde  $S$  af svigtelementer, da siges konstruktionen for det givne  $x$  at være statistisk stabil i  $S$ . I modsat fald ændrer vi de lineærelastiske egenskaber af det første svigtelement i  $S$  til de efter svigt gældende konstitutive egenskaber. Ofte simulerer man disse egenskaber ved simpelt hen at erstatte det svigtede element med et system af "ækvivalente" ydre kræfter med faste værdier, der svarer til det svigtede elements restbæreevne (nul for idealskørt svigt, flydestyrken for idealplastisk svigt). En statistisk analyse gennemføres derefter for denne første model i den ordnede mængde af modeller. Hvis der findes en stabil ligevægtstilstand, og grænsetilstanden for det andet svigtelement ikke er overskredet, da siges konstruktionen for det givne  $x$  at være statistisk stabil i  $S$ . I modsat fald ændres det andet svigtelement efter de samme principper, som blev anvendt for det første svigtelement. Herved defineres anden model i den ordnede mængde af modeller, hvorefter den statistiske beregning gennemføres som for den første model. Rekursiv beregning og modellering på denne måde afslører enten, at konstruktionen for det givne  $x$  er statistisk stabil i  $S$ , eller at en af modellerne i den ordnede følge udviser statistisk ustabilitet, hvilket naturligvis senest sker for den  $q$ te model.

På basis af denne modeldannelse kan der formuleres følgende nøddefinition af en sikker mængde: Punktet  $x$  siges at tilhøre den sikre mængde for konstruktionen, hvis og kun hvis konstruktionen for  $x$  er statistisk stabil i alle de  $q!$  forskellige ordnede mængder af svigtelementer. Den herved definerede mængde vil vi betegne *den sekventielle stabilkonfigurationsmængde*, og den er naturligvis en delmængde og ofte en ægte delmængde af foreningsmængden af de sikre mængder med hensyn til slutlasten for alle delkonstruktioner, der ikke er bevægelige. Denne foreningsmængde vil vi betegne *stabilkonfigurationsmængden*. For gitteret i eksempel 14.1 er stabilkonfigurationsmængden lig med foreningsmængden af den sikre mængde med hensyn til første stangsvigt og de seks sikre mængder, der svarer til de seks statistisk bestemte delkonstruktioner.

**Eksempel 14.2** Figur 14.2 viser en simpel lineærelastisk rammekonstruktion med de påskrevne bjælkestivheder og med to potentielle svigtelementer koncentreret i punkterne 1 og 2. Svigtelementerne er idealskøre med momentbrudstyrker  $\pm M$  i punkt 1 og  $\pm 2M/3$  i punkt 2. Efter svigt bliver punkterne



Figur 14.2. Illustration af lastvejens betydning for definitionen af den sikre mængde for en lineærelastisk-idealskør rammekonstruktion.

ændret til momentfrie punkter (charniers). Eksemplet (taget fra [14.4,9]) er velegnet til illustration af lasthistoriens indflydelse på den sikre mængde. Det er desuden et modeksempel på den intuitive påstand om, at den sekventielle stabilkonfigurationsmængde svarer til proportional oplastning.

Bøjningsmomenterne i de intakte svigtelementer er vist på rammen øverst til højre. Næste række af tegninger viser bøjningsmomenterne efter svigt i henholdsvis punkt 1 og punkt 2. De efterfølgende tre  $(x,y)$ -koordinatsystemer viser de sikre mængder svarende til de ved pile angivne lasthistorier (lastveje). I alle tre tilfælde er indtegnet grænsetilstanden for de to svigtelementer før og efter første svigt i enten punkt 1 eller punkt 2. Svigtmængden i det første koordinatsystem svarer til, at  $S_1$  påføres først til sin endelige værdi, hvorefter  $S_2$  påføres til sin endelige værdi. I det andet koordinatsystem påføres  $S_2$  først til sin endelige værdi, hvorefter  $S_1$  påføres. I det tredje koordinatsystem påføres  $S_1$  og  $S_2$  samtidig ved proportional oplastning fra nul. Alle tre sikre mængder ses at være ægte delmængder af stabilkonfigurationsmængden. Denne er jo ifølge sin definition lig med foreningsmængden  $\{3 - 3x - 5y > 0, 2 - 3x + 3y > 0\} \cup \{y < \frac{27}{64}\} \cup \{y < \frac{18}{64}\} = \{3 - 3x - 5y > 0, y < \frac{27}{64}\}$ , som begrænses af grænsetilstandslinierne svarende til punkt 1. (Vi har for kortheds skyld brugt notationen {udsagn} for mængden  $\{(x,y) | \text{udsagn}\}$ , da der næppe kan opstå misforståelser herved).

For at bestemme den sekventielle stabilkonfigurationsmængde ser vi på de ialt 2 ordnede mængder  $\{1,2\}$  og  $\{2,1\}$  af svigtelementer. Mængden af de punkter  $(x,y)$ , for hvilke konstruktionen er statisk stabil i henholdsvis den ordnede mængde  $\{1,2\}$  og  $\{2,1\}$  af elementsvigt, er henholdsvis  $\{3 - 3x - 5y > 0\} \cup \{y < 18/64\}$  og  $\{2 - 3x + 3y > 0\} \cup \{y < 27/64\}$ , hvor den første mængde er en ægte delmængde af den anden mængde. Fællesmængden af de to er den sekventielle stabilkonfigurationsmængde, og altså den første mængde. Den ses at være identisk med den i det andet koordinatsystem viste sikre mængde, og den ses at være forskellig fra den sikre mængde, der svarer til proportional oplastning.

Det er blevet hævdet [14.4] at den sekventielle stabilkonfigurationsmængde er en delmængde af enhver sikker mængde, der er defineret under hensyntagen til lastvejen. For at denne påstand kan være sand, kræves nødvendigvis indførelse af visse restriktioner på mængden af mulige lastveje. I dette eksempel behøver man blot at vælge en stykkevis akseparallel lastvej som  $(x,y) = (0,0) \rightarrow (0.9,0) \rightarrow (0.9,0.1) \rightarrow (0.1,0.1) \rightarrow (0.1,0.5)$  for at fremkalde totalt svigt. Denne lastvej ses at være fuldstændigt indeholdt i den sekventielle stabilkonfigurationsmængde.  $\square$

#### 14.5 Idealplastiske systemer og idealskøre systemer \*

Definitionen af den sekventielle stabilkonfigurationsmængde appellerer intuitivt til at blive brugt som nøddefinition af den sikre mængde. Som vist i eksempel 14.2 savnes dog en klar fysisk tolkning af denne nøddefinition i relation til givne lastvejsspecifikationer. På nær for to specielle ydertilfælde synes det at være vanskeligt at karakterisere den sekventielle stabilkonfigurationsmængde som enten omsluttende eller værende indeholdt i en sikker mængde defineret på en fysisk set tolkelig måde i relation til en udvidet model, der omfatter lastvejsspecifikationer.

Det ene specielle ydertilfælde er en konstruktion med stift-idealplastiske svigtelementer. Under antagelse af den associerede flydelov (normalitetsbetingelsen) bliver stabilkonfigurationsmængden identisk med den sikre mængde defineret under forudsætning af proportional oplastning fra nul. Dette er en konsekvens af plasticitetsteoriens nedreværditeorem, der udsiger, at hvis og kun hvis der kan findes en tilstand af indre spændinger i konstruktionen, som er i ligevægt med det ydre kraftsystem på konstruktionen, og som i alle svigtelementer ligger inden for eller på flydefladen, da er konstruktionen sikker med hensyn til kollaps. Hvis normalitetsbetingelsen bortfalder, kan sætningen ikke opretholdes som en tilstrækkelig betingelse for, at der ikke er kollaps. I så tilfælde kan det kun hævdes, at den sikre mængde er en delmængde af stabilkonfigurationsmængden.

Proportionallastforudsætningen kan derimod almindeliggøres til en langt større klasse af lastveje. En redegørelse herfor kræver nogle få begreber fra de stokastiske vektorprocessers teori. Spørgsmålet vil blive behandlet i næste kapitel. Den implicerede lastvejsuafhængighed i den i næste kapitel givne forstand gør det attraktivt at forsøge på at anvende idealplasticitetsteori på konstruktioner med sej brudopførsel, også selvom teoriens forudsætninger ikke er gyldige i alle detaljer for den virkelige konstruktion. Den herved opnåede væsentlige simplifikation af den mekaniske modeldannelse må da naturligvis betales ved indførelse af passende modelusikkerhedsvariable.

Det andet specielle ydertilfælde er en lineærelastisk konstruktion med idealskøre svigtelementer. I det følgende lader vi  $X$  alene betegne slutlasten, da alle de øvrige inputvariable forudsættes at have tidskonstante værdier. Antag, at konstruktionen underkastes proportional oplastning, altså at

lasten følger en retlinet lastvej  $L(X)$  fra nul til slutlastpunktet  $X$ . Enten vil intet element svigte, før  $X$  er nået, eller der vil være et første element, der svigter. Ved svigtet sker der en omfordeling af de indre kræfter i konstruktionen. Under forudsætning af, at dynamiske virkninger af svigtet kan negligeres, vil en statisk beregning kunne vise, om konstruktionen kan optage de omfordelte indre kræfter, eller om andre svigtelementer umiddelbart efter det første svigt bliver påvirket over deres brudgrænser, således at det første svigt udløser en kaskade af elementsvigt. Langs lastvejen kan der altså enten ske intet svigt, en sekvens af enkeltsvigt, eller en sekvens af svigt, hvoraf nogle eller alle indtræffer i kaskader. Lastvejen ender i et punkt, der enten svarer til en sikker tilstand for konstruktionen, altså til et punkt i  $\mathcal{S}$ , eller i et punkt, der svarer til tab af konstruktionens bæreevne, altså til et punkt i  $\mathcal{F}$ .

For at kunne gøre rede for rækkefølgen af elementsvigt i et kaskadesvigt alene ved statiske beregninger er det nødvendigt at indføre en nødhypotese, der fastlægger svigtrækkefølgen. Lad os for simpelhedens skyld, men dog tilstrækkeligt generelt, se på den situation, hvor elementerne, ifølge den nødhypotese vi vil bruge, svigter i nummerorden. Hvis den konstruktionskonfiguration, der svarer til, at elementerne 1, 2, ...,  $i$  er fjernet, giver et ikke bevægeligt system, kan vi opskrive de  $q - i$  sikkerhedsmargener

$$M_{i+1}^{12 \dots i}, \dots, M_q^{12 \dots i} \quad (1)$$

som funktioner af den aktuelle last  $x$ . For  $i = 0$  fås sikkerhedsmargenerne for de  $q$  svigtelementer i den oprindelige ubeskadigede konstruktion. Under oplastningen fra nullastpunktet langs lastvejen  $L(X)$  har disse sikkerhedsmargener  $M_1^0, \dots, M_q^0$  begyndelsesværdier, der alle er i det positive område.

Hændelsen

$$L(X) \subset S^0 \quad (2)$$

hvor

$$S^0 = \{x | M_1^0 > 0, \dots, M_q^0 > 0\} \quad (3)$$

vil vi kalde den sikre basishændelse. Denne hændelse indtræffer åbenbart ikke, hvis lastvejen  $L(\mathbf{X})$  har punkter fælles med mængden

$$F_1^0 = \{x | M_1^0 \leq 0, M_2^0 > 0, \dots, M_q^0 > 0\} \quad (4)$$

idet lasten da når et punkt på lastvejen, hvor  $M_1^0 = 0$ , og  $M_2^0 > 0, \dots, M_q^0 > 0$ . Ved dette punkt svigter element 1, hvorefter sikkerhedsmargenerne  $M_2^1, \dots, M_q^1$  bliver aktuelle for bedømmelse af konstruktionens opførelse. Hvis flere af disse nye sikkerhedsmargener er nul eller negative i dette punkt, fremkommer en kaskade af elementsvigt. Vi har hermed en situation, hvor det alene ved brug af statiske beregninger er ubestemt, hvilket element der svigter først. Vi indfører derfor den nødhypotese, at hvis lastvejen  $L(\mathbf{X})$  har punkter fælles med mængden

$$F_2^1 = \{x | M_2^1 \leq 0, M_3^1 > 0, \dots, M_q^1 > 0\} \quad (5)$$

da er element 2 det første svigtelement i kaskaden. Hypotesen giver et entydigt svar, fordi alle sikkerhedsmargener varierer lineært langs lastvejen, og alle er positive i nullastpunktet.

Denne hypotese udsiger altså, at hvis den konstruktion, der mangler element 1, oplastes fra nullastpunktet langs  $L(\mathbf{X})$  og derved får første svigt i element 2, da er det også element 2, der svigter først i den aktuelle konstruktion, som følge af den omlejring af de indre kræfter, der udløses af svigtet i element 1. Hypotesens princip kan uden ændring anvendes i det videre forløb langs lastvejen. Hvis  $L(\mathbf{X})$  har punkter fælles med mængden

$$F_3^{12} = \{x | M_3^{12} \leq 0, M_4^{12} > 0, \dots, M_q^{12} > 0\} \quad (6)$$

udsiger hypotesen, at element 3 er det næste element, der svigter enten inden for den første kaskade af svigt eller som et enkeltsvigt eller som et første svigt i en ny kaskade af svigt.

På grundlag af den således specificerede svigtrækkefølge ser vi altså, at den sikre svigtsekvens  $\{1, 2, \dots, i\}$  indtræffer hvis og kun hvis den konstruk-

tion, som fremkommer ved fjernelse af elementerne  $1, \dots, i$ , ikke er bevægelig, samt at både hændelserne

$$L(\mathbf{X}) \cap F_j^{12} \dots^{(j-1)} \neq \emptyset, j = 1, \dots, i \quad (7)$$

og hændelsen

$$\mathbf{X} \in S^{12} \dots i \quad (8)$$

indtræffer. Her er  $\emptyset$  den tomme hændelse og

$$F_j^{12 \dots (j-1)} = \quad (9)$$

$$\{x | M_j^{12 \dots (j-1)} \leq 0, M_{j+1}^{12 \dots (j-1)} > 0, \dots, M_q^{12 \dots (j-1)} > 0\}$$

$$S^{12 \dots i} = \{x | M_{i+1}^{12 \dots i} > 0, \dots, M_q^{12 \dots i} > 0\} \quad (10)$$

Vi har betegnet svigtsekvensen  $\{1, 2, \dots, i\}$  som en sikker svigtsekvens fordi lastvejen  $L(\mathbf{X})$  ender i et punkt  $\mathbf{X}$ , der ikke fører til konstruktionens totale sammenbrud.

Hændelsen

$$\mathbf{X} \in S^{12 \dots i} \cap \left[ \bigcap_{j=1}^i F_j^{12 \dots (j-1)} \right] \quad (11)$$

medfører åbenbart, at den sikre svigtsekvens  $\{1, 2, \dots, i\}$  indtræffer. Derfor er sandsynligheden

$$\begin{aligned} & P(M_1^0 \leq 0, M_2^0 > 0, \dots, M_q^0 > 0, \\ & M_2^1 \leq 0, M_3^1 > 0, \dots, M_q^1 > 0, \\ & \vdots \\ & M_i^{12 \dots (i-1)} \leq 0, M_{i+1}^{12 \dots (i-1)} > 0, \dots, M_q^{12 \dots (i-1)} > 0, \\ & M_{i+1}^{12 \dots i} > 0, M_{i+2}^{12 \dots i} > 0, \dots, M_q^{12 \dots i} > 0) \end{aligned} \quad (12)$$

en nedre grænse for sandsynligheden for, at den sikre svigtsekvens  $\{1, 2, \dots, i\}$  indtræffer.

Denne sandsynlighed kan beregnes approksimativt ved brug af enkelt-punkt eller flerpunkt multipel FORM eller SORM, se afsnit 6.6. Hvis sættet af samtlige sikkerhedsmargener, der indgår i (12), er forenet gaussisk, er sandsynligheden givet ved den muligvis singulære  $m$ -dimensionale normale fordelingsfunktion

$$\begin{aligned} & \Phi_m(-\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_q^0, \\ & -\beta_2^1, \beta_3^1, \dots, \beta_q^1, \\ & \vdots \\ & -\beta_i^{12\dots(i-1)}, \beta_{i+1}^{12\dots(i-1)}, \dots, \beta_q^{12\dots(i-1)}, \\ & \beta_{i+1}^{12\dots i}, \beta_{i+2}^{12\dots i}, \dots, \beta_q^{12\dots i}; \mathbf{P}_M) \end{aligned} \quad (13)$$

hvor  $m = q + (q-1) + \dots + (q-i) = (i+1)(q-i/2)$ . Matricen  $\mathbf{P}_M$  er korrelationsmatricen for vektoren  $\mathbf{M}$  af  $m$  sikkerhedsmargener, og  $\beta_1^0, \dots, \beta_q^{12\dots i}$  er de tilsvarende sikkerhedsindex.

De sikre svigtsekvenser er disjunkte hændelser. Sandsynligheden for den sikre hændelse er derfor summen af sandsynligheden for den sikre basishændelse og sandsynlighederne for alle de sikre svigtsekvenser. På nær for meget simple konstruktioner er det imidlertid uoverkommeligt at medtage alle sikre svigtsekvenser i sikkerhedsvurderingen.

Ved kun at medtage nogle af delhændelserne (11) fås naturligvis en nedreværdvurdering. Vi skal ikke her beskæftige os med systematiske søgemetoder til at identificere de sikre svigtsekvenser, der giver de væsentligste bidrag til summen. Det skal dog bemærkes, at man på simpel måde kan afgøre, om en given sikker svigtsekvens bidrager uvæsentligt i forhold til andre sikre svigtsekvenser. Hertil kræves en øvreværdvurdering. En sådan kan konstrueres ved brug af, at hændelserne (7) medfører hændelserne

$$L(\mathbf{X}) \cap \{\mathbf{x} | M_j^{12\dots(j-1)} \leq 0\} \neq \emptyset, j = 1, \dots, i \quad (14)$$

Da sikkerhedsmargenen  $M_j^{12\dots(j-1)}$  er negativ for  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ , hvis den er negativ i et punkt af svigtvejen  $L(\mathbf{X})$ , ses, at hændelserne (14) er ensbetydende med hændelserne

$$\mathbf{X} \in \{\mathbf{x} | M_j^{12\dots(j-1)} \leq 0\}, j = 1, \dots, i \quad (15)$$

Det gælder derfor, at sandsynligheden

$$\begin{aligned} & P(M_1^0 \leq 0, M_2^1 \leq 0, \dots, M_i^{12\dots i} \leq 0, \\ & M_{i+1}^{12\dots i} > 0, M_{i+2}^{12\dots i} > 0, \dots, M_q^{12\dots i} > 0) \\ & \leq \sum_{j=1}^i P(M_j^{12\dots(j-1)} \leq 0) + \sum_{j=i+1}^q P(M_j^{12\dots i} > 0) \end{aligned} \quad (16)$$

giver en øvreværdvurdering af sandsynligheden for, at den sikre svigtsekvens  $\{1, 2, \dots, i\}$  indtræffer.

En ikke-sikker svigtsekvens  $\{1, 2, \dots, i\}$  er karakteriseret ved, at konstruktionen er bevægelig, efter at de  $i$  første svigtelementer er faldet bort, men stadig ikke er bevægelig, når kun de  $i-1$  første svigtelementer er faldet bort. Denne ikke-sikre svigtsekvens indtræffer, hvis og kun hvis hændelserne (7) indtræffer. Hvis man i (12) fjerner den sidste række af uligheder  $M_{i+1}^{12\dots i} > 0, \dots, M_q^{12\dots i} > 0$ , fås altså en nedreværdi for, at den ikke-sikre svigtsekvens  $\{1, 2, \dots, i\}$  indtræffer. Da de ikke-sikre svigtsekvenser ligesom de sikre svigtsekvenser er indbyrdes disjunkte, bliver enhver sum af sådanne nedreværdier en nedreværdi til den totale svigtsandsynlighed. Den relative betydning af de forskellige ikke-sikre svigtsekvenser kan ligesom for de sikre svigtsekvenser bedømmes ved en vurdering som i (16), idet den sidste sum af leddene  $P(M_j^{12\dots i} > 0)$  udelades.

Det fremgår af denne redegørelse, at det selv for den her betragtede meget idealiserede konstruktionstype underkastet proportional oplastning fra nul er ganske kompliceret at formulere den sikre mængde og at beregne den tilhørende sandsynlighed. Det bemærkes, at hændelserne (15) netop er de hændel-

ser, der betragtes ved definitionen af den sekventielle stabilkonfigurationsmængde i afsnit 14.4. Den sikre mængde, der er givet ved foreningsmængden af den sikre basishændelse og alle de mængder, der svarer til de sikre svigtsekvenser, er altså en delmængde af den sekventielle stabilkonfigurationsmængde. Sandsynligheden for den hændelse, der er defineret ved den sekventielle stabilkonfigurationsmængde overvurderer derfor pålideligheden med hensyn til totalsvigt.

#### 14.6 Historiske og bibliografiske noter

Den almindelige teori for systemer af komponenter, hvor svigt af en eller flere komponenter i systemet ikke ændrer påvirkningsvilkårene for de tilbageværende ikke svigtede komponenter, eller kun gør det på meget simpel måde, er i dag et veludviklet værktøj til pålidelighedsanalyse af elektriske apparat-systemer eller lignende systemer. Begreberne afbrydningsmængder og forbindelsesmængder stammer fra denne teori. Blandt bidragyderne til udviklingen af hvad idag må betegnes klassiske teorier for systempålidelighed skal her nævnes *R.E. Barlow* og *F. Proschan* for deres bøger fra 1965 og 1975 [14.2,3].

Når det kommer til pålidelighedsanalyse af bærende konstruktionssystemer bliver problemerne af langt mere kompliceret art end i den klassiske teori for systempålidelighed. Som det fremgår af de foregående kapitler skyldes dette både lasthistoriens indflydelse og den komplicerede omfordeling af lastvirkningerne efter hvert komponentsvigt. Udviklingstendenserne er i 1985 beskrevet af *G.I. Schueller* [14.10], der dog synes at stille urealistiske og måske unødvendige krav om realisme i systempålidelighedsanalysens detaljer. Systempålidelighedsanalysens vanskeligheder er påpeget af *C.A. Cornell* i 1982 [14.6]. Båret af de tekniske regnemidlers hastige udvikling synes udviklingen af formelle regnemetoder for systempålidelighedsanalyse i det seneste årti at løbe forud for udviklingen af logisk sunde og gennemskuelige mekaniske og probabilitiske principper. Den i kapitel 14.4 givne diskussion om nøddefinitioner af den sikre mængde er således en reaktion herpå fremført af *OD* første gang i 1987 [14.8,9].

Det vil føre for vidt at give referencer til de mange bidragydere til udviklingen af de formelle regnemetoder for pålidelighedsanalyse af vilkårlige såkaldt realistiske konstruktive systemer. Der henvises herom til en over-

sigtsartikel af *OD* og *P. Bjerager* fra 1986 [14.7].

Gennemskuelig pålidelighedsanalyse af stift idealplastiske konstruktioner under brug af såvel plasticitetsteoriens øvreværdisætning som dens nedreværdisætning blev publiceret først af *G. Augusti* og *A. Baratta* i 1972 [14.1]. De fleste bidrag til emnet er bygget alene på øvreværdisætningen dvs på identifikation af plastiske mekanismer. For referencer henvises til [14.7].

De øvre og nedre grænser for idealskøre konstruktioner under proportional oplastning er givet af *P. Bjerager* i 1984 [14.5].

#### Referencer

- 14.1 G. Augusti and A. Baratta: Limit Analysis of Structures with Stochastic Strengths Variations. *Journal of Structural Mechanics*, vol.1, 1972.
- 14.2 R.E. Barlow and F. Proschan: *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, New York, 1965.
- 14.3 R.E. Barlow and F. Proschan: *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Reinhart and Winston, 1975.
- 14.4 R.M. Bennett and A.H.-S. Ang: Formulations of Structural System Reliability. *Journal of Eng. Mech.*, ASCE, vol.112, 1986.
- 14.5 P. Bjerager: *Reliability Analysis of Structural Systems*. Thesis, Report No. 183, Department of Structural Engineering, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, January, 1984.
- 14.6 C.A. Cornell: Some Thoughts on System and Structural Reliability. *Nucl. Eng. & Des.*, vol.71, 1982.
- 14.7 O. Ditlevsen and P. Bjerager: Methods of Structural Systems Reliability. *Structural Safety*, vol.3, 1986.
- 14.8 O. Ditlevsen: The Structural System Reliability Problem. Qualitative Considerations. *Reliability and Risk Analysis in Civil Engineering 1, ICASP 5*, 1987 (ed. N.C. Lind), Institute for Risk Research, Univ. of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada.
- 14.9 O. Ditlevsen: Probabilistic Statics of Discretized Ideal Plastic Frames. *Journal of Eng. Mech.*, vol.114, 1988.

## 15. INDLEDNING TIL PROCESBESKRIVELSER

### 15.1 Procesbegrebet. Gaussiske processer. Poissonprocesser

Vi har både i kapitlet om FBC-lastmodellen (kapitel 10) og i kapitlet om systemsikkerhedsanalyse (kapitel 14) berørt anvendelsen af teorien for stokastiske processer eller felter til modellering af tilfældige variationer i tid og rum. I dette kapitel vil vi give en indledning til nogle få af de begreber og resultater, der har relevans i teorien for bærende konstruktioners sikkerhed. Den matematiske side af fremstillingen vil i høj grad basere sig på anskuelighedsargumenter, fordi forsøg på gennemførelse af matematisk stringens vil komplicere fremstillingen unødigt med finesser, der næppe er til stor glæde for den læser, der primært er interesseret i ingeniørmæssige anvendelser.

En stokastisk proces eller et stokastisk felt  $X(t)$  er en familie af stokastiske variable eller vektorer, hvor hvert medlem af familien udvælges ved en skalær eller vektoriel parameter  $t$ . Denne parameter kan eksempelvis være tiden eller en stedvektor. Et udfald  $x(t)$  af den stokastiske proces  $X(t)$  er en funktion af parameteren  $t$ . For  $t = t_0$  er  $x(t_0)$  et udfald af den stokastiske variable  $X(t_0)$ . Hvis man eksempelvis betragter en specifik lasthistorie som et element i en vægtet mængde af mulige lasthistorier, da vil denne vægtede mængde være et eksempel på en stokastisk proces.

Principperne i den sandsynlighedsmæssige beskrivelse af en stokastisk proces fremgår umiddelbart af den selvfølgelige sammenhæng, at ethvert udvalgt sæt af parameterverdier  $(t_1, \dots, t_n)$  definerer en stokastisk vektor  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ , der beskrives ved en  $n$ -dimensionel fordeling i afhængighed af  $(t_1, \dots, t_n)$ . Processens sandsynlighedsstruktur fastlægges ved foreskrivelse af samtlige disse endeligdimensionale sandsynlighedsfordelinger, forudsat at disse er foreskrevet på en måde, der opfylder visse selvfølgelige konsistenskrav.

Et af de hyppigst anvendte eksempler på en sådan konsistent foreskrivelse af endeligdimensionale fordelinger er den, der fører til klassen af gaussiske processer. Antag, at middelværdien  $E[X(t)]$  foreskrives som funktion  $\mu(t)$  af  $t$  (middelværdifunktionen), og at kovariansen  $\text{Cov}[X(t_1), X(t_2)]$  foreskrives som funktion  $c(t_1, t_2)$  af  $(t_1, t_2)$  (kovariansfunktionen). Da er middelværdi-

vektoren  $\{E[X(t_i)]\}$  og covariansmatricen  $\{\text{Cov}[X(t_i), X(t_j)]\}$  fastlagt for ethvert valg af  $t_1, \dots, t_n$ . En forudsætning om, at fordelingen af vektoren  $(X(t_1), \dots, X(t_n))$  er gaussisk, fører da til en fuldstændig definition af en proces, der siges at være gaussisk med middelværdifunktion  $\mu(t)$  og kovariansfunktion  $c(t_1, t_2)$ . Det skal bemærkes, at klassen af kovariansfunktioner skal opfylde visse krav, der sikrer, at der ikke kan dannes negative varianser (forventningsværdifunktionalens positivitet skal være opfyldt). Kravene til  $c(t_1, t_2)$  er, at

$$c(t_1, t_2) = c(t_2, t_1) \quad (1)$$

og at

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c(t_i, t_j) a_i a_j \geq 0 \quad (2)$$

for ethvert  $n$  og ethvert valg af  $t_1, \dots, t_n$  og vilkårlige tal  $a_1, \dots, a_n$ . Hvis disse to krav er opfyldt, siges funktionen  $c(t_1, t_2)$  at være ikke-negativ definit. Venstre side af (2) er netop variansen af linearkombinationen  $a_1 X(t_1) + \dots + a_n X(t_n)$ .

For en gaussisk proces med konstant middelværdifunktion er det kovariansfunktionens egenskaber (kontinuitet, differentiabilitet, forløb i det uendelige, etc), der bestemmer udfaldsfunktionernes egenskaber. Man kan således tale om en gaussisk proces, hvis udfaldsfunktioner er differentiable med kontinuerte afledede. Dette skal forstås således, at udfaldsfunktioner uden disse egenskaber kun kan optræde med sandsynligheden nul. Om yderligere detaljer henvises til litteraturen om stokastiske processer.

Et andet fundamentalt eksempel er klassen af Poissonprocesser. En Poissonproces kan defineres som en såkaldt tælleproces  $N(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , der tæller antallet af visse entydigt definerede begivenheder, der indtræder tilfældigt i tiden. Udfaldsfunktionerne af  $N(t)$  er altså stigende trappefunktioner med spring på 1, hver gang en begivenhed indtræffer. Sandsynlighedslovene for en såkaldt homogen Poissonproces er fastlagt ved, at det foreskrives, at

- 1)  $N(t)$  har stokastisk uafhængige tilvækster, dvs for  $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$  er  $N(t_2) - N(t_1)$  og  $N(t_4) - N(t_3)$  indbyrdes uafhængige,
- 2) sandsynligheden for at der indtræffer et spring i intervallet  $]t, t+\Delta t]$  er  $c \Delta t$  + led af højere orden i  $\Delta t$ , hvor  $c$  er en konstant,
- 3) sandsynligheden for at der indtræffer to eller flere spring i intervallet  $]t, t+\Delta t]$  er af 2. eller højere orden i  $\Delta t$ .

Disse betingelser fører entydigt til sandsynligheden

$$P[N(t+\tau) - N(t) = i] = e^{-c\tau} \frac{(c\tau)^i}{i!}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (3)$$

Hvis  $N(0) = 0$  fås den  $n$ -dimensionale fordeling

$$P[N(t_1) = i_1, \dots, N(t_n) = i_n] = e^{-ct_n} \frac{c^{i_1} t_1^{i_1-1} (t_2 - t_1)^{i_2 - i_1 - 1} \dots (t_n - t_{n-1})^{i_n - i_{n-1} - 1}}{i_1! (i_2 - i_1)! \dots (i_n - i_{n-1})!} \quad (4)$$

hvor  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ ,  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_n$ . Parameteren  $c$  kaldes Poissonprocessens intensitet. Højre side af (3) kaldes en Poissonsandsynlighed med parameter  $c\tau$ .

En inhomogen Poissonproces fremkommer, hvis  $c$  er en funktion af tiden  $t$ .

Man skal da blot ændre  $c\tau$  i (3) til integralet  $\int_t^{t+\tau} c(x) dx$ , medens (4) modificeres tilsvarende.

Man kan mere generelt definere et Poissonfelt over det  $q$ -dimensionale rum som en tælleproces  $N(x_1, \dots, x_q)$ , der tæller antallet af tilfældigt placerede punkter (koncentrerede objekter) med koordinater, der hver især højst er  $x_1, \dots, x_q$ . Med helt analoge antagelser som for  $N(t)$  finder man, at antallet af objekter inden for en vilkårlig given mængde  $V$  er fordelt med Poissonsandsynligheder, hvor parameteren er lig med integralet af intensitetsfunktionen  $c(x_1, \dots, x_q)$  over  $V$ .

Klassen af gaussiske processer og klassen af Poissonprocesser danner fundament for særdeles mange af de stokastiske processer, der optræder i anvendelserne.

## 15.2 Øvre grænse for svigtsandsynligheden

Antag, at der til ethvert tidspunkt  $t$  er givet en sikker mængde  $\mathcal{S}(t)$  for en konstruktion. Inputvektoren  $X(t)$  modelleres som en stokastisk vektorproces, således at svigt inden for tidsintervallet  $[0, T]$  fremkommer, hvis og kun hvis der findes et tidspunkt  $t \in [0, T]$ , for hvilket  $X(t) \notin \mathcal{S}(t)$ . Den sikre hændelse  $\{X(t) \in \mathcal{S}(t) \text{ for alle } t \in [0, T]\}$  er åbenbart ensbetydende med hændelsen

$$\{X(0) \in \mathcal{S}(0)\} \cap \{N(T) = 0\} \quad (1)$$

hvor  $N(T)$  er antallet af udkrydsninger af  $X(t)$  ud af  $\mathcal{S}(t)$  i  $[0, T]$ . Ved en udkrydsning til tiden  $t$  forstås løst sagt en hændelse, hvor  $X(t)$  til tiden  $t$  passerer fra  $\mathcal{S}(t)$  til komplementærmængden  $\mathcal{F}(t)$ . Dette har en umiddelbar mening, hvis udfaldsfunktionerne hørende til  $X(t)$  er kontinuerte. Et punkt, hvori  $X(t)$  gør et spring fra  $\mathcal{S}(t)$  til  $\mathcal{F}(t)$ , kan imidlertid også betegnes som et udkrydsningspunkt.

Svigtmængden, der er komplementærmængden til den sikre mængde (1), er åbenbart

$$\{X(0) \in \mathcal{F}(0)\} \cup \{N(T) > 0\} \quad (2)$$

Lad dens sandsynlighed være betegnet ved  $p_f(0, T)$ . Da de to hændelser i (2) ikke er disjunkte, har vi

$$p_f(0, T) \leq p_f(0, 0) + P[N(T) > 0] \quad (3)$$

hvor

$$p_f(0, 0) = P[X(0) \in \mathcal{F}(0)] \quad (4)$$

Da det yderligere gælder, at

$$\begin{aligned} P[N(t) > 0] &= P[N(T) = 1] + P[N(T) = 2] + \dots \\ &\leq P[N(T) = 1] + 2P[N(T) = 2] + \dots = E[N(T)] \end{aligned} \quad (5)$$



fås ved indsættelse i (3), at

$$p_f(0,0) \leq P \left[ \bigcup_{i=1}^n \{X(t_i) \in \mathcal{S}(t_i)\} \right] \leq p_f(0,T) \leq p_f(0,0) + E[N(T)] \quad (6)$$

hvor  $t_1 = 0 < t_2 < \dots < t_n \leq T$  er arbitrære tidspunkter. Ulighederne (6) forbliver naturligvis sande, hvis  $p_f(0,0)$  erstattes af  $p_f(t_1,0) = P[X(t_1) \in \mathcal{S}(t_1)]$  for et vilkårligt  $t_1$ .

For at bestemme en øvre grænse for svigtsandsynligheden kan vi altså nøjes med at bestemme den øjeblikkelige svigtsandsynlighed  $p_f(t,0)$  (den marginale svigtsandsynlighed) svarende til et vilkårligt tidspunkt  $t \in [0,T]$ , samt det forventede antal udkrydsninger i intervallet  $[0,T]$ .

For langsomt varierende lastvektorprocesser vil en statistisk analyse af konstruktionen sædvanligvis være tilstrækkelig. For langsomt varierende stationære lastprocesser og praktisk relevante planlagte konstruktionslevetider  $T$  er  $E[N(T)]$  ofte af samme størrelsesorden som  $p_f(t,0)$ . (En vektorproces  $X(t)$  siges at være stationær, hvis vektorprocessen  $X(t+\tau)$  svarende til et vilkårligt, men fast  $\tau$  har samme sandsynlighedsstruktur som  $X(t)$ ). Da usikkerheder op til en faktor så stor som 2 i bestemmelsen af den i praksis meget lille svigtsandsynlighed  $p_f(0,T)$  kun har beskedne konsekvenser for konstruktionens dimensioner, er det derfor i sådanne tilfælde mindre vigtigt at bestemme  $E[N(T)]$  med stor nøjagtighed. Derved opnås den fordel, at det er unødvendigt at formulere en lastmodel med stor detaljeringsgrad. En grov vurdering af  $E[N(T)]$  kan være tilstrækkelig.

Hvis lastprocessen er ikke-stationær, må der vises større omhu. Eksempelvis kan situationen være den, at lastprocessen altid starter i det sikre område og højst har een udkrydsning ud af den sikre mængde i intervallet  $[0,T]$ . Da er  $p_f(0,0) = 0$ , således at den øvre grænse til  $p_f(0,T)$  alene er bestemt af  $E[N(T)]$ . En sådan situation haves for en stift-idealplastisk konstruktion, hvor lasten påføres ved proportional oplastning fra nul. I det tilfælde er  $p_f(0,T) = p_f(T,0) = E[N(T)]$ , dvs  $p_f(0,T)$  er den marginale svigtsandsynlighed til tiden  $T$ .

I kapitel 14 måtte vi som forudsætning for sikkerhedsanalysen af en stift-idealplastisk konstruktion antage, at lastvejen svarede til proportional oplastning. Formålet med denne begrænsning af lastvejens forløb var at sikre,

at der højst bliver een udkrydsning af den tidsinvariante sikre mængde  $\mathcal{S}$ , således at analysen kunne baseres alene på en specifikation af sandsynlighedsfordelingen for slutlastpunktet. Vi ser nu, at hvis  $E[N(T)]$  kan bestemmes, da kan vi helt generelt forudsætte tilfældige lastveje hørende til en stokastisk vektorproces  $X(t)$ . Hvis beregningerne baseres på plasticitetsteoriens nedreværdisætning, skal vi blot bruge højre side af (6). Bruges plasticitetsteoriens øreværdisætning, skal vi naturligvis tilsvarende bruge venstre side af (6). Denne lastvejsgeneralitet skyldes, at den sikre mængde  $\mathcal{S}$  er uafhængig af lasthistorien. Som vi har set i kapitel 14, mistes denne simple egenskab for konstruktionssystemer, der ikke er stift-idealplastiske. Ulighederne (6) gælder dog generelt. Vanskeligheden ligger i at bruge dem, når svigt mængden er afhængig af lastvejen.

### 15.3 Forventet antal udkrydsninger

Hvis vi gør den forudsætning, at vektorprocessen  $X(t)$  og mængden  $\mathcal{S}(t)$  har sådanne egenskaber, at tidsintervallet fra  $t$  til  $t + \Delta t$  indeholder to eller flere krydsninger gennem randen  $\partial\mathcal{S}(t)$  (ind- eller udkrydsninger) med en sandsynlighed, der er af højere orden i  $\Delta t$  end  $\Delta t$  (dvs sandsynligheden for  $i \geq 2$  krydsninger er  $p_i o(\Delta t)$ ), da har vi åbenbart, at

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[N(t+\Delta t) - N(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P\{N(t+\Delta t) - N(t) = 1\} \quad (1)$$

såfremt  $\sum_{i=2}^{\infty} i p_i < \infty$ , og såfremt grænseværdien i (1) iøvrigt eksisterer. Det er i praksis tilstrækkeligt kun at bruge processer med disse meget generelle egenskaber ved modeldannelserne i sikkerhedsteorien.

Det bemærkes, at hændelsen

$$\{X(t) \in \mathcal{S}(t)\} \cap \{X(t+\Delta t) \in \mathcal{S}(t+\Delta t)\} \quad (2)$$

medfører hændelsen

$$\{N(t+\Delta t) - N(t) \geq 1\} \quad (3)$$

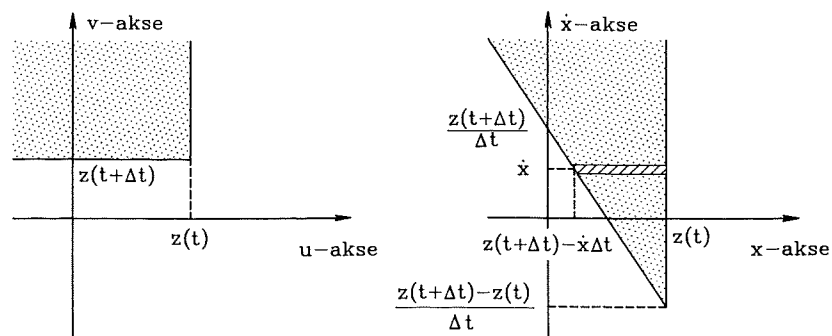
og at differenshændelsen mellem (3) og (2) (dvs (3) indtræffer uden at (2) indtræffer) er en delhændelse af den hændelse, at der er et lige antal krydsninger (ind eller ud). Det følger heraf, at sandsynligheden for hændelsen (3) er afgrænset mellem sandsynligheden for hændelsen (2) og sandsynligheden for et lige antal krydsninger. Da dette sidste led er  $o(\Delta t)$  fås åbenbart, at

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} E[N(t+\Delta t) - N(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} P[\{X(t) \in \mathcal{S}(t)\} \cap \{X(t+\Delta t) \in \mathcal{S}(t+\Delta t)\}] \quad (4)$$

idet  $P[N(t+\Delta t) - N(t) \geq 1]$  og  $P[N(t+\Delta t) - N(t) = 1]$  i(1) kun adskiller sig fra hinanden ved led, der er  $o(\Delta t)$ . Grænseværdien på venstre side i (4) betegnes  $\nu_+(t)$  og kaldes udkrydsningsintensiteten til tiden  $t$ . Den ses for en given deterministisk tidsvariation af  $\mathcal{S}(t)$  kun at afhænge af de todimensionale fordelinger for vektorprocessen  $X(t)$  og kun af disse fordelingers egenskaber i en omegn langs "diagonalen"  $t_1 = t_2$ . Vi har herefter, at

$$E[N(T)] = \int_0^T \nu_+(t) dt \quad (5)$$

af niveauet  $z(t)$ .



Figur 15.1. Principskitse til udledning af niveauopkrydsningsintensiteten for en stokastisk proces (til venstre) og den heraf afledte principskitse til udledning af Rices formel (til højre).

da  $N(T)$  løst sagt er summen af tilvæksterne  $N(t+\Delta t) - N(t)$  fra  $t = 0$  til  $t = T$ .

Hvis processen specielt er skalær, og  $\mathcal{S}(t) = ]-\infty, z(t)]$ , hvor  $z(t)$  er en given niveaufunktion, fås opkrydsningsintensiteten, se figur 15.1 til venstre,

$$\nu_+(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ F_{X(t)}[z(t)] - F_{X(t), X(t+\Delta t)}[z(t), z(t+\Delta t)] \right\} \quad (6)$$

**Eksempel 15.1** Lad os definere en lastproces efter samme principper som FBC-lastprocessen, men med lastudskiftningstidspunkter, der indtræder som begivenhederne i en Poissonproces med intensitet  $c$ . En sådan proces kaldes en Poisson "square wave" proces. Lad amplituderne være indbyrdes uafhængige med fordelingsfunktionen  $F(x)$ , og lad Poissonprocessen have intensitet  $c$ . Ifølge (6) bliver opkrydsningsintensiteten af niveauet  $z$  lig med

$$\nu_+ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \{ F(z) - [F(z)(1 - c\Delta t) + F(z)^2 c\Delta t] \} = c F(z) [1 - F(z)] \quad (7)$$

□

Med brug af de todimensionale sandsynlighedstætheder (hvis de eksisterer) kan (6) skrives

$$\nu_+(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{z(t)} du \int_{z(t+\Delta t)}^{\infty} f_{X(t), X(t+\Delta t)}(u, v) dv \quad (8)$$

Indføres afbildningen

$$\begin{aligned} u &= x & ; & \quad x = u \\ v &= x + \dot{x}\Delta t & ; & \quad \dot{x} = \frac{v-x}{\Delta t} \end{aligned} \quad (9)$$

har vi, at

$$f_{X(t), X(t+\Delta t)}(u, v) = f_{X(t), \dot{X}(t)}(x, \dot{x}) \frac{1}{\Delta t} \quad (10)$$

hvor  $\dot{X}(t) = [X(t+\Delta t) - X(t)]/\Delta t$ . Dermed kan (8) skrives, se figur 15.1 til højre,

$$\nu_+(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t}}^{\infty} \left[ \frac{1}{\Delta t} \int_{z(t+\Delta t) - \dot{x} \Delta t}^{z(t)} f_{X(t), \dot{X}(t)}(x, \dot{x}) dx \right] d\dot{x} \quad (11)$$

Ved brug af middelværdisætningen på det inderste integral fås herefter ved grænseovergangen  $\Delta t \rightarrow 0$ , at

$$\nu_+(t) = \int_{\dot{z}(t)}^{\infty} [\dot{x} - \dot{z}(t)] f_{X(t), \dot{X}(t)}[z(t), \dot{x}] d\dot{x} \quad (12)$$

hvor  $\dot{z}(t)$  er den afledede af  $z(t)$  og  $\dot{X}(t)$  er den afledede af  $X(t)$ . Dette er *Rices formel*, som her er udledt helt uden hensyntagen til matematisk stringens.

**Eksempel 16.2** For en stationær gaussisk proces med middelværdi 0 og kovariansfunktion  $c(t_1, t_2) = \sigma^2 \rho(t_2 - t_1)$ , hvor  $\rho(t)$  er korrelationsfunktionen, der åbenbart er en lige funktion med  $\rho(0) = 1$ , er  $X(t)$  og  $\dot{X}(t)$  indbyrdes uafhængige (fordi  $X(t)$  og  $\dot{X}(t)$  er ukorrelerede for enhver stationær proces), og  $\dot{X}(t)$  har middelværdien nul og variansen

$$\begin{aligned} \text{Var}[\dot{X}(t)] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Var} \left[ \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} \right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t^2} (\sigma^2 + \sigma^2 - 2\sigma^2 \rho(|\Delta t|)) \right\} = \\ &= -\sigma^2 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\rho(\Delta t) - 1}{\Delta t} - \frac{1 - \rho(-\Delta t)}{\Delta t} \right\} = -\sigma^2 \rho''(0) \end{aligned} \quad (13)$$

Vi finder da, at (13) giver

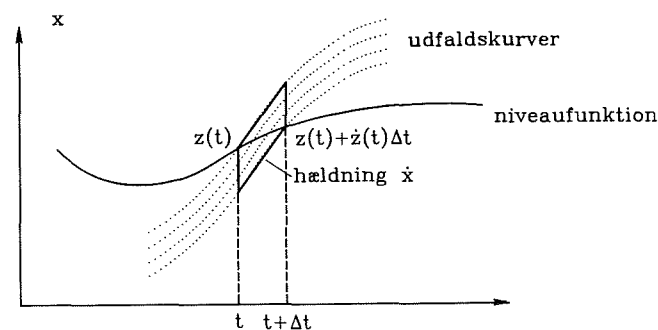
$$\nu_+(t) = \left[ \int_0^{\infty} \dot{x} \frac{1}{\sigma \sqrt{-\rho''(0)}} \varphi \left[ \frac{\dot{x} + \dot{z}(t)}{\sigma \sqrt{-\rho''(0)}} \right] d\dot{x} \right] \frac{1}{\sigma} \varphi \left[ \frac{z(t)}{\sigma} \right] \quad (14)$$

som for  $\dot{z}(t) = 0$  specielt bliver

$$\nu_+ = \sqrt{\frac{-\rho''(0)}{2\pi}} \varphi \left[ \frac{z}{\sigma} \right] \quad (15)$$

□

Formlen (12) er direkte tolkelig på en tegning af udfaldsfunktionernes forløb gennem intervallet fra  $t$  til  $t + \Delta t$ , se figur 15.2. Når hældningen  $\dot{x}$  er givet, vil den brøkdelen af mængden af udfaldskurver, der krydser op gennem den til niveaufunktionen  $z(t)$  svarende kurve, være givet ved produktet af interval-længden  $[\dot{x} - \dot{z}(t)] \Delta t$  for  $x$  og tætheden  $f_{X(t), \dot{X}(t)}[z(t), \dot{x}]$ . Da der kun er opkrydsninger for hældninger  $\dot{x}$ , der er større end hældningen  $\dot{z}(t)$ , fås sandsynligheden for at få en opkrydsning i det betragtede interval ved at integrere dette produkt fra  $\dot{z}(t)$  til  $\infty$ .



Figur 15.2. Direkte grafisk tolkning af Rices formel.

Det bemærkes, at (12) kan skrives

$$\nu_+(t) = E[\max\{0, \dot{X}(t) - \dot{z}(t)\} | X(t) = z(t)] f_{X(t)}[z(t)] \quad (16)$$

Udkrydsningsintensiteten af vektorprocessen  $\mathbf{X}(t)$  ud af  $\mathcal{S}(t)$  kan skrives på analog måde. Lad tidsudviklingen af  $\mathcal{S}(t)$  være bestemt af et deterministisk hastighedsvektorfelt  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  i den forstand, at overfladen  $\partial\mathcal{S}(t)$  konvekteres af hastighedsfeltet  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Hvis vi opfatter et udfald  $\mathbf{x}(t)$  af vektorprocessen  $\mathbf{X}(t)$ , som stedvektoren til en partikel, der bevæger sig med den relative hastighed  $\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  i forhold til et infinitesimalt fladeelement  $d\partial\mathcal{S}(t)$  af  $\partial\mathcal{S}(t)$  med "areal"  $\mathcal{L}[d\partial\mathcal{S}(t)]$  og beliggende på stedet  $\mathbf{x}$ , da vil partiklen krydse ud gennem dette fladeelement i tidsintervallet fra  $t$  til  $t + dt$ , hvis og kun hvis  $\mathbf{x}(t)$  tilhører et i  $\mathcal{S}(t)$  indeholdt infinitesimalt volumenelement med volumen  $[\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]' \mathbf{n}(\mathbf{x}) \mathcal{L}[d\partial\mathcal{S}(t)] dt$ , hvor  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  er den udadrettede normalenhedsvektor til  $\partial\mathcal{S}(t)$  på stedet  $\mathbf{x}$ . Hvis dette volumen er negativt, krydser partiklen udefra og ind i  $\mathcal{S}(t)$ . Sandsynligheden for en udkrydsning med hastigheden  $\dot{\mathbf{x}}$  gennem fladeelementet på stedet  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{S}(t)$  med normalenhedsvektor  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  er altså

$$\max\{0, [\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]' \mathbf{n}(\mathbf{x})\} f_{\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \mathcal{L}[d\partial\mathcal{S}(t)] \quad (17)$$

per tidsenhed. Herefter fås sandsynligheden for en udkrydsning gennem  $\partial\mathcal{S}(t)$  ved integration med hensyn til  $\dot{\mathbf{x}}$  efterfulgt af integration med hensyn til  $\mathbf{x}$  over hele  $\partial\mathcal{S}(t)$ , da udkrydsningen igennem disjunkte overfladeelementer er disjunkte hændelser. Vi finder altså udkrydsningsintensiteten

$$\begin{aligned} \nu_+(t) &= \\ & \int_{\mathbf{x} \in \partial\mathcal{S}(t)} \mathcal{L}[d\partial\mathcal{S}(t)] \int_{\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n} \max\{0, [\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]' \mathbf{n}(\mathbf{x})\} f_{\mathbf{X}(t), \dot{\mathbf{X}}(t)}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \mathcal{L}(d\mathbb{R}^n) \\ &= \int_{\mathbf{x} \in \partial\mathcal{S}(t)} E \left[ \max\{0, [\dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]' \mathbf{n}(\mathbf{x})\} \mid \mathbf{X}(t) = \mathbf{x} \right] f_{\mathbf{X}(t)}(\mathbf{x}) \mathcal{L}[d\partial\mathcal{S}(t)] \end{aligned} \quad (18)$$

Denne formel er en generalisation af Rices formel. Den betegnes undertiden som *Belayevs formel*.

Formlerne (4) og (6) samt Rices og Belayevs formler til bestemmelse af integranden  $\nu_+(t)$  i (5) danner sammen med de i denne bog givne hjælpemidler det grundlag, som i forbindelse med ulighederne (15.2.6) kan bruges til sikkerhedsanalyse baseret på stokastiske procesmodeller. Den praktiske udregning af udkrydsningsintensiteten afhænger af den for anvendelsen specifikke procestype. Bestemmelsen kan ofte foretages med tilstrækkelig nøjagtighed ved brug af asymptotiske resultater, der er af samme natur som de resultater, der begrundes FORM og SORM. Disse emner går imidlertid uden for rammerne af denne bog. Vi vil her nøjes med at illustrere, at udkrydsningsintensiteten givet ved Belayevs formel (18) altid kan estimeres ved den Monte Carlo simuleringsteknik, der er beskrevet i kapitel 9.

#### 15.4 Bestemmelse af forventet antal udkrydsninger ved Monte Carlo retningssimuleringsteknik \*

Ligesom i kapitel 9 om Monte Carlo metoder kan vi omskrive integralet i (15.3.18) over fladen  $\partial\mathcal{S}(t)$  til en forventningsværdi af en passende stokastisk variabel, hvis sandsynlighedsfordeling er koncentreret på  $\partial\mathcal{S}(t)$ . Dette kan gøres på simpel måde i en polær repræsentation for fladen  $\partial\mathcal{S}(t)$ . Lad os for simpelhedens skyld antage, at koordinatsystemets nulpunkt er i det indre af  $\mathcal{S}(t)$  og at  $\mathcal{S}(t)$  er stjerneformet med hensyn til nulpunktet. Lad os desuden antage, at det næsten overalt på fladen  $\partial\mathcal{S}(t)$  gælder, at normalenhedsvektoren  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  ikke er ortogonal på  $\mathbf{x}$ , altså at  $\mathbf{x}'\mathbf{n}(\mathbf{x}) \neq 0$  næsten overalt på  $\partial\mathcal{S}(t)$  (hvormed menes overalt på nær for  $\mathbf{x}$  i en delmængde af fladen med areal nul). Ved en projektionsbetragtning ses da, at der med  $\mathbf{x} = r(\boldsymbol{\alpha}, t)\boldsymbol{\alpha}$ ,  $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1$ , gælder følgende sammenhæng

$$\mathcal{L}[d\partial\mathcal{S}(t)] = \frac{r(\boldsymbol{\alpha}, t)^{n-1}}{\boldsymbol{\alpha}'\mathbf{n}[r(\boldsymbol{\alpha}, t)\boldsymbol{\alpha}]} \mathcal{L}(d\mathcal{K}) \quad (1)$$

mellem "arealet"  $\mathcal{L}(d\mathcal{K})$  af det infinitesimale overfladeelement  $d\mathcal{K}$  på enhedskuglen  $\mathcal{K}$  med centrum i nulpunktet og "arealet"  $\mathcal{L}[d\partial\mathcal{S}(t)]$  af det infinitesimale overfladeelement  $d\partial\mathcal{S}(t)$  på fladen  $\partial\mathcal{S}(t)$ . Det betyder, at vi let kan omskrive integralet (15.3.18) til et integral over  $\mathcal{K}$ . Indlægger vi en overalt positiv sandsynlighedstæthed  $f_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\alpha})$  på  $\mathcal{K}$  for retningsenhedsvektoren

A, kan vi dividere og multiplicere integranden med denne tæthed og derefter nøjagtig som i kapitel 9 tolke integralet som en forventningsværdi, der her får formen

$$\nu_+(t) = E \left[ \frac{r(\mathbf{A}, t)^{n-1} w(\mathbf{A}, t)}{f_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) \mathbf{A}' \mathbf{n} [r(\mathbf{A}, t) \mathbf{A}]} \right] \quad (2)$$

hvor

$$w(\mathbf{A}, t) = E \left[ \max\{0, \{\dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{v}[r(\mathbf{A}) \mathbf{A}, t]\}' \mathbf{n} [r(\mathbf{A}, t) \mathbf{A}]\} \mid \mathbf{X}(t) = r(\mathbf{A}, t) \mathbf{A} \right] \quad (3)$$

Vi kan altså i princippet bestemme et skøn for udkrydsningsintensiteten  $\nu_+(t)$  ved retnings-simulering med brug af en passende simuleringsfordeling, der definerer tætheden  $f_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\alpha})$  på enhedskuglen  $\mathcal{K}$ . Den i kapitel 9 foreslåede klasse af simuleringsfordelinger kan også her være nyttig. Specielt skal anføres, at tætheden svarende til ensformig retnings-simulering er

$$f_{\mathbf{A}}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{K})} = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{2\pi^{n/2}} \quad (4)$$

hvor  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ,  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  og  $\Gamma(1) = 1$ .

I det specielle tilfælde, hvor  $\mathbf{X}(t)$  er en gaussisk vektorproces, der opfylder den betingelse, at  $\mathbf{X}(t)$  og  $\dot{\mathbf{X}}(t)$  for hvert fast  $t$  er indbyrdes uafhængige, kan funktionen  $w(\mathbf{A}, t)$  i (3) vises at være [9.5]

$$w(\mathbf{A}, t) = D[\dot{\mathbf{N}}(\mathbf{A}, t)] \psi \left[ \frac{E[\dot{\mathbf{N}}(\mathbf{A}, t)]}{D[\dot{\mathbf{N}}(\mathbf{A}, t)]} \right] \quad (5)$$

hvor

$$\dot{\mathbf{N}}(\mathbf{A}, t) = \{\dot{\mathbf{X}}(t) - \mathbf{v}[r(\mathbf{A}) \mathbf{A}, t]\}' \mathbf{n} [r(\mathbf{A}) \mathbf{A}, t] \quad (6)$$

og  $\psi(\cdot)$  er en funktion defineret ved formlen

$$\psi(x) = \varphi(x) + x\Phi(x) \quad (7)$$

Simuleringsmetodens anvendelighed beror naturligvis i væsentlig grad på, om det er muligt at gennemføre en hurtig bestemmelse af  $w(\boldsymbol{\alpha}, t)$  for hvert udfald  $\boldsymbol{\alpha}$  af  $\mathbf{A}$ .

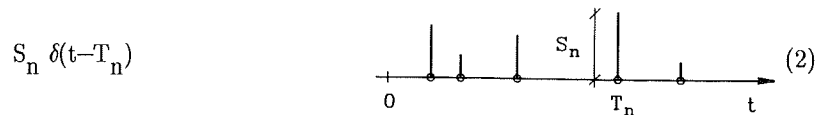
### 15.5 Nogle simple lastmodeller af Poisson-type

Lastmodellen i kapitel 10 (FBC-lastmodellen) er formuleret med det formål at give en for sikkerhedsanalyse af bygninger tilstrækkelig repræsentation af såkaldt intermitterende lasthistorier og deres kombination. At en lasthistorie er intermitterende vil sige, at den består af en serie af lastpulser af mere eller mindre tilfældig form og varighed adskilt ved tidsintervaller uden last. Disse adskillende tidsintervaller uden last kan specielt have forsvindende varighed. I FBC-modellen er både lastpulsvarigheder og adskillende tidsintervaller diskretiserede til bestemte tider, og pulsformerne er rektangulære. Herudover er forskellige for kombinationsformål betragtede FBC-lastprocesser kunstigt afpasset til hinanden med hensyn til valget af lastpulsvarighederne og de adskillende intervaller varighed.

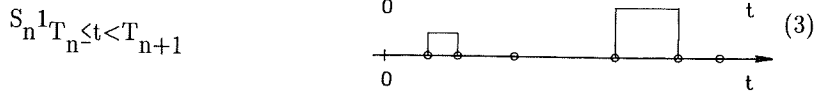
En mere naturlig klasse af lastmodeller for intermitterende lasthistorier fremkommer ved brug af Poissonprocesser. Lad  $N(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}_+$ , være en homogen Poissonproces med intensitet  $c$ , dvs en proces for hvilken (15.1.3) gælder. Antag, at hver af de begivenheder, der tælles af  $N(t)$ , er forekomst af en lastpuls, hvis placering, form og størrelse er givet ved en funktion  $h(t, N(\cdot), S, D)$  af tiden  $t$ , Poissonprocessen  $N(\cdot)$ , pulsstørrelsen  $S$  (= amplituden) samt pulsvarigheden  $D$ . Lastprocessen kan da skrives som

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{n=0}^{N(t)} h(t, \{T_i\}, S_n, D_n) \quad (1)$$

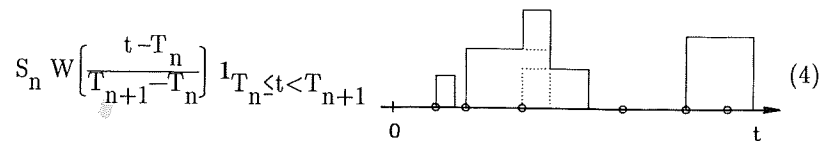
hvor vi har skrevet Poissonprocessen  $N(\cdot)$  som følgen  $\{T_i\}$  af springpunkter. Eksempler er den sammensatte Poissonpunktproces, hvor lastpulsen har formen



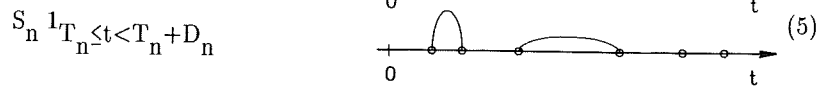
Poisson "square wave" processen, hvor lastpulsen har formen, se eksempel 15.1,



og som er et specialtilfælde af Poisson pulsprocessen, hvor lastpulsen har formen



Heri er  $W(\cdot)$  pulsformfunktionen med intervallet  $[0,1]$  som definitionsmængde. Endelig skal nævnes den filtrerede Poisson "square wave" proces, hvor lastpulsens form er



og hvor lastpulserne kan overlape hinanden.

Med denne type lastmodeller bliver lastkombinationsproblemet ganske vanskeligt. Her er den sammensatte Poissonpunktproces defineret ved (2) en vigtig undtagelse. Dette hænger sammen med, at summen af et vilkårligt antal indbyrdes uafhængige Poissonprocesser er en Poissonproces med intensitet  $c_1 + \dots + c_m$ , hvor  $c_1, \dots, c_m$  er de enkelte Poissonprocessers intensiteter. Da lastpunkterne er uden varighed og springene i en Poissonproces er adskilte i tid, vil lastpulserne nemlig aldrig overlapper hinanden.

Antag, at lastpulserne i den ite proces er indbyrdes uafhængige og ensfordelte med fordelingsfunktionen  $F_i(x)$  og betegn den komplementære fordelingsfunktion ved  $\bar{F}_i(x) = 1 - F_i(x)$ . Da er sandsynligheden for, at der i den ite proces indtræffer en lastpuls med amplitude større end  $x$  i tidsintervallet fra  $t$  til  $t + \Delta t$ , lig med  $c_i \bar{F}_i(x) \Delta t +$  led af højere orden i  $\Delta t$ . Den tælleproces, der opregner antallet af lastpulser med amplitude større end  $x$ , er altså

en Poissonproces med intensitet  $c_i \bar{F}_i(x)$ . For summen af de  $m$  sammensatte Poissonpunktprocesser har vi derfor, at den tilsvarende tælleproces er en Poissonproces  $N(t)$  med intensitet  $c_1 \bar{F}_1(x) + \dots + c_m \bar{F}_m(x)$ . Sandsynligheden for, at der ikke indtræffer en lastpuls, der overskrider  $x$  inden for intervallet  $[0, T]$ , er altså

$$P[N(T) - N(0) = 0] = \exp\left[-T \sum_{i=1}^m c_i \bar{F}_i(x)\right] \quad (6)$$

Som funktion af  $x$  er højre side af (6) netop fordelingsfunktionen for den maksimale lastpulsamplitude (eller lastvirkningsamplitude, hvis lastamplituderne er blevet multipliceret med de relevante influensfaktorer) inden for tidsintervallet  $[0, T]$ .

Denne simple model er anvendelig, når lastpulsvarighederne er meget små i forhold til tidsafstandene mellem lastpulserne i alle de lastprocesser, der skal kombineres. Hvis denne forudsætning er tvivlsom, kan man på grundlag af de følgende argumenter indføre korrektioner til (6), der tager hensyn til muligheden for overlappende lastpulser. Disse korrektioner giver en vis overvurdering af sandsynligheden for, at den kombinerede lastproces får et udfald med en lastværdi større end  $x$  i intervallet  $[0, T]$ . Fremgangsmåden er dog kun rimelig, hvis det kan forudsættes, at lastvarighederne er væsentlig mindre end tidsafstandene mellem lastpulserne.

Lad os antage, at lastprocesserne, der skal kombineres, er indbyrdes uafhængige filtrerede Poisson "square wave" processer med  $E[D_n] \ll E[T_{n+1} - T_n] = 1/c$ , se (5). Desuden forudsættes, at alle pulsamplituder og pulsvarigheder inden for samme proces er ensfordelte og indbyrdes uafhængige, samt at amplituder og varigheder er indbyrdes uafhængige. I det følgende ændres betydningen af indiceringen, således at  $F_{D_i}(x)$  og  $F_{S_i}(x)$  herefter betegner fordelingsfunktionerne for henholdsvis pulsvarigheden og pulsamplituden i den ite proces.

Sandsynligheden for, at der i tidsintervallet  $[t, t + \Delta t]$  indtræffer en lastpuls i den ite proces efterfulgt af en eller flere lastpulser i den jte proces inden for varighedsintervallet givet ved  $D_j$ , der forudsættes at have tæthedsfunktionen  $f_{D_j}(x)$ , er åbenbart

$$[c_i \Delta t + o(\Delta t)] \int_0^{\infty} (1 - e^{-c_j x}) f_{D_i}(x) dx \leq c_i c_j E[D_i] \Delta t + o(\Delta t) \quad (7)$$

idet  $1 - e^{-c_j x} < c_j x$  er sandsynligheden for, at der indtræder mindst en lastpuls i proces j inden for et tidsinterval af længden  $x$ . For  $E[D_i] \ll 1/c_j$  er der kun lille forskel mellem de to sider af (7). Den betragtede hændelse implicerer, at der umiddelbart efterfølgende den i tidsintervallet  $[t, t+\Delta t]$  indtrædende lastpuls i den ite proces er et overlap med en lastpuls fra den jte proces. Ved ombytning af i og j fås en hændelse, der implicerer et tilsvarende overlap. Den hændelse, at få overlap umiddelbart efter forekomst af en lastpuls enten fra den ite proces eller den jte proces i tidsintervallet  $[t, t+\Delta t]$ , er foreningshændelsen af de to hændelser. Disse to hændelser er ikke disjunkte. Overlaphændelser mellem lastpulser i de to processer forekommer altså som begivenhederne i en Poissonproces med en intensitet, der er mindre end

$$c_{ij} = c_i c_j (E[D_i] + E[D_j]) \quad (8)$$

På grund af de overlappende lastpulser vil intensiteten af Poissonpunktprocessen med isolerede lastpulser inden for den ite proces være mindre end  $c_i$ .

For tilfældet  $m = 2$  i (6) får vi altså, at (6) kan korrigeres til

$$P(\max_{[0, T]} \{\text{kombineret lastproces}\} \leq x) \geq$$

$$\exp\{-T[c_1 \bar{F}_{S_1}(x) + c_2 \bar{F}_{S_2}(x) + c_{12} \bar{F}_{S_1+S_2}(x)]\} \quad (9)$$

Vi kan nu gå videre og se på overlap af 3 lastpulser, en fra hver af processerne med numre i, j og k. Her bliver sandsynlighedsproblemet meget vanskeligere. Vi vil derfor nøjes med at se på en hændelse, der omfatter overlaphændelsen, men ikke nødvendigvis medfører denne. Betragt den hændelse, at der i intervallet  $[t, t+\Delta t]$  indtræffer en lastpuls i den kte proces efterfulgt af en eller flere par af overlappende lastpulser fra den ite og den jte proces med start inden for varighedsintervallet givet ved  $D_k$ . Efter princippet i (7) har vi da med brug af (8), at intensiteten af Poissonprocessen af disse hændelser er

mindre end

$$c_i c_j (E[D_i] + E[D_j]) c_k E[D_k] \quad (10)$$

Disse hændelser implicerer overlap af en lastpuls fra den kte proces med en lastpuls fra den ite proces eller den jte proces hvor lastpulserne fra de to sidste processer overlapper. Rækkefølgen for lastpulsstart i tid er enten k, i, j eller k, j, i med lastpulsstart for den kte proces i intervallet  $[t, t+\Delta t]$ . Da der herudover er 2 indeksskombinationer startende med henholdsvis i og j, der kan medføre overlap af alle tre lastpulser, finder vi, at Poissonprocessen med intensiteten

$$2c_{ijk} = 2 c_i c_j c_k (E[D_i]E[D_j] + E[D_i]E[D_k] + E[D_j]E[D_k]) \quad (11)$$

har større intensitet end den Poissonproces, hvor begivenhederne er overlap af 3 lastpulser, en fra hver af de tre lastprocesser.

For tilfældet  $m = 3$  i (6) har vi dermed, at (6) kan korrigeres til

$$P(\max_{[0, T]} \{\text{kombineret last}\} \leq x) \geq$$

$$\exp\left\{-T\left[\sum_{i=1}^3 c_i \bar{F}_{S_i}(x) + \sum_{i \neq j}^3 \sum_{j \neq k}^3 c_{ij} \bar{F}_{S_i+S_j}(x) + 2 \sum_{i \neq j \neq k}^3 \sum_{j \neq k}^3 c_{ijk} \bar{F}_{S_i+S_j+S_k}(x)\right]\right\} \quad (12)$$

Denne ulighed forudsætter, at lastpulserne alle er ikke-negative. Uden denne egenskab kan højre side dog stadig være en god tilnærmelse til venstre side under den grundlæggende forudsætning, at lastpulsvarighederne er små i forhold til tidsafstandene mellem dem. Princippet efter hvilket (12) generaliseres er nu klart. Vi har

$$P(\max_{[0, T]} \{\text{kombineret last}\} \leq x) \geq$$

$$\exp\left\{-T \sum_{n=1}^m (n-1)! \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n} \dots \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} c_{i_1 i_2 \dots i_n} \bar{F}_{S_{i_1} + \dots + S_{i_n}}(x)\right\} \quad (13)$$

Ved omfattende simuleringstudier har *Wen* [15.7,8] fundet, at (13) også efter fjernelse af faktorerne  $(n-1)!$  i en lang række eksempler giver en god approksimation til venstre side. Denne model for kombination af intermitterende lastprocesser med "sjældne" kortvarige lastpulser betegnes i litteraturen som *Wens lastsammenfaldsmodel* ("load coincidence model"). Vi ser, at uligheden (13) gælder for lastprocesser af formen (1) (og ikke blot for den filtrerede Poisson "square wave" proces), hvis lastpulserne alle er ikke-negative, og  $S$  betegner den maksimale lastværdi inden for lastpulsen.

Til slut skal bemærkes, at den kombinerede intermitterende lastproces med "sjældent" forekommende kortvarige lastpulser i praksis sædvanligvis skal kombineres med en intermitterende lastproces, der har langvarige lastpulser og meget kortvarige tidsintervaller uden last (lastproces for blivende last og nyttelast). En eksakt løsning på dette problem eksisterer for summen af en sammensat Poissonpunktproces (proces 1) og en Poisson "square wave" proces (proces 2). Uden at gå ind på beviset, [15.3], har vi, at

$$P\left\{\max_{[0, T]} \{X_1(t) + X_2(t)\} \leq x\right\} = g(T, x) e^{-c_2 T} \quad (14)$$

hvor funktionen  $g(T, x)$  tilfredsstiller integralligningen

$$F(t, x) + c_2 \int_0^t F(t-u, x) g(u, x) du = g(t, x) \quad (15)$$

med

$$F(t, x) = \int_0^x f_{X_2}(x-y) \exp\{-c_1 t [1 - F_{X_1}(y)]\} dy \quad (16)$$

## 15.6 Historiske og bibliografiske noter

Vurderingen af svigtsandsynligheden ved det forventede antal udkrydsninger gennem grænsetilstandsfladen blev først anvendt af *V.V. Bolotin* i 1959 [15.1, p.371] og i den mere komplette form (15.2.6) af *M. Shinozuka* i 1964 [15.6].

Lastsammenfaldsstudier for pulsprocesmodeller af Poissonstype er først blevet systematisk dyrket af *Y-K. Wen* i 1977 [15.7], og han har i 1990 udgivet en bog om emnet [15.8]. Integralligningen (15.5.15) er formuleret af *A.M. Hasofer* i 1974 [15.3].

Eksempler på brugen af de i dette kapitel beskrevne stokastiske processer til modellering af de almindeligt forekommende lasttyper er givet af *HOM et al* [15.4]. Der er naturligvis herudover produceret en meget omfattende litteratur, der anvender de stokastiske processers begrebsapparat på bærende konstruktioners sikkerhed. Da nærværende kapitel kun er indledende, falder omtalen af denne litteratur uden for bogens rammer, ligesom der ikke skal gives en historisk redegørelse for den enorme litteratur om stokastiske processer i almindelighed. Det skal her blot nævnes, at *H. Cramers* og *M.R. Leadbetters* bog *Stationary and Related Stochastic Processes* [15.2] har været en nyttig kilde for forfatterne. Specielt vedrørende Poisson processer skal blandt mange bøger også nævnes *E. Parzens* bog *Stochastic Processes* [15.5], der er rimeligt let tilgængelig for ingeniører med en matematisk baggrund.

## Referencer

- 15.1 V.V. Bolotin: *Wahrscheinlichkeitsmethoden zur berechnung von konstruktionen*, VEB Verlag für Bauwesen Berlin, Berlin, Germany, 1981.
- 15.2 H. Cramér and M.R. Leadbetter: *Stationary and Related Stochastic Processes*, Wiley, New York, 1967.
- 15.3 A.M. Hasofer: Time Dependent Maximum of Floor Live Loads, *J. Eng. Mech.*, ASCE, vol.100, 1974.
- 15.4 H.O. Madsen, S. Krenk and N.C. Lind: *Methods of Structural Safety*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
- 15.5 E. Parzen: *Stochastic Processes*. Holden-Day, San Francisco, 1962.



- 15.6 M. Shinozuka: Probability of Structural Failure under Random Loading, *Journal of the Eng. Mech. Div.*, ASCE, vol.90, 1964.
- 15.7 Y-K.Wen: Statistical Combination of Loads, 3. *Journal of Struct. Div.*, ASCE, vol.103, 1977.
- 15.8 Y-K.Wen: *Structural Load Modeling and Combination for Performance and Safety Evaluation*. Developments in Civil Engineering, Elsevier, Amsterdam, 1990.

## APPENDIKS 1. NORMKALIBRERING

### A1.1 Normer

Det danske system af konstruktionsnormer er beskrevet i kapitel 2. De danske normer udgives af Dansk Ingeniørforening og er et meget vigtigt redskab, hvormed den samlede ingeniørstand overfører sin viden og erfaring til gavn for den enkelte ingeniør. Ved anvendelse af systemet af normer kan den enkelte ingeniør i almindelighed regne med at producere økonomisk konkurrencedygtige konstruktioner med tilstrækkelig sikkerhed. I modsætning til mange andre landes normer er de danske normer således ikke i udgangspunktet lovmæssige dokumenter. De bliver dog dette i forskellige sammenhænge, hvor det forlanges, at normerne skal være opfyldt.

Som beskrevet i kapitel 2 er de danske normer baseret på benyttelse af partialkoefficientmetoden, ligesom normer i alle andre lande i øjeblikket er det. I nogle lande benyttes "de tilladelige spændingers metode", men denne falder også inden for klassen af partialkoefficientmetoder, ligesom den i USA benyttede "Load and Resistance Factor Design" metode.

I den nære fremtid bliver der uden tvivl udfærdiget normer baseret på direkte benyttelse af sikkerhedsindeksmetoden. Sådanne normer fastlægger ikke karakteristiske værdier, partialkoefficienter og lastreduktionsfaktorer, men derimod størrelser som eksempelvis krævede værdier af sikkerhedsindeks, fordelinger for inputvariable, modeller for tidlig og rumlig variation af laster, valg af modelusikkerhed, og krævet nøjagtighed af metoder for beregning af sikkerhedsindeks. Appendiks 5 i denne bog indeholder et udkast til en sådan norm baseret på benyttelse af sikkerhedsindeksmetoden.

I den lidt fjernere fremtid må det også forventes, at der udarbejdes normer baseret på en sikkerhedsanalyse, der benytter en socioøkonomisk optimering. Krævede værdier for sikkerhedsindeks vil da ikke blive foreskrevet, men der vil blive givet forskrifter for bestemmelse af omkostninger ved svigt, specielt de vanskeligt fastsættelige omkostninger som tab af menneskeliv, miljøskader og ødelæggelse af kulturelle værdier.

## A1.2 Principper for normkalibrering

Ved normkalibrering forstås den proces, hvorved der fastsættes værdier for parametrene i en norm. For en norm baseret på brug af partialkoefficientmetoden er disse parametre: fraktilværdier, partialkoefficienter og lastreduktionsfaktorer. En norm kan kalibreres ved tre principielt forskellige metoder, nemlig ved brug af "skøn", "tilpasning" eller optimering.

Kalibrering ved brug af "skøn" var den mest anvendte metode indtil for et kvart århundrede siden. Hvis erfaringerne med brug af en norm over en årrække var gode, ville de valgte parameterværdier blive opfattet som korrekte, eller, hvis der var et økonomisk pres herfor, ville nogle af parameterværdierne blive ændret i retning af billigere og mindre sikre konstruktioner. Omvendt ville en utilfredsstillende erfaring om for mange svigt føre til en ændring af parameterværdier i retning af mere sikre konstruktioner. I det lange løb vil parameterværdierne stabiliseres, og der vil ikke være nogen grund til at ændre disse hverken i den ene eller anden retning. Der er naturligvis en række ulemper ved at basere sig på kalibrering ved "skøn". Specielt virker det hæmmende på brug af nye materialer, konstruktionsprincipper og udbygning i nye områder med dårligt kendte ekstreme belastninger. På grund af mangelen på en rationel metode vil normer, der omfatter sådanne udviklinger, ofte føre til unødigt sikre og dyre konstruktioner og således lægge hindringer i vejen for den teknologiske udvikling.

Kalibrering af en norm ved "tilpasning" er aktuel, hvor man ønsker at ændre formatet for normen, eksempelvis for at få en simplere norm eller i forbindelse med national eller international harmonisering. Kalibreringen består da i at bestemme parametrene i den nye norm, således at den i størst mulig udstrækning fører til samme konstruktionsdimensioner som brug af den allerede eksisterende og underforstået velfungerende norm. Kalibreringen er derfor udelukkende baseret på sammenlignende konsekvensberegninger.

En norm kan endelig kalibreres ved en mere formel proces baseret på eksplicit optimering. Mange normer, der er udarbejdet i de seneste 15 – 20 år er baseret på en optimering i større eller mindre udstrækning. I det følgende beskrives en mulig fremgangsmåde for optimering af en norm baseret på brug af partialkoefficientmetoden. Normens formål defineres ved en ønsket værdi af sikkerhedsindeks for de konstruktioner, der skal dimensioneres efter

normen.

## A1.3 Formulering af normoptimering

Formuleringen af en normoptimeringsopgave kan beskrives ved fem trin. Denne femtrinsformuleringsmetode er måske både for enkel og for stiv. Formentlig beskriver den ikke særligt godt den måde, hvorpå et normoptimeringsproblem i praksis bliver formuleret. Det er heller ikke en forskrift for formuleringen, men er snarere at opfatte som en skematisk grov fremgangsmåde for de vigtigste komponenter af processen.

Det *første trin* består i at definere den klasse af konstruktioner, normen skal vedrøre. Denne definition kan indeholde begrænsninger i eksempelvis geografiske områder, svigtmåder, materialer og geometriske forhold.

Det er hensigtsmæssigt at indføre begrebet normformat tilknyttet en norm. Bortset fra veldefinerede fysiske eller matematiske konstanter (fx vands massefylde eller tyngdeaccelerationen), kan de numeriske konstanter indeholdt i en norm betragtes som variable parametre. Lader man disse variable antage alle mulige forskellige værdier, dannes der en mængde af forskellige normer. Denne mængde kaldes *normformatet* for normen, og den aktuelle norm er en af mange realisationer af formatet.

Et normformat kan være mere eller mindre kompliceret. Således kan et bestemt sæt af karakteristiske værdier og en simpel tabel af tilhørende partialkoefficienter være foreskrevet. Alternativt kan mere komplicerede partialkoefficienter være givet som funktioner af forskellige tilfælde (fx forskellige belastningsfaktorer for stålsøjler og bjælker eller for forskellige typer af konstruktioner afhængig af arten og størrelsen af risikoen) eller foreskrevet implicit igennem matematiske udtryk. Med et kompliceret format er det i almindelighed muligt at opnå konstruktioner, som er tættere ved at være optimale, dvs tættere ved at opfylde normens formål. Man skal være opmærksom på, at en nøjagtig definition af normens område er en nødvendighed. Et sæt lastfaktorer, som er bedst egnet for en given teknologi, er ikke nødvendigvis bedst for en anden teknologi.

Det *andet trin* i udarbejdelsen af en norm er at definere normens formål. For en norm baseret på benyttelse af partialkoefficientmetoden kan formålet være defineret som maksimering af forventet nytteværdi – se kapitel 12,

opnåelse af en specificeret svigtsandsynlighed, eller opnåelse af et specificeret sikkerhedsindeks. Formålet er således defineret ved en sikkerhedsmetode på et mere avanceret niveau.

Det *trede trin* er bestemmelsen af hyppigheden for forekomst af bestemte parameterstørrelser. Da en norm i almindelighed ikke både kan være enkel og eksakt opfylde formålet, er det nødvendigt at definere de mest betydningsfulde konstruktionsdata, for hvilke formålet må opfyldes så godt som muligt. Hvis således de fleste konstruktionspåvirkninger på et tværsnit er begrænset til et forhold mellem egenvægt og bevægelig belastning mellem 1/2 og 2, er det i almindelighed muligt at opfylde formålet bedre i dette interval, end det ville være over hele intervallet fra 0 til  $\infty$ .

Det *fjerde trin* består i at vælge et mål for overensstemmelsen mellem en norm og dens formål. Som et eksempel kan man tænke sig, at formålet er opnåelse af en tilstræbt svigtsandsynlighed  $p_t$  med et tilhørende sikkerhedsindeks  $\beta_t = -\Phi^{-1}(p_t)$ . Hvis  $\beta$  er værdien af sikkerhedsindeks for et dimensioneringstilfælde indenfor den i det første trin definerede klasse af konstruktioner, kan uoverensstemmelsen måles ved forskellen mellem den forventede totale omkostning for værdien  $\beta$  og for den tilstræbte værdi  $\beta_t$ . Den forventede totale omkostning  $C_T$  kan enkelt skrives som, se eksempel 12.1,

$$C_T = C_I + C_F p \quad (1)$$

hvor  $p$  er den til  $\beta$  svarende svigtsandsynlighed,  $C_I$  er initialomkostningen og  $C_F$  er svigtomkostningen. Initialomkostningen  $C_I$  kan som i eksempel 12.1 approksimeres ved

$$C_I = a(1+b\beta) \quad (2)$$

hvor  $a$  og  $b$  er konstanter for den enkelte konstruktionsdel. De forventede svigtomkostninger  $C_F p$  kan approksimeres ved

$$C_F p = C_F \Phi(-\beta) \approx C_F c \exp\left[-\frac{\beta}{d}\right] \quad (3)$$

hvor  $d \approx 0.23$  fører til en god tilnærmelse over intervallet  $10^{-3} - 10^{-6}$ . Som

funktion af  $\beta$  bliver den totale forventede omkostning da

$$C_T(\beta) = a(1+b\beta) + C_F c \exp\left[-\frac{\beta}{d}\right] \quad (4)$$

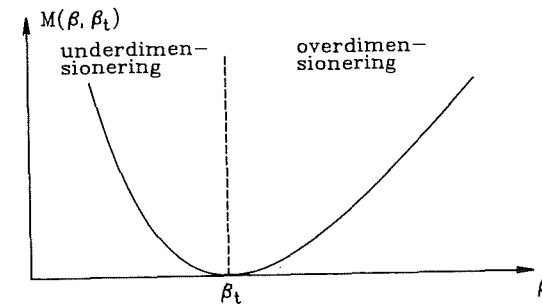
Ifølge normens formål (optimalitetspostulatet, kapitel 12) antager denne funktion sin mindste værdi for  $\beta = \beta_t$ . Heraf følger, at

$$C_F = \frac{abd}{c} \exp\left[\frac{\beta_t}{d}\right] \quad (5)$$

således at

$$\frac{C_T(\beta) - C_T(\beta_t)}{abd} = \frac{\beta - \beta_t}{d} - 1 + \exp\left[-\frac{\beta - \beta_t}{d}\right] \quad (6)$$

Højre side af (6) definerer en funktion  $M(\beta, \beta_t)$ , som er proportional med tabet ved, at  $\beta$  afviger fra  $\beta_t$ . I det følgende betegnes en sådan funktion en bødefunktion (penalty function). Grafen for højre side af (6) er vist i figur A1.1.



Figur A1.1. Bødefunktion defineret ved (A1.3.6) til brug for normkalibrering mht opnåelse af tilstræbt sikkerhedsindeksværdi  $\beta_t$ .

Det vægtede gennemsnit

$$\Delta = \sum_{\text{geografisk område}} \sum_{\text{materialer}} \sum_{\text{svigt- måder}} \sum_{\text{parametre}} p_i M(\beta_i, \beta_{t,i}) \quad (7)$$

af bødefunktionen er et mål for overensstemmelsen mellem en norm og dens formål. Vægtningen foretages over alle konstruktioner inden for normens område, som defineret under første trin, og vægtene  $p_i$  vælges på grundlag af de under tredje trin bestemte hyppigheder under iagttagelse af variationen mht i af parametrene  $a$  og  $b$ , der bestemmer initialomkostningen i det ite dimensioneringstilfælde. Der kan ses bort fra indflydelsen fra  $a$  og  $b$ , såfremt prisen for de konstruktionselementer, der omfattes af normen, ikke er alt for forskellige. Der er i formlen åbnet mulighed for forskellige værdier af den specificerede værdi  $\beta_t$ , eksempelvis for forskellige brudformer. Normoptimeringen består da i at bestemme parametrene for normformatet, således at  $\Delta$  antager sin mindste værdi. Optimeringen kan eventuelt foretages med en ekstra betingelse  $\beta_i \geq \beta_{i,\min}$ , således at der defineres en mindste tilladelig værdi for  $\beta$ . Det er også muligt på forhånd at fastlægge værdien af nogle af parametrene.

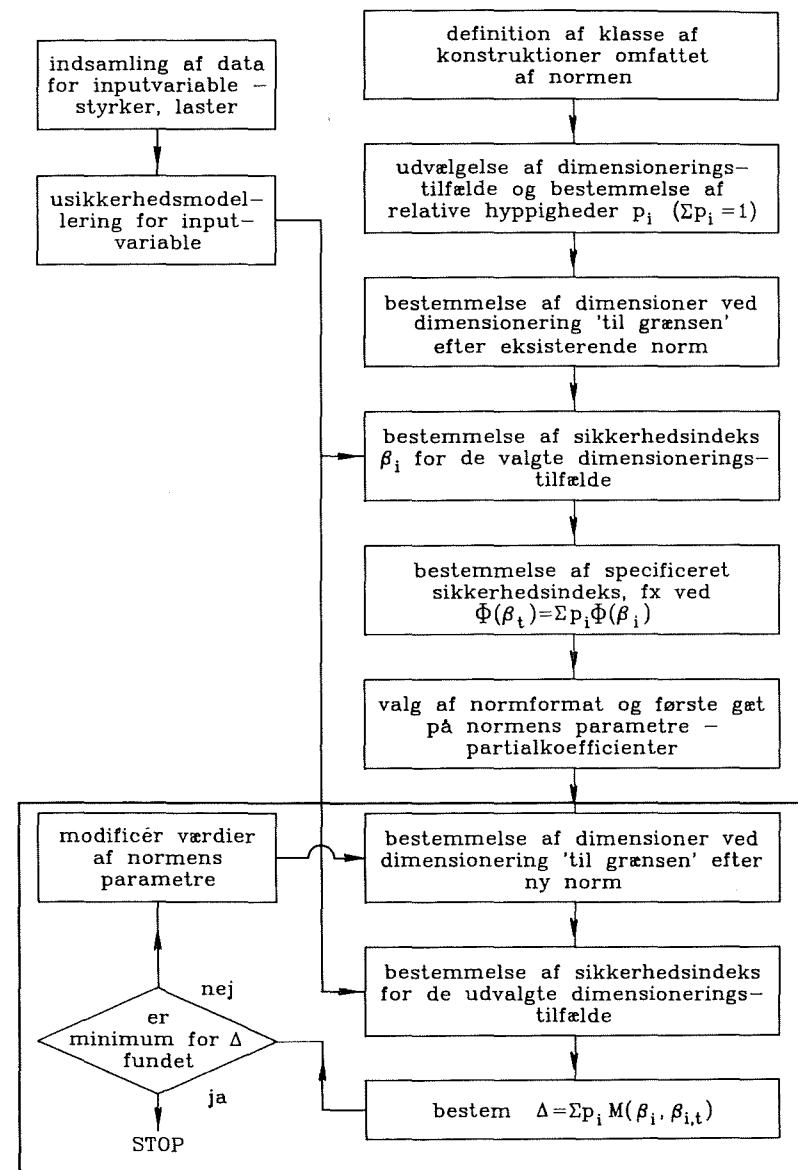
Det ses iøvrigt af figur A1.1, at bødefunktionen defineret ved (6) er skæv, således at underdimensionering giver større bøde end overdimensionering. En simple bødefunktion, som ikke gengiver denne skævhed, men som ofte er blevet anvendt, er kvadratet på afvigelsen  $\beta - \beta_t$ . Det endelige resultat af normoptimeringen er dog kun lidt følsomt over for valget af bødefunktion.

Et eksempel på resultater fra en optimering stammer fra kalibreringen af 1977-udgaven af den canadiske norm for bygningskonstruktioner. Normformatet blev valgt som

$$\varphi R \geq \begin{cases} 1.25D + 1.50L \\ 1.25D + 0.70 (1.50L + 1.40W) \end{cases} \quad (8)$$

hvor de store bogstaver symboliserer karakteristiske værdier for styrke  $R$ , og effekter fra egenlast  $D$ , nyttelast  $L$  og vindlast  $W$ , og hvor  $\varphi$  er en partialkoefficient på styrken. Partialkoefficienter og reduktionsfaktor for lasteffekterne var valgt på forhånd. Som tilstræbt værdi af sikkerhedsindeks blev valgt

$$\beta_t = \begin{cases} 4.00 \text{ for brud ved flydning i træk eller bøjning} \\ 4.75 \text{ for tryk- eller stabilitetsbrud} \\ 4.25 \text{ for forskydningsbrud} \end{cases} \quad (9)$$



Figur A1.2. Forløbsskema for normoptimering.

Disse valg blev gjort ud fra en analyse af sikkerhedsindeks for konstruktions-elementer dimensioneret efter den på daværende tidspunkt gældende norm. Bødefunktionen blev valgt som kvadratet på  $\beta - \beta_t$ , og resultatet af optimeringen blev

koldbearbejdet stål	flydning	$\varphi_1 = 0.90$
varmevalset stål	{flydning tryk/instabilitet	$\varphi_2 = 0.85$
armeret beton	{bøjning tryk/instabilitet forskydning	$\varphi_4 = 0.83$ $\varphi_5 = 0.68$ $\varphi_6 = 0.64$

Et forløbsskema, der angiver de forskellige trin i optimeringen, er vist på figur A1.2.

Det femte trin består i udvælgelsen af en følge af normformater arrangeret i rækkefølge af mindre og mindre enkelhed. Selv det simplest mulige formål kan ikke opfyldes eksakt af en norm undtagen med et for praksis uacceptabelt niveau af kompleksitet. Søgningen må begrænses til formater, som fører til tilstrækkeligt enkle projekteringsmetoder. I ethvert format eksisterer der i almindelighed en optimal realisation, som kommer nærmest til formålet. Man kan da udvælge den bedste af disse realisationer som den, der på simpleste måde opfylder betingelsen.

En sådan optimeringsproces er ifølge [A1.1] blevet anvendt på den britiske norm for stålbroer BS 5400: Del 3. Dette kalibreringseksempel er også detaljeret beskrevet i [A1.2, p.196].

#### A1.4 Designværdiformat

Designværdiformatet repræsenterer et normformat, der er analogt til formaterne beskrevet i det foregående afsnit, men som nærmer sig mere til formatet for en norm, der er baseret på benyttelse af sikkerhedsindeksmetoden. De følgende betragtninger er baseret på enkelt punkt FORM (det geometriske sikkerhedsindeks).

For en uafhængig inputvariabel X er sammenhængen mellem den regningsmæssige værdi  $x_d$  (der i det følgende betegnes *designværdien*) i det fysiske

formuleringsrum og den tilsvarende koordinat  $\beta\alpha$  til det globalt mest centrale punkt på grænsetilstandsfladen i det standardiserede gaussiske rum bestemt ved

$$F_X(x_d) = \Phi(\beta\alpha) \quad (1)$$

Designværdien  $x_d$  ( $\gamma x_k$  eller  $x_k/\gamma$ ) er da

$$x_d = F_X^{-1}(\Phi(\beta\alpha)) \quad (2)$$

For nogle almindelige fordelinger med middelværdi  $\mu$  og variationskoefficient V er resultatet

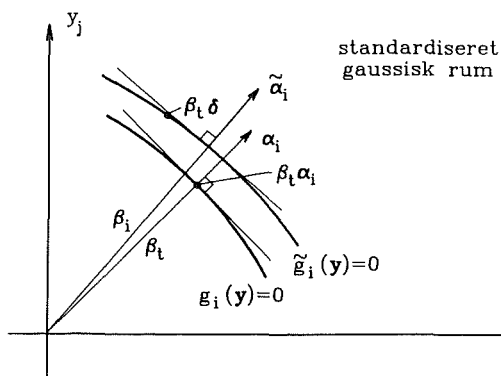
$$x_d = \begin{cases} \mu(1 + \alpha\beta V) & \text{normalfordeling} \\ \mu \exp(\alpha\beta V - \frac{1}{2} V^2) & \text{lognormalfordeling} \\ \mu(1 - 0.78V(0.577 + \log(-\log\Phi(-\alpha\beta)))) & \text{Gumbelfordeling} \end{cases} \quad (3)$$

Såfremt middelværdien  $\mu$  er kendt, kan designværdien således direkte bestemmes med eksplicit hensyntagen til fordelingstype ( $F_X$ ), variationskoefficient V, betydning af usikkerhed ( $\alpha$ ) og sikkerhedsniveau ( $\beta$ ). Når designværdien er bestemt, kan man med en specificeret karakteristisk værdi  $x_k$  bestemme partialkoefficienten ved

$$\gamma = \begin{cases} x_d/x_k & \text{for en lastvariabel} \\ x_k/x_d & \text{for en styrkevariabel} \end{cases} \quad (4)$$

For de mulige dimensioneringstilfælde omfattet af en norm vil retningsvektoren  $\alpha$  for et givet tilstræbt sikkerhedsindeks  $\beta_t$  variere fra tilfælde til tilfælde. Med simplifikation for øje kan defineres et optimeringsproblem for valg af en fastholdt erstatningsvektor  $\delta$  for  $\alpha$ , således at funktionen  $\Delta$  i (A1.3.7) minimeres. I dette optimeringsproblem kræves ikke, at  $\delta$  er en enhedsvektor. For at opnå forøget approksimationsnøjagtighed kan man vælge at opdele mængden af normens dimensioneringstilfælde i delmængder og bestemme den optimale  $\delta$  i hver delmængde. Optimeringsproblemet defineres nærmere i det

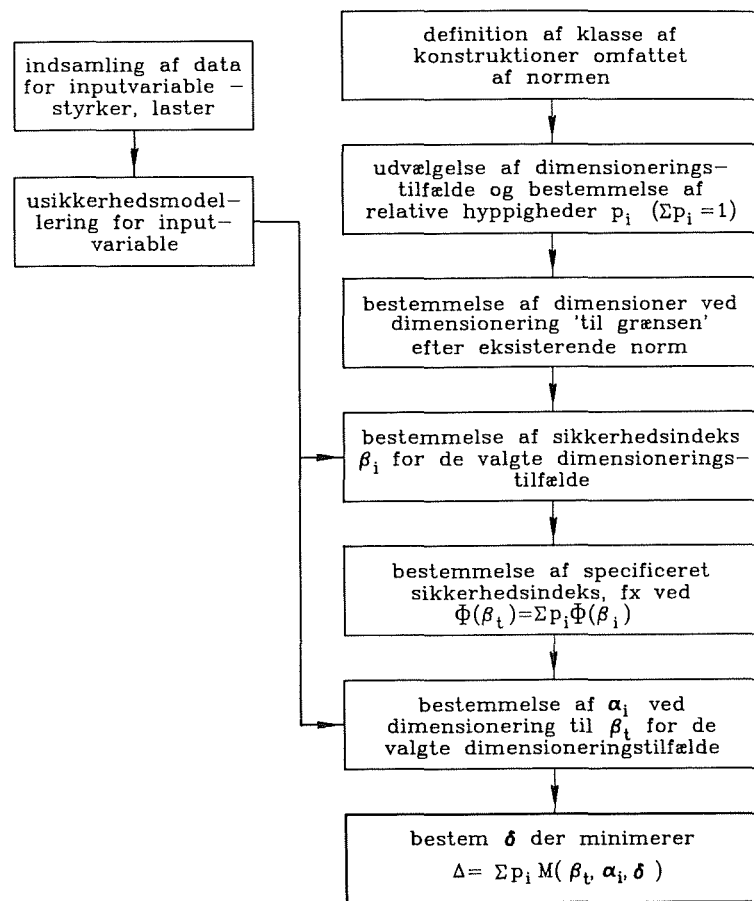
følgende. Med  $\delta$  fastlagt skal designværdierne i det standardiserede gaussiske rum altså vælges som koordinaterne i vektoren  $\beta_t \delta$ . I det fysiske formuleringsrum bestemmes designværdierne i tilfælde af uafhængige stokastiske inputvariable ud fra (2) ved indsættelse af de respektive koordinater i  $\beta_t \delta$ . Da  $\beta_t \delta$  i almindelighed ikke ligger på grænsetilstandsfladerne for de i optimeringsprocessen indgående dimensioneringstilfælde, der alle har sikkerhedsindeks  $\beta_t$ , betyder anvendelsen af det faste designpunkt  $\beta_t \delta$  ved dimensionering "til grænsen" i det ite dimensioneringstilfælde som erstatning for anvendelsen af designpunktet  $\beta_t \alpha_i$  (det mest centrale punkt på grænsetilstandsfladen  $g_i(\mathbf{y}) = 0$ ) at konstruktionen dimensioneres til at have et sikkerhedsindeks  $\beta_i$ , der i almindelighed er forskelligt fra  $\beta_t$ , og at have en grænsetilstandsflade  $\tilde{g}_i(\mathbf{y}) = 0$ , således at  $\tilde{g}_i(\beta_t \delta) = 0$ . Punktet  $\beta_t \delta$  vil i almindelighed ikke være det mest centrale punkt på denne grænsetilstandsflade. Det vil heller ikke nødvendigvis være en god approksimation til dette punkt. Situationen er illustreret i figur A1.3.



Figur A1.3. Illustration af grænsetilstandsflader og sikkerhedsindeks for det ite dimensioneringstilfælde i optimering af designværdiformat med fast erstatningsvektor  $\delta$  for retningsvektoren  $\alpha_i$  til det mest centrale grænsetilstandspunkt.

For en næsten plan grænsetilstandsflade  $\tilde{g}_i(\mathbf{y}) = 0$  bliver sikkerhedsindeks  $\beta_i$  med tilnærmelse

$$\beta_i \approx \beta_t \alpha_i' \delta \quad (5)$$



Figur A1.4. Forløbsskema for normoptimering efter designværdiformat

Dette resultat kan tolkes direkte ud fra figur A1.3 ved geometriske betragtninger. Det følger ved brug af Taylors formel og af (8.2.25), hvor  $\theta$  er den relevante designvariabel. Vi har

$$\begin{aligned} \beta_i &\approx \beta_t + \left(\frac{d\beta}{d\theta}\right)_{\beta=\beta_t} d\theta = \beta_t + \alpha_i' \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \theta}\right)_{\beta=\beta_t} d\theta \\ &\approx \beta_t + \alpha_i' (\beta_t \tilde{\alpha}_i - \beta_t \alpha_i) = \beta_i \alpha_i' \tilde{\alpha}_i \end{aligned} \quad (6)$$

hvor  $\tilde{\alpha}_1$  er retningsvektoren til det mest centrale punkt på grænsetilstandsfladen  $\tilde{g}_1(\mathbf{y}) = 0$ . Af (6) følger det næsten trivielle resultat  $\alpha_1^t \tilde{\alpha}_1 \approx 1$ , altså at  $\alpha_1 \approx \tilde{\alpha}_1$ . Hvis grænsetilstandsfladen er plan gælder, at

$$\beta_1 = \beta_t \tilde{\alpha}_1^t \delta \quad (7)$$

hvorefter (5) fremkommer ved at erstatte  $\tilde{\alpha}_1$  med  $\alpha_1$ .

Bødefunktionen i (A1.3.6) kan herefter med tilstrækkelig nøjagtighed modificeres til

$$M(\beta, \beta_t) = \frac{\beta_t(\alpha_1^t \delta - 1)}{d} - 1 + \exp\left[-\frac{\beta_t(\alpha_1^t \delta - 1)}{d}\right] \quad (8)$$

og optimeringen af det vægtede gennemsnit  $\Delta$  ifølge (A1.3.7) kan foretages. Et forløbsskema for denne normoptimering er vist i figur A1.4. I forhold til optimeringsforløbet i figur A1.2 er der opnået en stor regnetidsbesparelse fordi boksen "Bestemmelse af dimensioner ved dimensionering til grænsen efter ny norm" på grund af (5) kan flyttes uden for den egentlige optimering, og således kun skal gennemføres een gang. Den egentlige optimering kan gennemføres ved brug af en standardoptimeringsalgoritme.

Det skal bemærkes, at den fundne optimale erstatningsvektor  $\delta$  for  $\alpha$  kan benyttes med god tilnærmelse for andre specificerede værdier af  $\beta_t$  i rimelig nærhed af den værdi, der blev brugt ved optimeringen. Ved en moderat ændring af det ønskede sikkerhedsniveau er det derfor ikke nødvendigt at foretage en ny optimering, hvilket er tilfældet, hvis proceduren i figur A1.2 anvendes.

**Eksempel A.1.1** Et rektangulært tværsnit i en armeret betonbjælke har ved ren bøjning et brudmomentet  $M_u$  givet ved

$$M_u = \left[1 - K \frac{A_s f_y}{b h_n \sigma_c}\right] A_s f_y h_n \quad (9)$$

idet tværsnittet er forudsat at være normaltarmet.  $A_s$  er armeringens tværsnitsareal,  $f_y$  er armeringens flydespænding,  $\sigma_c^t$  er betonens trykbrudspænding,  $b$  er bredden af tværsnittet,  $h_n$  er den effektive højde, og  $K$  er en faktor, der afhænger af betonens arbejdslinje. For en linear-elastisk arbejdslinje er  $K = 2/3$ , medens  $K = 1/2$  for en idealplastisk arbejdslinje.

Det belastende bøjningsmoment består af et bidrag  $M_g$  fra egenvægt og et bidrag  $M_q$  fra bevægelig belastning, således at grænsetilstandsfunktionen i det fysiske formuleringsrum er bestemt ved

$$G = M_u - M_g - M_q \quad (10)$$

Tabel A1.1 viser usikkerhedsmodelleringen for dette eksempel. Seks forskellige dimensioneringstilfælde vælges svarende til tre værdier for forholdet  $r$  mellem middelværdierne af  $M_g$  og  $M_q$  og to værdier for variationskoefficienten for  $M_q$ . De seks dimensioneringstilfælde antages at forekomme lige ofte, dvs  $p_i = 1/6$ ,  $i = 1, 2, \dots, 6$ .

Parameter Middelværdi Variationskoefficient Fordelingstype

$M_g$	-	0.07	normal
$M_q$	-	0.15, 0.25	Gumbel
$\sigma_c^t$	35 MPa	0.10	lognormal
$f_y$	485 MPa	0.06	normal
$K$	0.55	0.05	lognormal
$h_n$	-	-	fast værdi
$A_s$	-	-	fast værdi

Tabel A1.1. Fordelinger for inputparametre til bøjningsbrudmodel for normaltarmet jernbetonbjælke.

Den tilstræbte værdi af sikkerhedsindeks er  $\beta_t = 5.00$ . For de seks dimensioneringstilfælde er bjælken dimensioneret således, at  $\beta = 5.00$ . Som dimensioneringsvariabel er valgt armeringsarealet  $A_s$ . Tabel A1.2 viser vektoren  $\alpha$  for de seks tilfælde og løsningen  $\delta$  til optimeringsproblemet (i optimeringen er komponenten af  $\delta$  svarende til  $K$  valgt til 0 på forhånd).

$E[M_g]/E[M_q]$	$v_{M_q}$	$M_g$	$M_q$	$\sigma'_c$	$f_y$	$K$	
1.0/1.0	0.15	[-0.12	-0.93	0.06	0.35	-0.03]	$= \alpha'_1$
3.0/1.0	0.15	[-0.34	-0.74	0.06	0.58	-0.03]	$= \alpha'_2$
1.0/3.0	0.15	[-0.04	-0.96	0.06	0.27	-0.03]	$= \alpha'_3$
1.0/1.0	0.30	[-0.06	-0.97	0.07	0.23	-0.04]	$= \alpha'_4$
3.0/1.0	0.30	[-0.17	-0.92	0.06	0.35	-0.03]	$= \alpha'_5$
1.0/3.0	0.30	[-0.02	-0.98	0.10	0.18	-0.04]	$= \alpha'_6$
		[-0.09	-0.88	0.09	0.53	0.00]	$= \delta'$

Tabel A1.2. Beregnede følsomhedsfaktorer (dvs komponenter til  $\alpha$ ) for hvert af 6 dimensioneringstilfælde for jernbetonbjælketværsnit med sikkerhedsindeks  $\beta = 5.00$ .

Designværdierne for de enkelte inputparametre beregnes herefter ved hjælp af (2). De bliver:  $M_{gd} = 1.03 E[M_g]$ ,  $M_{qd} = 2.35 (3.69) E[M_q]$  for de to værdier af  $v_{M_q}$ ,  $f_{yd} = 0.84 E[f_y]$ ,  $\sigma'_{cd} = 0.96 E[\sigma'_c]$ .

Bjælken er dernæst blevet dimensioneret baseret på disse designværdier. Dimensioneringsparameteren  $A_s$  er bestemt ved

$$A_s = \frac{h_n \pm \sqrt{h_n^2 - 4K(M_{gd} + M_{qd}) / (b\sigma'_{cd})}}{2K f_{yd} / (b\sigma'_{cd})} \quad (11)$$

Sikkerhedsindeks for de resulterende tværsnit er angivet i tabel A1.3. Det ses, at der er god overensstemmelse mellem den tilstræbte værdi  $\beta_t = 5.00$  og værdierne resulterende fra brug af den optimale erstatningsvektor  $\delta$  i tabel A1.2. Denne erstatningsvektor for  $\alpha$  er også blevet anvendt efter ændring af det tilstræbte sikkerhedsindeks til  $\beta_t = 3.00$ . Nye designværdier er blevet beregnet ved hjælp af (2) og sikkerhedsindeks for de resulterende tværsnit er angivet i tabel A1.3. Der ses at være en god overensstemmelse mellem den tilstræbte og de beregnede værdier af sikkerhedsindeks, selv om den optimale vektor  $\delta$  er beregnet for  $\beta_t = 5.00$ .

$E[M_g]/E[M_q]$	$v_{M_q}$	$\beta(\beta_t=5.00)$	$\beta(\beta_t=3.00)$
1.0/1.0	0.15	5.00	3.05
3.0/1.0	0.15	4.88	2.82
1.0/3.0	0.15	4.90	3.00
1.0/1.0	0.30	4.84	2.94
3.0/1.0	0.30	5.00	3.00
1.0/3.0	0.30	4.72	2.87

Tabel A1.3. Resulterende sikkerhedsindeks for hvert af 6 dimensioneringstilfælde af stålareal i jernbetonbjælketværsnit for fast erstatningsvektor  $\delta$ , der er optimal for  $\beta_t = 5.00$ .

Et sæt beregninger er også foretaget, hvor den effektive højde og ikke armeringsarealet er valgt som dimensioneringsparameter. Den effektive højde er bestemt ud fra designværdierne som

$$h_n = \frac{M_{gd} + M_{qd}}{A_s f_{yd}} + \frac{K A_s f_{yd}}{b \sigma'_{cd}} \quad (12)$$

Tabel A1.4 giver helt analogt til tabel A1.3 værdier for det resulterende sikkerhedsindeks for to værdier af det tilstræbte sikkerhedsindeks.

$E[M_g]/E[M_q]$	$v_{M_q}$	$\beta(\beta_t=5.00)$	$\beta(\beta_t=3.00)$
1.0/1.0	0.15	4.95	2.99
3.0/1.0	0.15	4.75	2.67
1.0/3.0	0.15	4.92	2.97
1.0/1.0	0.30	4.90	2.94
3.0/1.0	0.30	4.94	2.94
1.0/3.0	0.30	4.86	2.90

Tabel A1.4. Resulterende sikkerhedsindeks for hvert af 6 dimensioneringstilfælde af effektiv højde i jernbetonbjælketværsnit for fast erstatningsvektor  $\delta$ , der er optimal for  $\beta_t = 5.00$ .



## Referencer

- A1.1 A.R. Flint, B.W. Smith, M.J. Baker, and W. Manners: The Derivation of Safety Factors for Design of Highway Bridges. *Proc. Conf. on the New Code for the Design of Steel Bridges*, Cardiff, 1980. Granada Publishing, 1981.
- A1.2 P. Thoft—Christensen and M.J. Baker: *Structural Reliability Theory and its Applications*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982.

## APPENDIKS 2. KORRELATIONSKOEFFICIENTER I NATAFFDELINGEN

Korrelationskoefficientforholdet  $F = \rho_{ij}/r_{ij}$  i (7.2.9) til brug for fastlæggelsen af Nataffordelingen kan udregnes eksakt eller tilnærmet ved løsning af ligningen (7.2.6) med hensyn til  $\rho_{ij}$  for givet  $r_{ij} = r$ . De i de følgende tabeller givne resultater er alle taget fra [7.2]. Tabellerne bruges under hensyntagen til en kategorisering af de betragtede marginale fordelingstyper i to kategorier. Til første kategori henføres de fordelingstyper, der ved lineær transformation af den stokastiske variable kan bringes på en parameterfri standardiseret form. Til anden kategori henføres de fordelingstyper, der ikke tilhører første kategori. De fordelingstyper, der er medtaget i dette appendiks, fremgår af den følgende skematiske oversigt.

*Fordelinger i første kategori:*

navn (symbol):	fordelingsfkt.:	standardiseret parameterfri fordelingsfkt.:
normal (Gauss) (N)	$\Phi\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]$	$\Phi(y)$ (A2.1)
ensformig (U)	$\frac{x-a}{b-a}$ , $x \in [a, b[$	$y$ , $y \in [0, \infty[$ (A2.2)
forskudt eksponential (SE)	$1 - \exp[-\lambda(x-x_0)]$ $x \in [x_0, \infty[$	$1 - e^{-y}$ (A2.3) $y \in [0, \infty[$
forskudt Rayleigh (SR)	$1 - \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\alpha}\right)^2\right]$ $x \in [x_0, \infty[$	$1 - \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right]$ (A2.4) $y \in [0, \infty[$
Gumbel (type I) størsteværdi (GL)	$\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\}$	$e^{-e^{-y}}$ (A2.5)
Gumbel (type I) mindsteværdi (GS)	$1 - \exp\{-\exp[\alpha(x-u)]\}$	$1 - e^{-e^y}$ (A2.6)

Fordelinger i anden kategori:

navn (symbol): fordelingsfkt.:

$$\text{lognormal (LN)} \quad \Phi \left[ \frac{\log x - \lambda}{\zeta} \right], x \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{A2.7})$$

$$\text{gamma } (\Gamma) \quad \Gamma(k, \lambda x) / \Gamma(k), x \in [0, \infty[ \quad (\text{A2.8})$$

$$\Gamma(k, x) = \int_0^x u^{k-1} e^{-u} du \quad (\text{A2.9})$$

$$\Gamma(k) = \Gamma(k, \infty) \quad (\text{A2.10})$$

$$\text{Fréchet (type II)} \\ \text{størsteværdi (F)} \quad \exp \left[ - \left[ \frac{u}{x} \right]^k \right], x \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{A2.11})$$

$$\text{Weibull (type III)} \\ \text{mindsteværdi (W)} \quad 1 - \exp \left[ - \left[ \frac{x - x_0}{u - x_0} \right]^k \right], x \in [x_0, \infty[ \quad (\text{A2.12})$$

Blandt de mulige par af fordelingstyper er der to, for hvilke F er givet eksplisit. Disse er

$$(X_i, X_j) \in (N, LN): F = \frac{V_j}{\sqrt{\log(1 - V_j^2)}} \quad (\text{A2.13})$$

$$(X_i, X_j) \in (LN, LN): F = \frac{\log(1 + rV_i V_j)}{r \sqrt{\log(1 + V_i^2) \log(1 + V_j^2)}} \quad (\text{A2.14})$$

Korrelationskoefficientforholdet F er uafhængigt af  $r_{ij}$ , hvis  $X_i \in N$ . Under denne forudsætning viser tabel A2.1 værdierne for F, når  $X_j$  har en fordeling af første kategori, medens tabel A2.2 viser koefficienterne til henholdsvis  $1, V_j$  og  $V_j^2$  i en linearkombination, der approkimerer F med en fejl, der inden for variationsintervallet  $0.1 \leq V_j \leq 0.5$  højst er som angivet i tabellen.

$(X_i, X_j)$	(N,U)	(N,SE)	(N,SR)	(N,GL)	(N,GS)	max fejl %
F	1.023	1.107	1.014	1.031	1.031	0.0

Tabel A2.1. Værdier af F for  $X_i$  normal og  $X_j$  af første kategori.

$(X_i, X_j)$	1	V	$V^2$	max fejl %
(N, $\Gamma$ )	1.001	-0.007	0.118	0.0
(N, F)	1.030	0.238	0.364	0.1
(N, W)	1.031	-0.195	0.328	0.1

Tabel A2.2. Koefficienter til  $1, V, V^2$  i linearkombination af  $1, V, V^2$ , der approkimerer F.  $V = V_j$ .

De øvrige tilfælde af kombinationer af fordelingstyper i par er dækket af tabellerne A2.3, A2.4 og A2.5, der alle er selvforklarende. Variationsinterval-lerne for  $V_i$  og  $V_j$  er i alle tilfælde fra 0.1 til 0.5.

$(X_i, X_j)$	1	r	$r^2$	max fejl %
(U,U)	1.047	-	-0.047	0.0
(U,SE)	1.133	-	0.029	0.0
(U,SR)	1.038	-	-0.008	0.0
(U,GL)	1.055	-	0.015	0.0
(U,GS)	1.055	-	0.015	0.0
(SE,SE)	1.229	-0.367	0.153	1.5
(SE,SR)	1.123	-0.100	0.021	0.1
(SE,GL)	1.142	-0.154	0.031	0.2
(SE,GS)	1.142	0.154	0.031	0.2
(SR,SR)	1.028	-0.029	-	0.0
(SR,GL)	1.046	-0.045	0.006	0.0
(SR,GS)	1.046	0.045	0.006	0.0
(GL,GL)	1.064	-0.069	0.005	0.0
(GL,GS)	1.064	0.069	0.005	0.0
(GS,GS)	1.064	-0.069	0.005	0.0

Tabel A2.3. Koefficienter til  $1, r, r^2$  i linearkombination af  $1, r, r^2$ , der approkimerer F.

$(X_i, X_j)$	(U, LN)	(SE, LN)	(SR, LN)	(GL, LN)	(GS, LN)
1	1.019	1.098	1.011	1.029	1.029
r	-	0.003	0.001	0.001	-0.001
$r^2$	0.010	0.025	0.004	0.004	0.004
V	0.014	0.019	0.014	0.014	0.014
$V^2$	0.249	0.303	0.231	0.233	0.233
rV	-	-0.437	-0.130	-0.197	0.197
max fejl%	0.7	1.6	0.4	0.3	0.3

$(X_i, X_j)$	(U, $\Gamma$ )	(SE, $\Gamma$ )	(SR, $\Gamma$ )	(GL, $\Gamma$ )	(GS, $\Gamma$ )
1	1.023	1.104	1.014	1.031	1.031
r	-	0.003	0.001	0.001	-0.001
$r^2$	0.002	0.014	0.002	0.003	0.003
V	-0.007	-0.008	-0.007	-0.007	-0.007
$V^2$	0.127	0.173	0.12	0.131	0.131
rV	-	-0.296	-0.090	-0.132	0.132
max fejl%	0.1	0.9	0.9	0.3	0.3

$(X_i, X_j)$	(U, F)	(SE, F)	(SR, F)	(GL, F)	(GS, F)
1	1.033	1.109	1.036	1.056	1.056
r	-	-0.152	-0.038	-0.060	0.060
$r^2$	0.074	0.130	0.028	0.020	0.020
V	0.305	0.361	0.266	0.263	0.263
$V^2$	0.405	0.455	0.383	0.383	0.383
rV	-	-0.728	-0.229	-0.332	0.332
max fejl%	2.1	4.5	1.2	1.0	1.0

$(X_i, X_j)$	(U, W)	(SE, W)	(SR, W)	(GL, W)	(GS, W)
1	1.061	1.147	1.047	1.064	1.064
r	-	0.145	0.042	0.065	-0.065
$r^2$	-0.005	0.010	-	0.003	0.003
V	-0.237	-0.271	-0.212	-0.210	-0.210
$V^2$	0.379	0.459	0.353	0.356	0.356
rV	-	-0.467	-0.136	-0.211	0.211
max fejl%	0.5	0.4	0.2	0.2	0.2

Tabel A2.4. Koefficienter til 1, r,  $r^2$ , V,  $V^2$ , rV i linearkombination af 1, ..., rV, der approksimerer F for  $X_i$  af første kategori og  $X_j$  af anden kategori.

$$V = V_j$$

$(X_i, X_j)$	(LN, GM)	(LN, F)	(LN, W)	(GM, GM)	(GM, F)	(GM, W)	(F, F)	(F, W)	(W, W)
1	1.001	1.026	1.031	1.002	1.029	1.032	1.086	1.065	1.063
r	0.033	0.082	0.052	0.022	0.056	0.034	0.054	0.146	-0.004
$r^2$	0.002	0.018	0.002	0.001	0.012	-	-0.055	0.013	-0.001
$r^3$	-	-	-	-	-	-	-0.020	-	-
$V_i$	0.004	-0.019	0.011	-0.012	-0.030	-0.007	0.104	0.241	-0.200
$V_i^2$	0.223	0.288	0.220	0.125	0.174	0.121	0.662	0.372	0.337
$V_j$	-0.016	0.222	-0.210	-0.012	0.225	-0.202	0.104	-0.259	-0.200
$V_j^2$	0.130	0.379	0.350	0.125	0.379	0.339	0.662	0.435	0.337
$rV_i$	-0.104	-0.441	0.005	-0.077	-0.313	-0.006	-0.570	0.005	0.007
$rV_j$	-0.441	-0.277	-0.174	-0.077	-0.182	-0.111	-0.570	-0.481	0.007
$V_i V_j$	0.029	0.126	0.009	0.014	0.075	0.003	0.203	0.034	-0.007
$V_i^3 + V_j^3$	-	-	-	-	-	-	-0.218	-	-
$r(V_i^2 + V_j^2)r^2$	-	-	-	-	-	-	-0.371	-	-
$(V_i + V_j)$	-	-	-	-	-	-	0.257	-	-
$V_i V_j (V_i + V_j)$	-	-	-	-	-	-	0.141	-	-
max fejl %	4.0	4.3	2.4	4.0	4.2	4.0	4.3	3.8	2.6

Tabel A2.5. Koefficienter til de i første søjle viste variable i linearkombination, der approksimerer F med både  $X_i$  og  $X_j$  i anden kategori.

Det tilladte variationsområde for korrelationsmatricen  $\{r_{ij}\}$  afhænger af den tilhørende flerdimensionale fordelings dimension, idet Nataffordelingen kun kan defineres, hvis den af løsningerne til ligningen (7.2.6) opbyggede matrix  $\{\rho_{ij}\}$  er positiv definit.

For den todimensionale Nataffordeling med marginale fordelinger af første kategori er de tilladte variationsintervaller for  $r_{ij}$  vist i tabel A2.6. For fordelinger af anden kategori afhænger de tilladte variationsintervaller af  $V_j$

og  $V_j$ , men lignende brede intervaller gælder.

fordeling	N	U	SE
N	-1.000/1.000	-0.977/0.977	-0.903/0.903
U	-0.977/0.977	-0.999/0.999	-0.886/0.886
SE	-0.903/0.903	-0.866/0.866	-0.645/1.000
SR	-0.986/0.986	-0.970/0.970	-0.819/0.957
GL	-0.969/0.969	-0.936/0.936	-0.780/0.981
GS	-0.969/0.969	-0.936/0.936	-0.981/0.780
fordeling	SR	GL	GS
N	-0.986/0.986	-0.969/0.969	-0.969/0.969
U	-0.970/0.970	-0.936/0.936	-0.936/0.936
SE	-0.819/0.957	-0.780/0.981	-0.981/0.780
SR	-0.947/1.000	-0.915/0.993	-0.993/0.915
GL	-0.915/0.993	-0.886/1.000	-1.000/0.886
GS	-0.983/0.915	-1.000/0.886	-0.886/1.000

Tabel A2.6. Variationsintervaller for korrelationskoefficienten  $r$  i den todimensionale Nataffordeling, når begge marginale fordelinger er af første kategori.

## APPENDIKS 3. THE COMPUTER PROGRAM PROBAN

by Peter Bjerager

PROBAN (Computer Program for Probabilistic Reliability and Sensitivity Analysis) helps decision makers to efficiently evaluate the impact of uncertainty on the performance of a system – technical, financial, managerial or otherwise. Probabilistic reliability and sensitivity methods are used to quantify uncertainties and thereby help to achieve a required reliability and to control risk. The methods support decisions for optimal allocation of resources, and they complement and enhance experimental approaches and conventional deterministic analyses such as design–case evaluations or what–if sensitivity studies.

Probabilistic methods are gaining increasing interest within a wide variety of disciplines. The attractive features of a probabilistic approach include the clear treatment and presentation of uncertainty, the rational handling of professional judgements, and the possibility of being imprecisely correct rather than precisely incorrect, as the case is in deterministic analysis.

### A3.1 Applications

Probabilistic methods are applicable to virtually any type of decision problems, for example those appearing in design of hardware products, maintenance of civil engineering facilities, investment planning and strategy, strength evaluation of aerospace structures and availability analysis of mechanical products. The benefits of a probabilistic approach is the assessment of uncertainties and their impact on system performance, the identification of key factors, the possibility of performing trade–off studies, and the existence of consistent reliability updating as more information becomes available about the system, e.g., through inspection and monitoring.

PROBAN has its background from structural reliability. Here, probabilistic measures are used to quantify and balance the uncertainty in the loading of a structure with that of the structural capacity to arrive at a safe–enough

structural design. The key element is to associate with each structural design a measure of reliability which may be compared to previous or alternative designs. The design and construction of common structures are regulated by codes of practice. Probabilistic methods are used to calibrate the safety factors in these codes, for example, in case of new materials, changed loading environments and innovative structural design concepts.

In recent years, structural reliability methods have also been used to set up project specific design bases for single, unique (large) structures, for example bridges and offshore structures. Furthermore, direct use of probabilistic methods have taken place in the planning of fatigue inspection of offshore platforms, for example in the North Sea. Analyses like these decide where and when to inspect and which inspection method it is optimal to use. In a similar way, the methods are now supporting technical decisions in the aerospace, the aircraft and the mechanical industry.

PROBAN has been applied in many areas. As the program in the most recent years has evolved into a *general* probabilistic analysis tool, many applications outside structural reliability have taken place. The following list of example headlines gives an indication of the type and variety of these applications:

Calibration and optimization of safety factors, fatigue analysis of metals, probabilistic fracture mechanics, damage accumulation of concrete structures, extended lifetime evaluation of highway bridges, inspection and reliability updating, strength analysis of composites, reliability-based design optimization, stochastic ground water flow analysis, tolerance control in production of mechanical components, economical risk analysis, oil field development planning, stochastic financial assessments, project management and control, probabilistic soil investigations, geotechnical stability analysis, positioning accuracy of gravity platform, deck-to-wave clearance analysis, soil consolidation analysis with updating through monitoring, wave loading analysis and prediction, combination of multiple loads for ships, random vibration of structures with uncertain properties, probabilistic redundancy and robustness of structural systems, linear and nonlinear finite element reliability analysis, stochastic push-over analysis of jacket structures, cost optimal inspection planning, positioning of templates for tension leg platform, corrosion analysis of sea-bed piping lines, probability-based fire

and explosion analysis, erosion analysis of piping system, lifetime evaluation of process system under high-temperature loading cycles, probabilistic seismic analysis, life line reliability, stochastic reservoir modelling and analysis, scheduling of activity networks under uncertainty, availability analysis of complex systems, mission success study, operational safety under uncertainty, probabilistic event tree analysis, bridge load combination of road and rail traffic, traffic load modelling under congestion, impact of ship collisions under uncertainty, and human reliability.

### A3.2 Technical capabilities

PROBAN provides state-of-the-art computation facilities for the analysis of random variable models. It features general methods for determination of probability density and distributions, reliability measures and probabilistic sensitivity and importance measures. The numerical routines, the execution facilities, the implementation and the quality of the program are of a high standard. An overview of PROBAN is given in the figure A3.1.

The random variable probabilistic model is defined by a set of basic random (*input*) variables  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  described by a joint density function  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$  and a model function  $G(\mathbf{x})$ . Assigning the random vector  $\mathbf{X}$  to the input variables of the model function  $G$  yields the dependent random (*output*) variable  $Y = G(\mathbf{X})$ . Based on a number of such output variables  $Y_i$  – typically defined by use of several model functions – critical events e.g. defining performance failure of a system can be defined.

The concept of model functions can be used in the formulation of a very large variety of models. The function may be a simple algebraic expression in explicit form, or it may be a pure numerical routine possibly involving a large computer code. A  $G$ -function of the former type is the well-known  $R-S$  function representing capacity/income  $R$  minus load/cost  $S$  – applicable to for example structural or economical considerations. A model function of the latter type could simply be one defined by another complex analysis program.

A probabilistic model may be described by more than one  $G$ -function. In this case the problem is often referred to as a systems problem. In PROBAN, facilities for direct handling of systems are also available.

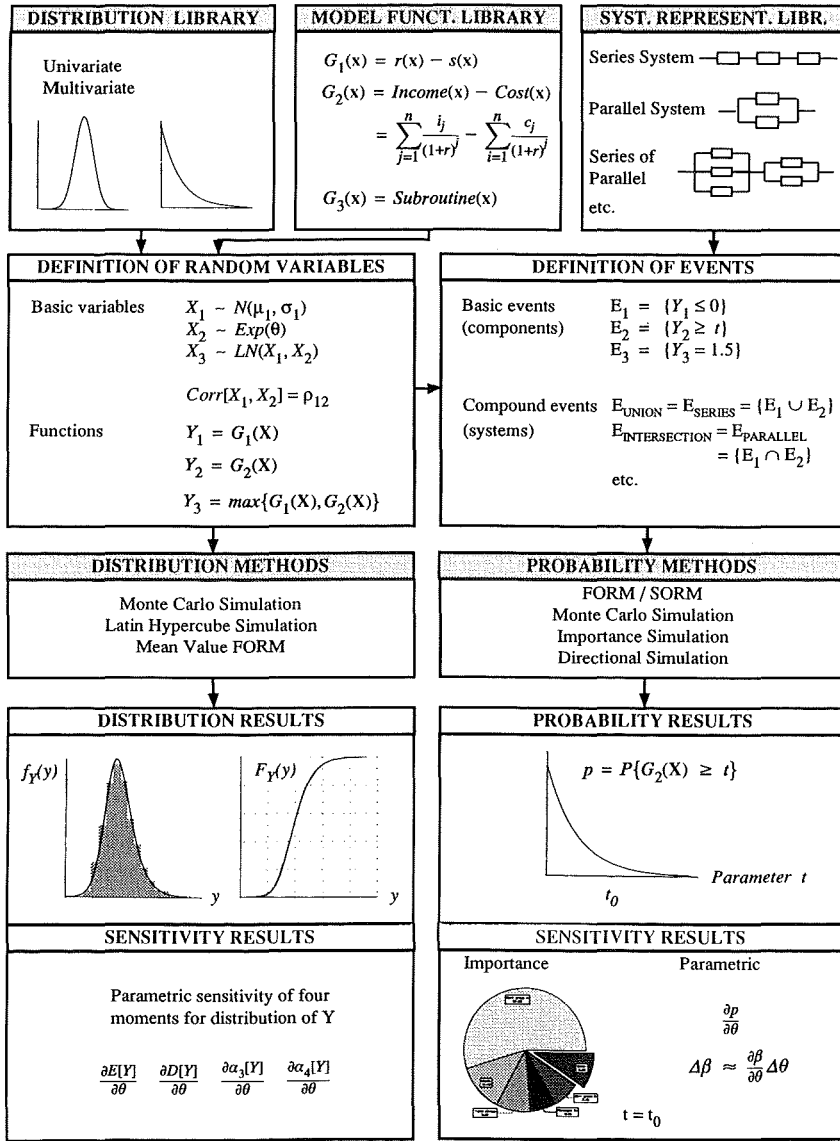


Figure A3.1. Overview of PROBAN (computer program for probabilistic reliability and sensitivity analysis).

A3.3 Analysis results

**Probability and reliability.** The probability of occurrence of general events can be computed. The events are defined in terms of the random output variables  $Y_i = G_i(X)$ . For example, basic events (component events) such as  $P\{Y_1 \leq 0\}$  and  $P\{Y_2 \geq t\}$ , where  $t$  is a threshold value, and compound events (system events) such as unions and intersections,  $P\{Y_1 \leq t_1 \text{ and } Y_2 \leq t_2\}$  and  $P\{Y_1 \leq t_1 \text{ or } Y_2 \leq t_2\}$ , can be defined.

For structural reliability problems, the random output variables  $Y_i$  are known as safety margins or event margins and the probability computed will then be the failure probability  $p_F$  or the corresponding reliability  $1 - p_F$ . PROBAN has capabilities for computing very small probabilities, say, in the range  $10^{-8} - 10^{-3}$  as known in structural reliability.

In addition to  $p$ , PROBAN can provide equivalent measures: the logarithm of the probability,  $\log_{10} p$  or the reliability index  $\beta = \Phi^{-1}(1-p)$ , where  $\Phi$  is the standard normal distribution function. The reliability index is often used in structural reliability.

**Cumulative distribution function and density function.** As a supplement to computing selected probabilities, the cumulative distribution function  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\}$  and density function  $f_Y(y) = dF_Y(y)/dy$  of  $Y = G(X)$  can be automatically computed for any value of  $y$  by FORM as well as simulation.

**Parametric sensitivity.** Parametric sensitivity factors are *absolute* sensitivity measures for the reliability measure with respect to deterministic parameters in the model formulation. The deterministic parameter  $\theta$  can be a distribution parameter in the description of the basic random variables, e.g., mean value or standard deviation, or it can be a deterministic variable entering the model function  $G$  directly as a deterministic basic variable.

The parametric sensitivity is defined as a (partial) derivative, and for the probability  $p = P\{G(X) \leq 0\}$  it is the derivative of  $p$  with respect to  $\theta$ . For the full distribution of the random output variable  $Y$ , parametric sensitivity factors can be computed as the partial derivatives of the first four moments of  $Y$ , i.e., the derivatives with respect to  $\theta$  of the mean value  $E[Y]$ , the

standard deviation  $D[Y]$ , the skewness  $\alpha_3[Y]$ , and the kurtosis  $\alpha_4[Y]$ .

The sensitivity results have proven to be a very important type of information obtained by PROBAN. The parametric sensitivity factors are useful e.g. in reliability-based design and optimization. The sensitivity factors also show the influence of the corresponding parameter on the probability of the considered event. For example, the change in a probability or in distribution moments due to changes in the parameters can be estimated without re-computation. Furthermore, the parameters can be used to compute quantities such as conditional probabilities and crossing rate for random processes. It is noted that conditional probabilities can also be computed by PROBAN's version of FORM valid for equality events.

**Importance factors.** Importance factors are *relative* measures for the significance of the uncertainty of a single basic random variable (or of a group of stochastically dependent basic variables) for the problem at hand. The factors apply to a computed probability  $P\{G(X) \leq 0\}$  and are often denoted by  $\alpha_j^2$ , where the sum over all variables (all  $j$ ) is equal to 100%.

The importance factors are used to focus attention on the most important uncertainties for the problem at hand. They can be used at the initial analysis phase to reduce the number of random basic variables.

**Other quantities.** Besides the quantities listed above, PROBAN is efficient in computing a number of other quantities. For reliability problems, the most likely combination of values of the basic variables in case of failure is provided (the most central limit state point). This combination of values can be used in safety factor calibration and design of experiments.

Other quantities are conditional probabilities where conditioning is on inequality events,  $P\{Y_1 \leq t_1 \mid Y_2 \leq t_2\}$ , as well as equality events,  $P\{Y_1 \leq t_1 \mid Y_2 = t_2\}$ , can be treated. Also, the crossing rate out of a domain for a random vector process can be calculated as a parametric sensitivity problem for a parallel system formulated in terms of random variables.

It is noted that one of the important applications of PROBAN is in fact its ability to compute conditional probabilities. Conditional probabilities have wide applications within reliability updating, where system performance

and observations are expressed in terms of G-functions. In its simplest form, the approach can also be used to update the probability distribution for the basic random variables.

### A3.4 User specifications

Roughly speaking, two groups of users apply PROBAN. One group is the experienced analysts who formulate, implement and apply new probabilistic models. The other group consists of users that apply existing models – already implemented model functions – and run these with new data.

To implement a new probabilistic model in PROBAN, the user has to provide the relevant model functions, and the probabilistic description of the basic variables, i.e. the type of probability distributions and choices for the distribution parameters. The model functions must be implemented in FORTRAN-77 code following simple principles. If computation of the model functions involves existing analysis programs the necessary couplings must be established. An example is a model based on a finite element code where the input variables of the G-function represent loads, geometrical quantities and material properties. Another example is the use of an event tree risk analysis program where PROBAN could model and treat the input probabilities as random variables.

Having implemented the G-functions, the rest of the modelling can be specified in PROBAN's interactive command mode, for example the choices of probability distributions, model functions and system representations. Alternatively, the model can be specified in an input file for the program. For users applying existing models all operations and executions of PROBAN may conveniently be performed interactively. An interactive session with PROBAN is described in a subsequent section.

### A3.5 Modelling capabilities

PROBAN provides the user with libraries containing elements for the probabilistic modelling. The contents of each of the libraries are described in the following.

**Distribution library.** The distribution library contains probability distributions that can be used to model the basic random variables. Presently, the library contains about 25 distributions including: beta, chi-Square, exponential, gamma, generalized gamma, Gumbel, Hermite transformation model, log-normal, Longuet Higgins, Maxwell, normal, Rayleigh, Student's-t, triangular, uniform and Weibull. The user can implement new distribution types directly into the library by providing the corresponding FORTRAN-77 routines.

The library also contains facilities for defining multivariate distributions, for example the Nataf model where the types of the marginal distributions together with a correlation matrix must be specified. Another example is to define sequences of random variables in which the parameters for some variables are equal to previously defined random variables.

The distribution function library can also be activated by simple commands to compute probabilities, densities, fractiles, etc. for all available distributions. Print tables of the various distributions can be produced, and the density and distribution functions can be displayed and plotted.

**Model function library.** This library contains the G-functions that the user can apply in the definition of the probabilistic model. PROBAN comes with a number of useful model functions, for example some mathematical functions (e.g., sums and differences), and some model functions for fatigue reliability problems. Additional functions can easily be included as FORTRAN-77 subroutines.

**System representation library.** PROBAN has a library of system representations that (optionally) can be used to establish compound event formulations (systems). The library presently comprises a series system representation (union of events), a parallel system representation (intersection of events), a series of parallel system representation (union of intersections of events), and a parallel of series system representation (intersection of unions of events).

The system representations of PROBAN must be used to define compound events when the computation is to be done by a first or second order reliability method.

### A3.6 Computation methods

PROBAN offers a number of computation methods to meet the various needs within probabilistic analysis in general. Also, the different methods enable the user to analyse the same problem with different methods – for example to verify the results. The methods in PROBAN can briefly be summarised as follows.

**First and second order reliability methods (FORM/SORM).** Full-featured first and second order reliability methods for probability computations of single events, unions, intersections and unions of intersections are implemented. Exact parametric FORM sensitivity methods are available also for small and large intersections (in the standard gaussian space) as may be required in conditional reliability computations and reliability-based optimization. The second order method includes exact SORM probability computation for both parabolic and second order Taylor expansion fits. The approximate asymptotic SORM results are also available.

PROBAN contains a mean-based FORM, primarily aimed for computation of distribution function values for complicated G-functions. The method is non-iterative and requires therefore a smaller number of calls to the G-function than a corresponding FORM based on the most central limit state point. The accuracy of the mean-based FORM is generally best for G-functions that are monotonic in each of the input variables.

*Generality:* FORM/SORM are analytical probability computation methods, and the methods therefore apply to probability problems with certain (but few) analytical restrictions. The basic random variables must be continuous and each G-function must be continuous. With presently implemented optimization procedures, the G-functions should furthermore be smooth, preferably twice differentiable.

*Accuracy:* The methods are approximate, but generally yield accurate results for practical purposes, in particular for small probabilities ( $10^{-3}$  –  $10^{-8}$ , say) and a uni-modal joint density of the basic variables. Furthermore, with the exact SORM probability computation, PROBAN provides a good accuracy in general for all probability levels for single events.



*Efficiency:* For small probabilities FORM/SORM are extremely efficient as compared to simulation methods and as such without competition regarding CPU-time. The CPU-time is for FORM approximately linear in the number of basic variables  $n$ , and the additional CPU-time for a SORM computation grows approximately with  $n^2$ . However, a SORM based only on the diagonal of the matrix of second order derivatives in the most central limit state point (in standard gaussian space) is available with CPU-time linear in  $n$ . The computation time is roughly linear in the number of basic events in a large intersection. The absolute computation time depends on the time necessary to evaluate the G-functions. The CPU-time is independent of the probability level, provided the CPU-time for evaluation of the model function is the same for all input values. This is, however, not necessarily the case, for example in nonlinear structural reliability problems.

**Conditional expectation simulation methods.** Two conditional expectation simulation methods are available: *directional simulation* and *axis-orthogonal simulation*. The methods are aimed for computing probabilities. Furthermore, directional simulation can be used to compute parametric sensitivity factors and (generalised) importance factors. In relation to FORM/SORM, the axis orthogonal simulation method is an *importance sampling technique* that can be used to efficiently evaluate and update the approximate FORM/SORM results.

*Generality:* The conditional expectation methods implemented in PROBAN are based on the standard gaussian space and therefore require the basic random variables to be continuous. The model functions should be continuous, whereas there are no requirements as regards the differentiability of the functions.

*Accuracy:* For sample size  $N \rightarrow \infty$ , the estimated probability converges to the exact result  $p$ . For finite sample sizes, uncertainty estimates on the results are provided.

*Efficiency:* As a general rule, for given coefficient of variation on the estimator, the CPU-time grows proportional with  $1/p$  and with the number of random variables. Moreover, the enhanced efficiency as compared with indicator-based simulation schemes (see below) generally decreases when the

number of random variables increases. The absolute computation time depends on the time necessary to evaluate the G-functions. For small probabilities the methods can be expensive in CPU-time.

**Direct indicator-based Monte Carlo simulation.** A direct, indicator-based Monte Carlo simulation is available for both probability and distribution computation. In the case of distribution computation, the method provides parametric sensitivity factors for the moments of the distribution.

*Generality:* The direct Monte Carlo simulation is completely general and applies to any distribution assumption for the basic random variables, including discrete random variables (as yet not directly available in the distribution library, but can be implemented through the model function). Furthermore, there are no requirements on continuity etc. of the G-functions – only the signs of these functions are used.

*Accuracy:* For sample size  $N \rightarrow \infty$ , the estimated probability converges to the exact result  $p$ . For finite sample sizes, uncertainty estimates on the results are provided.

*Efficiency:* As a rule of thumb, the CPU-time grows proportional with  $1/p$  and the number of random variables for a given coefficient of variation of the estimator. The absolute computation time depends on the time necessary to evaluate the G-functions. For small probabilities the method is generally very expensive in CPU-time.

**Latin hypercube simulation.** Latin hypercube sampling technique is a stratified sampling for the indicator-based Monte Carlo simulation. The method is used for determination of cumulative distribution functions. Compared to direct Monte Carlo simulation, increased efficiency in determining the mean and standard deviation of the distribution can be obtained. This applies in particular for model functions that are monotonic in each of the input variables. As direct Monte Carlo simulation, Latin hypercube sampling puts no requirements on the model functions.

### A3.7 Execution of PROBAN

PROBAN is typically executed in interactive mode. The program is control-

led by a friendly user command language. All commands are logged in a journal file from where the commands can be read during a re-analysis.

The program has graphics for displaying and plotting, for example, probability density and distribution functions for input and output random variables. Importance factors can be displayed in pie charts and results of automated parameter studies can be presented as graphs. Additionally, all input and results can be typed or printed in consistent tables including all important items of identification for the run, for example, date and time for execution, analysis title and model name, computation method and the actually applied options for the method, and seeds for random number generator (if relevant). Optionally, more extended print-out is available.

### A3.8 An interactive PROBAN session

This section describes some typical steps in an analysis with PROBAN. The flow of, and steps in the session should only be considered as an example.

**1. Definition of model.** Before entering PROBAN, the probabilistic model must be defined, i.e., which model functions  $G_i$  are needed and which basic variables  $X$  must be defined. If the relevant  $G$ -functions are not readily available these are programmed as subroutines and PROBAN is linked by issuing a PROBAN link command.

If special or advanced probability models are needed it may be necessary also to program user-defined distributions for the distribution library or to program these into the model function. As an example, discrete random variables can be defined easily in the latter way. Similarly, system representations not available in PROBAN can be entered via a  $G$ -function.

**2. Specification of basic random variables.** The interactive PROBAN session is now started. After being prompted for the model name under which to store the journal file for logging all commands, the set of basic random variables  $X$  can be defined. This is simply done by successively specifying variable name, distribution type and distribution parameters (which may be deterministic values or previously defined random variables). The variables can be referenced by their names.

Correlations between basic variables in a Nataf distribution can then be defined – PROBAN will show permissible intervals for each individual

correlation coefficient. Finally, it can optionally be checked if the correlation matrix is fully defined and positive definite (this will in any case be checked during computation).

**3. Specification of random output variables.** Now, the functionally dependent output variables  $Y_i = G_i(X)$  (safety or event margins) are defined by assigning random or deterministic variables to each input variable of the model functions. This is done by choosing – one by one – the needed model functions  $G_i$  from the model function library. The name of each of the input variables is sequentially displayed on the screen and the user specifies the name of the basic variable to be assigned to this input variable. New random variables can be created during this assignment procedure, if necessary.

**4. Specification of basic events (components).** By default, the standard reliability analysis events  $E_i = \{G_i(X) \leq 0\}$  are defined in PROBAN. The threshold value  $t_i$  in  $\{G_i(X) \leq t_i\}$  can be changed to any value and the event type can be changed from " $\leq$ " to " $\geq$ " or " $=$ ". In this way, events like  $\{G_i(X) \geq 0\}$  or  $\{G_i(X) = t_i\}$  can be defined.

**5. Specification of compound events (systems).** Using the system representations in PROBAN, events compounded of the basic events can be defined. For example, choosing a union of events (series system), the user specifies the set of events entering the union.

**6. Verification of the model.** The model specified can now be verified by a number of facilities. Input values for  $x$  for each of the  $G$ -functions can be entered and the function values computed and listed. A list of basic variables can be given and their distribution or density function can be displayed in graphs or tables, a table of correlations between variables can be displayed, assignment relations between basic random variables and the input variables for each  $G$ -function can be listed, and the system representations of the compound events can be displayed as network diagrams.

**7. Preliminary analysis.** Typically, some preliminary analyses will be run to verify that the model has been correctly specified and to learn about the behaviour of the model. Analyses are executed by a single command. A common approach is to run a few simulations on each of the defined random output variables  $Y_i = G_i(X)$  to verify that the model works properly. Different computation methods may be employed to compare results. For reliability problems (small probabilities), FORM, SORM and directional simulation

could be used. Each method may be fine-tuned for the particular problem by specifying certain method dependent features and numerical parameters.

Sensitivity analysis can be used to assess the importance of the basic variables. From this analysis, some basic random variables may be found to have an insignificant contribution to the total uncertainty and may therefore be re-defined to be deterministic basic variables, thereby saving computation time.

**8. Production analysis.** Now, the production analyses can be carried out by use of the automatic parameter study facilities where analyses are repeatedly run with different values of some of the parameters defining the problem (this could for example be distribution parameters or threshold parameters in the events). Before the analysis, starting points for FORM/SORM and random number generator seeds for a simulation method can but need not be specified by the user. Statistically well tested seeds are available in PROBAN.

The results can be presented in tables or graphs. Computing the probability distribution for  $Y_1$ , the estimated density and distribution can be displayed. For probability computations, e.g.  $p = P\{G_1(X) \geq t\}$ , the results can be displayed as function of the parameter  $t$  – which in fact can be any deterministic variable entering the model.

Importance factors in probability computations can be displayed in a pie chart. Parametric sensitivity factors – both for distribution and probability computation – are given for the deterministic problem parameters chosen by the user. The factors are displayed in tables.

A number of other results are also available to the user.

**9. Use of results.** In evaluating and interpreting the results of the analysis, the user will learn how uncertainty influences the behaviour of the model under study, and the analysis may also lead to a better understanding of the underlying deterministic problem. There are many ways to utilise the results from PROBAN. Only few are mentioned here.

Valuable results are the probabilities and the distributions of the output variables. These can be used to compare the uncertainty of the input with that of the output, and to quantify the uncertainties in the model. With this quantification, the efficiency of control measures can be assessed and optimised.

The most likely combination of values of the basic variables (the most central limit state point) gives important insight into the behaviour of the model. The sensitivity studies can be used to study the behaviour of the model under changed assumptions – without re-computation from scratch. If the study is concerned with optimization, for example to determine a reliability-based optimal structural design, the parametric sensitivity factors can be used to guide the design decisions.

The value of additional information can be evaluated by conditional probability results. An analysis can be performed after some information has been obtained, and a new quantification of the uncertainties can be carried out. However, to optimise the resources used for obtaining the new information, an analysis may be performed *beforehand* to investigate which information it is most cost-efficient to search for.

### A3.9 Background and history of PROBAN

PROBAN is the result of a major strategic research effort at Det norske Veritas, Norway. The very first version was made in the mid-seventies and it handled second-moment reliability computation for components. From 1984, PROBAN has been developed at A.S Veritas Research, Høvik at Oslo, Norway. The development of the program has been financed by Det norske Veritas, Saga Petroleum (since 1986), and Statoil and Conoco Norway Inc. (since 1988).

The first commercial version of PROBAN was made available in 1986. It was primarily aimed for structural analysis, and it featured first and asymptotic second order methods for probability computation for components and systems. Parts of the computation modules were developed at the Technical University of Munich, Germany.

Version 2 of PROBAN was released in 1989. With this version, the program's capabilities were expanded to cover a wide variety of general probabilistic analysis needs, maintaining the strong facilities for computation of small probabilities relevant, for example, in structural reliability. A number of Monte Carlo simulation methods were included and both distribution and probability computation methods were also implemented. Significant improvements to FORM and SORM were implemented, in particular with

relation to SORM probability computation and FORM sensitivity analysis. Parts of this version were developed in cooperation with the aforementioned university as well as with the Technical University of Denmark, and Stanford University, California.

The next major release of PROBAN is planned to take place in 1991 and it will among other features include a modern graphical user-interface.

### A3.10 Further development

The further development of PROBAN and the research supporting this development take place at A.S Veritas Research and Veritas Sesam Systems A.S, Norway. Some of the efforts are described below.

The distribution library is being updated with new distribution types. Apart from the continuous type of random variables, implementation of distributions for discrete random variables is planned. Facilities for data analysis and fitting are under implementation. The methods can be used in preprocessing to determine distributions of the basic random variables and in the postprocessing to analyse the computed distributions. A general distribution based on spline technique has been developed for PROBAN at the University of Oslo, Norway.

Probabilistic models involving random processes are under study. In particular, methods for efficient computation of outcrossing rates have been developed. The methods can also handle models described by a combination of random variables and random processes. This is a relevant case in structural reliability where the loading on the structure may be time-variant whereas the structural strength can be modelled by a random variable model.

The results of PROBAN are typically used to optimise a system under reliability constraints. Presently, a set of generic optimization formulations are trial implemented in PROBAN. The formulations can be used to solve a wide variety of practical optimization problems under uncertainty.

A number of special purpose probabilistic analysis modules based on PROBAN have been developed for Det Norske Veritas and other companies. It is the plan also to offer such implementations on a wide commercial basis. The first special purpose program will be PROFAST for probabilistic fatigue and fracture analysis of offshore structures. The program can be used for

reliability updating and planning of cost optimal inspection routines.

A new user-interface for PROBAN is under development. The user-interface is built on the X-based MOTIF window handling system from Open Software Foundation supported by most major computer companies. The user-interface will also include a powerful command language with parameters and built-in functions.

### A3.11 Documentation

PROBAN is well documented with Beginner's Guide, User's Manual, Distribution Library Manual, Command Language Reference Manual, Theory Manual and Example Manual.

The use of PROBAN has been documented in numerous scientific and technical papers and reports.

### A3.12 Program information

PROBAN is designed and maintained to be a state-of-the-art professional computer program. The program is supported worldwide by Veritas Sesam Systems, and it is available on common computer platforms from Apollo, DEC, IBM and Sun.

PROBAN is installed at companies in the petroleum industry, in engineering and design firms, and in the aerospace industry. In addition, the program is installed at research centres and universities in Europe and the US.

#### VERITAS SESAM SYSTEMS

VSS A.S  
Veritasveien 1  
P.O. Box 300  
N-1322 Høvik  
Norway  
Tel (02)479900  
Fax (02)477272

VSS Ltd.  
Veritas House  
112 Station Road  
Sidcup, Kent DA15 7BU  
Great Britain  
Tel (081)309 7477  
Fax (081)309 1834

VSS Inc.  
1325 South Dairy Ashford  
Suite 100  
Houston, Texas 77077  
USA  
Tel (713)558 1733  
Fax (713)558 2396

## APPENDIKS 4. THE PC PROGRAM PACKAGE STRUREL

by Rüdiger Rackwitz

Part of the program package STRUREL (**S**tructural **R**eliability **A**nalysis **P**rogram **P**ackage) including the main modules FORM, SORM, COMREL and SYSREL was made available as early as 1976 by the Technical University of Munich and in the meantime has undergone many revisions, improvements and additional developments. It performs the computational tasks in technical reliability, decision making under uncertainty and in general statistical analysis. Its theoretical basis as well as many algorithmic concepts and most of the features are the same as in PROBAN (appendix 3) and it covers by far and large the same field of application. However, STRUREL intentionally is designed to be used also on PC's and in smaller pieces which made it necessary to choose another lay out. The philosophy behind its setting is to allow the performance of all basic tasks in scientific contexts as well as in practical applications by separate modules. As a consequence its structure is highly modular. The software can easily be tailored to specific applications and can be integrated into other programs which, in fact, has frequently been the case in the past. This structure also admits direct access to a large variety of subprograms. For several practically important problems user friendly interactive versions are available for PC's. Due to their compactness and simplicity several of the programs can also be used in education.

### A4.1 The program module FORM

FORM (First Order Reliability Method) approximates to first order the failure probability of a componental failure set given as  $h(\mathbf{X}) \leq 0$  with  $h(\mathbf{X}) = 0$  the (differentiable) limit state and  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$  the vector of random variables with (continuous) distribution function  $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ . The state function  $h(\mathbf{X})$  can be given as an analytical function or as the output of a numerical procedure, e.g. a finite element program. It has to be provided by the user as

a subroutine in FORTRAN-77. Dummy subroutines are provided to facilitate that task. The state function program must be numerically sufficiently stable in order to compute first order derivatives by a central, forward or backward difference scheme as implemented in FORM. In essence, FORM transforms the original random vector  $\mathbf{X}$  into an independent standard normal vector  $\mathbf{U}$  and locates the so-called  $\beta$ -point (most central limit state point) on the limit state surface by a robust, gradient based search algorithm. Linearization of the limit state function at this point then yields the probability estimate

$$P(\mathcal{F}) = P[h(\mathbf{X}) \leq 0] = P[g(\mathbf{U}) \leq 0] \approx \Phi(-\beta)$$

with  $\beta = \min\{\|\mathbf{u}\|\} (\mathbf{u} \in g(\mathbf{u}) \leq 0)$  (the geometrical safety index) and  $\Phi(\cdot)$  the standard normal integral. Similarly, the distribution function of complicated functions  $Y = h(\mathbf{X})$  can be determined. FORM performs automatically the required probability distribution transformation. The most important types of continuous distribution functions are included (13 different basic distributions such as the uniform, trapezoid, Gauss, lognormal, exponential, Rayleigh, gamma, beta, Gumbel, Fréchet, Weibull and Student's t distribution and a number of derived distributions related to extreme-value problems). Many other distributions can easily be derived from these basic distributions. Dependent normal-lognormal random vectors can also be handled directly. For more general dependent models guidelines are given to develop suitable probability distribution transformations (Rosenblatt transformations). New univariate models can easily be incorporated.

An important feature of FORM is the capability to handle the combination of independent random sequences with rectangular pulses of different wave lengths as required e.g. in structural load combination. The possibility of zero pulses can be taken into account to a certain extent.

FORM is easy to use especially in the interactive menu-driven version EFORM which provides support in input/output file handling and when specifying the stochastic model with its parameters and the parameters in the state function. Extensive checks on the validity of the input and output as well as a detailed error handling are implemented.

### A4.2 The program module SORM

SORM (Second Order Reliability Method) approximates the failure probability of a componental failure set to first and second order and can compute failure probabilities arbitrarily exact by using an efficient importance sampling scheme. As for FORM the user has to provide the (differentiable) state function. SORM includes three highly convergent gradient-based algorithms for the location of the expansion point ( $\beta$ -point, most central limit state point) which are called sequentially if necessary. Also, the specification of windows in which the  $\beta$ -point is expected is admissible. With these devices the location of the  $\beta$ -point should be possible even in very difficult cases. The user must provide the probability distribution transformation (Rosenblatt transformation) from the basic uncertainty space ( $X$ -space) into the standard space ( $U$ -space). SORM contains some tools for this transformation, in particular, a library UTOX for the inverses of many distribution functions and other tools to work with complicated stochastic models. This library contains in addition to the distributions mentioned before several other special univariate distributions such as the halfnormal, Cauchy, Birnbaum/Saunders and the Longuet-Higgins distribution. A library XTOU for the inverse transformation is also available. SORM allows to compute parametric sensitivity factors thus enabling its use in reliability-oriented optimization but most importantly to judge the absolute and relative significance of the various uncertain variables and deterministic parameters. SORM is to be preferred to FORM for complicated problems.

### A4.3 The program module COMREL

The more recent module COMREL (Component Reliability) is considered as a significant improvement yet covering all capabilities of SORM. It includes a new highly efficient and reliable search algorithm which is also suited for problems with a very large number of basic variables. It is further designed to handle time-variant reliability problems as they occur in load combination or in structural fatigue. A separate, interactive and menu-driven input/output module for the easy specification of the stochastic model and the parameters of the problem running on PC's is available. The help facilities should be appreciated not only by the inexperienced user. This module

also enables to perform parameter studies interactively. As output it furnishes the failure probability, the equivalent safety index, some informative failure surface characteristics and, if appropriate, the risk function with respect to a parameter. The basic uncertainty vector can include random process components which, at present, are stationary, continuous Gaussian vector processes and stationary, independent rectangular wave renewal processes. The outcrossing approach is used. The results are of asymptotic nature, i.e. are most accurate for either small or large probabilities. Some effort has been made to correctly calculate failure probabilities in the presence of simple random variables and of random processes. COMREL can run in reverse communication, i.e. it can directly be used in connection and in the framework of large commercial computer codes. COMREL will be the basis of certain future developments in time-variant reliability with non-stationary random processes and state functions.

### A4.4 The program module SYSREL

SYSREL (System Reliability Analysis) determines the probability of unions (series systems) of intersections (parallel systems) of componental failure sets (minimal cut sets) to first order, i.e. it computes

$$P(\mathcal{F}) = P\left[\bigcup_i \bigcap_j \{h_{ij}(X) \leq 0\}\right] = P\left[\bigcup_i \bigcap_j \{g_{ij}(U) \leq 0\}\right]$$

Input into SYSREL is the logical structure of the system in terms of a minimal cut set and the componental limit states in terms of equivalent hyperplanes represented by the gradients and equivalent safety indices as produced by FORM/SORM or COMREL via the utility EQUHY. SYSREL is capable to handle arbitrary dependencies between random variables and system components. Furthermore, SYSREL allows the computation of sensitivity and importance measures for the uncertain variables and for the components in the system. SYSREL includes an accurate computation scheme for the multinormal integral required not only in system reliability but also in many other fields. The probabilities of unions of failure events are determined by an efficient algorithm for the so-called Ditlevsen-bounds. The latest version has an optimization module which can locate the joint  $\beta$ -point of a cut set of failure domains with which more accurate results can be achieved. This

module is especially suited to deal with problems with many component failure domains in high-dimensional uncertainty spaces. Also, it can compute conditional probabilities and is capable to deal with events given as equalities thus enabling the accurate determination of conditional probabilities for arbitrary types of conditioning events. Not too large systems can be handled directly via the interactive version ESYS.

The package includes a number of useful utilities such as DISPAR which computes distribution parameters for given moments of the distribution and vice versa. CUTALG determines a minimal cut set representation of a system out of a fault-tree representation as required for SYSREL. In some problems the utility RESPON has been found useful. It produces various kinds of suitable response surfaces for complicated input/output relationships, for example, when the problem involves very expensive structural analyses. The response surface can later be used as or in a state function. Again interactive versions are available. For a part of the mentioned stochastic models some appropriate statistical tools for parameter estimation, the quantification of statistical uncertainties and various kinds of hypothesis testing are available upon request. These tools are especially adjusted to the needs of a further use in reliability calculation. One larger set of such programs is for life time data especially in fatigue. Further, some special Rosenblatt transformations to take into account statistical uncertainties also exist.

#### A4.5 Problem size

FORM, SORM, COMREL and SYSREL can directly handle problems with 40 to 60 random variables and more than 30 system components on a PC. The executables then have a size of about 200 KB. FORM is always delivered in a double precision version. For SORM, COMREL and SYSREL the (default) DOUBLE PRECISION is optional although recommended. The programs are usually delivered as object codes but most of the programs are also available as FORTRAN-77 source codes. Installations are also possible on computers above PC level without any of the above restrictions.

RCP GmbH  
Nymphenburgerstr. 134, D-8000 München 19, Tel 49/89/1231275, Fax 49/89/1234013  
RCP Denmark  
Teglade 17p, DK-9550 Mariager. Tel/Fax 45/98/542017

## APPENDIX 5. PROPOSAL FOR A CODE FOR THE DIRECT USE OF RELIABILITY METHODS IN STRUCTURAL DESIGN

Reprint of Working Document of November 1989 of the  
JOINT COMMITTEE ON STRUCTURAL SAFETY (Associations  
supporting the JCSS: CEB, CIB, ECCS, FIP, IABSE, IASS, RILEM)

### Introduction

This is the first document of an envisaged series of publications, prepared by individual authors but discussed within the Joint Committee on Structural Safety (JCSS), in particular within its Working Party. They are referred to as "working documents" since they generally will give information on the state of development of certain concepts or subjects, rather than giving approved guidelines. Where a document is officially approved by the Plenum of the JCSS, this will be identified explicitly.

This document is a first step towards a code for direct use of reliability methods in design.

Previous JCSS documents as, for example the "General Principles on Reliability for Structural Design" also published by IABSE, were mainly concerned with providing the background for a reliability based code. It is the general opinion of the JCSS Working Party, that reliability methods have advanced to an extent, that they may not only be used for deriving safety provisions in codes. A design which utilizes the full statistical information available and the advantages of a direct probabilistic modelling is possible — if only relevant for — special situations. These special situations may arise, for example, where a major part of the design information needs to be updated to account for specific conditions of the project or where detailed failure analyses are required.

It is well understood, that this type of code will never replace present (deterministic or reliability-based) codes. However, it may serve as a fundamental code which is supplemented by codes giving rules for common design.

With this document it is intended to show, how a code for direct use of reliability methods may look like. Main emphasis is given on identifying those conventions and models which need to be codified. It is far from being a complete proposal. In the present form the document addresses reliability experts only, i.e. — as a potential code — it does not intend to promote the general understanding of reliability concepts. This issue may be disputable.

This document has been discussed within the JCSS Working Party and the basic ideas and concepts are approved. Some details of modelling, e.g. concerning model uncertainties and numerical values, in particular for safety indices, mainly reflect the opinion of the authors. Also, the terminology and some conceptual details are still under discussion.

Irrespective of these reservations, publication is supported in order to initiate discussions and exchange of comments at an early stage. The document will be revised subsequently.

Marita Kersken-Bradley  
for the Working Party  
(General Reporter of the JCSS)

Julio Ferry Borges  
(President of the JCSS)

## PROPOSAL FOR A CODE FOR THE DIRECT USE OF RELIABILITY METHODS IN STRUCTURAL DESIGN

O. Ditlevsen, H.O. Madsen

### Contents

1. Preface
2. General
3. Concept of adverse state
4. Basic variables and uncertainty modeling
5. Concept of event margin
6. Reliability requirements
7. Action modeling
8. Structural resistance modeling
9. Reliability models
10. Reliability calculation methods
11. List of symbols
12. General bibliography

Appendix 1. Example of Reliability Requirements

Appendix 2. Example of action model parameters

Appendix 3. Example of model uncertainty specifications

### 1. PREFACE

When making considerations about structural safety it is essential to appreciate that a measure of safety based on a general probabilistic model in general does not express a pure physical property of the structure in its environments of actions. Rather the safety measure is a decision variable that embraces the applied knowledge about the strength properties of the structure in relation to the actions on the structure. The value of the safety measure therefore may change in both directions with the amount and quality of the information on basis of which it is calculated.

With this philosophy in mind the structural reliability theory becomes a design decision tool based on scientific methods rather than being a scientific

theory itself aiming at a description of the "truth of nature". It may be looked upon as a formal language of rational thinking to facilitate good engineering decisions in the process of the design of structures. It should contain several formal elements and mathematical composition rules to allow for inclusion of all sorts of relevant information of sufficient confidence to let it effect the decisions. On the other hand, it should not be too rich of elements forcing the user of this reliability theory to make almost non-verifiable value assignments to which the design decisions are unreasonably sensitive. The consequence is that reliability theories for codes of practice should contain certain restrictive standardized value assignments.

In this context "code of practice" means a model universe agreed upon as a basis for design decisions. This agreement is thought of as made within the group of parties of concern (e.g. the designer, the manufacturer, the owner, the user, the last two parties possibly being represented by the public authorities). The code of practice may in this sense be specific for a given project, or it may be more general as a part of public building regulations. Thus the terminology "code of practice" as applied herein is an abstraction that should not be tied to existing types of codes of practice. In the same spirit the term "code committee" should be interpreted as the group of parties agreeing on a code of practice.

The following text aims at presenting an example (a model) of a code of practice enabling reliability methods for design. The code text is given in parallel with an explanatory text (in roman). The latter does not have the status of a code. The terminology has been discussed within the JCSS-Working Party but general agreement has not been reached. The terminology is therefore up to revision.

### 2. GENERAL

*It is a fundamental requirement of this code that the reliability measure is relative in the sense that it induces an ordering of any set of structures according to their reliability with respect to any well-defined adverse event. Furthermore, for each structure it is required that the measure induces an ordering of any set of adverse events. It must even possess sufficient generality to allow for an ordering of any set of pairs: (structure, adverse event).*



A reliability ordering relation like

$$(\text{structure 1, adverse event 1}) < (\text{structure 2, adverse event 2})$$

may be needed for different types of structures for which the adverse events are not the same.

The question of whether there is an absolute interpretation of the reliability measure is less important for the applications. Often there is no direct physical relative frequency interpretation related to the measure. Rather such an interpretation is related to the relative frequency of no adverse event occurring in the consistent long run use of the reliability analysis methodology in the absence of gross errors (mistakes).

*This code allows for design on the basis of a reliability measure that deviates from the reliability measure defined herein provided it is within the scope of probability theory and well-documented by scientific methods and arguments.*

*If the reliability requirement is given in terms of a value of the reliability measure of this code, but an alternative reliability measure is used for the design decisions, a corresponding transformation of the requirement must be made. This transformation must be such that the alternative reliability measure when meeting the requirement leads to at least the same structural dimensions as obtained by use of the code reliability measure when both measures are applied on a sufficiently representative example structure.*

*Further details on reliability requirements are given in Section 6.*

### 3. CONCEPT OF ADVERSE STATE

*The structural performance of a whole structure or part of it should be described with reference to a specified set of adverse states beyond which the structure no longer satisfies the performance requirements. Each adverse state is the boundary of an adverse event declared to be so by the committee setting up the performance requirement. A binary description of the performance is inherent in the adverse event concept.*

Examples of adverse events are:

- loss of static equilibrium of the structure, or a part of the structure, considered as a rigid body,
- rupture of critical sections of the structure caused by exceeding the ultimate strength, possibly reduced by repeated loading, or the ultimate deformation of the material,
- transformation of the structure into a mechanism,
- loss of stability,
- progressive collapse,
- deformations which affect the efficient use or appearance of structural or non-structural elements,
- excessive vibrations producing discomfort or affecting non-structural elements or equipment,
- local damage, including cracking, which reduces the durability of a structure or affects the efficiency or appearance of structural or non-structural elements.

### 4. BASIC VARIABLES AND UNCERTAINTY MODELING

*The uncertainties of the mechanical models and their parameters as used in the process of making decisions are represented in terms of concepts from the mathematical probability theory.*

*Among the parameters of relevance some are presented as being basic variables in the sense that they are assumed to carry the entire input information to the mechanical model.*

Typically the basic variables are material parameters, external action parameters, and geometrical parameters. All other parameters are functions of these basic variables. The functions are defined by the geometrical properties of the structure, the action model and the mechanical model. Typically they are cross-section resistances, member buckling resistances, load effects, areas, volumes, safety margins, event margins, etc.

In the simplest case of modeling the basic variables may be joined into a finite-dimensional vector. Then the uncertainties of the problem is modeled

by letting this vector, or a subvector of it, be a vector of random variables.

The concept of basic variables should not be confused with the probabilistic concept of mutual independent random variables. The basic variables are defined as the free input variables in the mechanical model before the probabilistic properties are defined. (In the standard mathematical analysis these variables are called the independent variables while a function of the independent variables is called the dependent variable).

The imposed probabilistic properties may imply that there is mutual stochastic dependence between the basic variables after these have been declared to be random variables. An example of a pair of basic variables is the compressive strength and the modulus of elasticity at zero stress both measured on the same concrete test cylinder. Usually these two basic variables, when considered to be random variables, are modeled as being mutually dependent.

*Within given classes of structural design problems the joint distribution types of the basic random variables are standardized in the code. These standardizations are defined in subsequent sections either directly in distributional terms or in terms of one-to-one transformations into Gaussian random variables.*

Basic variables may more generally be functions in time and space. The action history within a given time interval is an example of a basic variable. Also such functions may be uncertain. The corresponding probabilistic concept is that of a random process or a random field.

*If the mechanical model contains input variables which represent outputs from other mechanical models the joint distribution type of these input variables must be consistent with the standardized distribution types of the code after these have been transformed by the latter models.*

*If some input variables represent information from prototype testing the joint distributional type of these variables must follow from a mechanical model of the prototype test. This model relates the test results to the relevant basic variables for which the code gives distribution type specifications. Statistical uncertainty should be taken into account in this deduction (see*

*below).*

*Uncertainties from all essential sources must be evaluated and integrated into the reliability model. Types of uncertainty to be taken into account are physical (intrinsic) uncertainty, statistical uncertainty, and model uncertainty.*

Physical uncertainty is the ubiquitous background randomness the level of which may or may not be controlled by active means. Statistical uncertainty is due to limited information as it is provided by a sample of finite size. Model uncertainty is due to the necessary idealizations on which the physical model formulation and the distributional model formulation are based. The corresponding errors are more or less unknown. This type of uncertainty may for each adverse event be described as uncertainty of the corresponding adverse state surface.

*Statistical uncertainty. If the design decisions are based on a small sample of observations of a basic variable (or a function of basic variables such as for prototype testing), statistical uncertainty must be quantified in the decision model as follows. By use of a well-documented natural conjugated prior distribution to the standardized distribution type of the actual random variable or, if a natural conjugated distribution does not exist, by use of a prior of mathematical form as the posterior, or by use of a non-informative prior, a predictive posterior distribution is calculated. This distribution must be applied in the reliability analysis.*

The prior distribution is a probabilistic model of the knowledge about the parameters of the distribution of the considered random variable (or vector)  $X$  before some new independent data are available (usually in the form of an outcome of the vector  $(X_1, \dots, X_n)$  with all  $X_i$  mutually independent and distributed like  $X$ ). The posterior distribution is a conditional distribution of the parameters given the prior information and the sample data. The predictive posterior distribution is the conditional distribution of  $X$  given the prior information and the sample of data.

The posterior density is obtained as being proportional to the product of the likelihood function and the prior density (according to Bayes' formula).

The prior density is said to be non-informative (or diffuse) if the posterior density and the likelihood function are proportional (or almost proportional within the domain of non-zero posterior density). The likelihood function is defined by the joint distribution of  $X_1, \dots, X_n$  considered as a function of the parameters.

Corresponding to any fixed choice of a diffuse prior the family of posterior densities is closed under multiplication by the likelihood function. Thus any density from this family used as a prior density leads to a posterior density within the family. Under certain conditions on the type of distribution of  $X$  (the distribution must belong to the exponential family), the sample size parameter  $n$  in the general expression for the posterior density can be extended from the positive integers to the positive real numbers. This extension leads to a larger family of densities which is also closed under multiplication by the likelihood function. This extended family is called the family of natural conjugate densities to the type of distribution of  $X$ . The definition reflects that the probabilistic model of uncertain knowledge formulated by the choice of the prior density needs not be restricted by the fact that sample sizes are integers.

*Model uncertainty. The reliability model must be formulated such that it contains elements which are able to reflect model uncertainty at least in a crude way. This may be done for each given adverse state surface (or each given part of a adverse state surface) by associating a judgmental random vector  $J = (J_1, \dots, J_n)$  to the basic random vector  $X = (X_1, \dots, X_n)$ . Assuming that there is a one to one transformation by which the standardized joint distribution of  $X$  is mapped into a Gaussian vector  $T(X)$  the judgment random vector  $J$  is added to  $T(X)$ . Next the sum is back-transformed into  $Y = T^{-1}(T(X) + J)$ . The distribution of  $Y$  is determined by formally assuming that the joint distribution of  $(T(X), J)$  is Gaussian. Finally, the random vector  $Y$  replaces  $X$  in the reliability calculation.*

*Constants in the model can also be chosen to carry model uncertainty. In that case the constants are interpreted as additional basic random variables.*

Models given in current codes of practice are often strongly biased to the

conservative side. In order to make a rational reliability analysis by use of such a code-specified model, the bias should be investigated in order to remove it by assigning a proper non-zero mean vector to the judgmental random vector  $J$ .

Some detailed recommendations about model uncertainty are referred in Appendix 3.

## 5. CONCEPT OF EVENT MARGIN

*An event margin corresponding to a specified event is defined as a function of the basic variables with the property that it takes a negative value if and only if the event occurs.*

Event margins related to adverse states are denoted safety margins.

*Information becoming available after the design of a structure can be formulated in the framework of event margins. This additional information can be utilized in reliability updating.*

During fabrication and service of a structure additional information of the performance becomes available. Actions, material parameters and geometrical parameters are realized physically and the design analysis can therefore be updated. Important additional information may arise from material compliance control, proof loading, prototype testing, vibration measurements, action measurements, etc. A part of this information is related to design parameters directly, but some information is related to a functional relation between design parameters and possibly also other parameters such as measurement and inspection errors.

## 6. RELIABILITY REQUIREMENTS

*Decision theoretical principles can be applied in order to obtain optimal reliability levels. It is required, however, that the intangible part of the cost of failure is chosen such that it is comparable in value to the population of failure costs associated with present code based engineering practice when declaring*

*this practice to be optimal. The population of failure costs must correspond to a population of structures with similar failure consequences as for the considered structure.*

Optimal reliability levels depend on the reference period. Under stationary conditions and under due consideration of the time sequence of failure occurrences and the capitalization of costs to present value, the optimal reliability level for the entire reference period decreases with the length of the reference period.

*Required minimal reliability levels make sense only together with a specification of a reference period. The reference period should generally equal the anticipated lifetime of the structure (e.g. 100 years). For the reliability measure defined herein the required levels are obtained by calibration to structural dimensions following from present code based engineering practice.*

Transient structures are present during construction or remodeling of the structure.

*For transient structural situations shorter reference periods with corresponding special reliability requirements can be relevant.*

The principle of calibration to existing practice should be kept in operation in a reasonably long transition period during which there will be a backward correcting influence on current practice justified by the experience following from the use of this probabilistic code. After this transition period the reliability requirements (or, alternatively, the requirements on the intangible failure costs including possible risk aversion costs) associated with this code (and gradually established during the transition period) will represent superior practice. .LP There are structural reliability problems in which some few of the relevant basic variables are very difficult to assess by value. This shows up in the form of uncertainty distributions that are considerably more dispersed than the distributions of the other basic variables. In such cases it can be useful to report intermediate reliability analysis results in the form of fragility functions. A fragility function is a conditional probability of failure

given the values of one or more basic variables and considered as a function of these values. The fragility function gives information about the sensitivity of the reliability with respect to variation of the conditioning basic variables. Robustness is indicated by slow variation while sensitivity is indicated by steep variation. By this the fragility function indicates where to put the efforts to narrow down the uncertainty distribution of the conditioning variables.

*Direct requirements to the fragility functions of continuously varying basic variables are not given. In particular cases where a requirement to a fragility function seems to be needed, it will be indirect through a specification of a mandatory joint distribution of the conditioning basic variables.*

Another type of fragility function is obtained by conditioning on different damage states of the structure. This concept is relevant in connection with accidental events, that is, events of strong actions but occurring with such rareness that it is not economically optimal to design the structure to resist these actions without being damaged. In a discretized model each of these accidental events can be defined formally by formulating a structural model by removing one or more elements or parts of the undamaged structure. The failure probability of each of these damaged structures under the relevant actions occurring in a specified time period after the occurrence of the accidental event (evacuation period or repair period) is a fragility function over the set  $\{A, B, C, \dots\}$  of models of damaged structures. The probability distribution over the set  $\{A, B, C, \dots\}$  may be so difficult to assess in practice that code requirements to the formulation of the damaged structures (i.e. to the definitions of A, B, C, ...) and the corresponding fragility function may be needed. The purpose is to ensure structural robustness against progressive collapse, that is, to prevent that the consequences of an accidental event are out of proportion with the extend of the accidental event itself.

*Reliability levels to be used in progressive collapse investigations can be based on decision theoretical principles under the same conditions as stated in the first paragraph in this section.*

Models with non-stationarity properties are relevant when foreseeing gradual changes in environmental conditions, action history trends, creep phenomena, material deterioration or aging, soil consolidation etc.

*In case of non-stationarity modeling of resistance and action properties the reference period should be the anticipated lifetime of the structure. Alternatively a sequence of consecutive shorter than lifetime reference periods can be considered. After each reference period inspection and suitable testing of the structure should be made together with investigations about the actual actions. Upon a reliability updating analysis it can be decided if the structure can be used without changes in the next reference period or whether change of use, strengthening or even demolition should be undertaken. Decisions theoretical principles can be used under the same conditions as stated in the first paragraph in this section.*

*The same inspection and reliability updating decision strategy should be used when considering existing structures which suffer from damage or for which changes of use and environmental conditions are actual.*

*Also the information obtained from regular damage monitoring inspections can be used as the basis for decisions about reliability preserving measures applied to the existing structure.*

The occurrence of a serious adverse event sometimes raises a public (political) demand to the engineering profession of using increased reliability requirements with respect to this type of event. Such public reactions are reasonably taken into account in the long run revision of the code with respect to proper updating of the intangible costs related to the experienced adverse events.

*Decision theoretical principles should be applied to reevaluate the codified reliability levels in case of experienced adverse events causing severe public reactions.*

## 7. ACTION MODELING

*The action models set up for structural reliability analysis must be given*

*sufficiently detailed structure to allow reasonable treatment of action effects caused by the random variation of the actions across the structure and in time. Furthermore the models should allow the study of combined action effects due to several simultaneous actions.*

*For the macro scale variation in time of an action the basic variable model element is a pulse which is characterized by at least three parameters: a level parameter (intensity), a duration parameter, and an occurrence parameter. Micro scale variations are described by random processes defined by their covariance properties or, equivalently, by their spectral properties.*

Such processes are generally derived from the family of Gaussian processes.

There are several applicable stochastic action models based on the concept of an action pulse. The Ferry Borges-Castaneta model (FBC action model) is one of the simplest and most operational of these models: The design life time is for a given action type divided into time intervals of equal length. Within each interval the action has a constant intensity level (possibly vectorial). This intensity level is an outcome of a random variable (vector). The intensities in different intervals can be mutually dependent. Such a sequence of action pulses is called an FBC action history.

Any pair of FBC action histories describing two different actions are related to each other at least in the way that the number of intervals in the one action history is an integral multiple of the number of intervals of the other action history.

The problem of combining the action effects of  $n$  different FBC action histories is called an FBC  $n$ -combination problem.

*The FBC action model can be applied in the reliability analysis of the supporting structures of buildings.*

Appendix 2 gives an example of a table of prescribed values that specifically define the FBC action models suited for building design.

*Other models for action variation in time than the FBC action model can be applied in the reliability analysis of the supporting structures of buildings.*

*Any other such model must be calibrated to model the essential properties of the FBC action model specified in this code, that is, to have the same distribution type for the pulse amplitude, approximately the same mean durations of the pulse, and approximately the same occurrence parameter.*

There are several practicable alternatives to the FBC action model. Here only one alternative will be mentioned. It is the Poisson pulse model for action histories with short duration pulses that are separated in time. If the pulse durations are short as compared to the mean time distance between consecutive time points for pulse starts and several such action processes with nonnegative pulse amplitudes are considered for linear combination with nonnegative influence coefficients, the load effect coincidence model of Wen is applicable for determining the distribution of the maximal load effect within a given time period.

The model of Wen assumes that the combined load effect process is a Poisson pulse process defined as the sum of several mutually independent Poisson pulse processes. Each of these processes have pulses with amplitudes that either correspond to pulses that are not overlapping in time with any other pulses, or to an overlapping of two pulses from two selected different load processes, or to overlapping of three pulses from three selected different load processes, etc. With  $n$  being the number of processes for combination there are as many processes with their pulses made up of  $i$  overlapping pulses as the number of ways  $i$  processes can be selected out of  $n$  processes (that is,  $\binom{n}{i}$  ways).

The probability assignments in the Wen coincidence model is made in such a way that the model leads to a slightly conservative evaluation (that is, overestimations of the maximal combined load effect).

*Asymptotic extreme value distributions can only be applied as approximations to the exact distribution of the maximal load effect if special documentation of the validity is given. As documentation the asymptotic argument is not sufficient.*

The convergence of the exact extreme value distribution for increasing

sample size depends strongly on the generating distribution. Often the convergence is extremely slow giving gross upper tail deviations between the exact extreme value distribution corresponding to a relevant sample size and the corresponding asymptotic distribution.

*For any type of structure the reliability analysis must be based on a complete set of action models that together approximately reproduce the essential probabilistic properties of all the different types of relevant action effects that can be expected to come from the future environments and uses of the structure.*

*For a given structure simple demonstrations or general experience can often be sufficient to justify the exclusion of some of these models with corresponding analyses.*

The necessary detailing of the actions models depends on the sensitivity of the considered action effect, that is, on the filtering and the amplification properties as well as the material properties of the structure. Thus different types of action models should be applied dependent on the relevant phenomenon such as long time creep effects, immediate static effects, action effects of concern in fatigue life estimation, dynamical effects that can be amplified by resonance phenomena or self-induced vibrations, impact effects, etc. Also the analysis of progressive collapse phenomena may require its own special action modeling.

For most reliability investigations it is not essential that the action models reproduce the individual action effect histories in their details. The approximate reproduction of the basic probabilistic properties of the action effect histories is often sufficient.

*Standardized distributions and process types to be used in action models for specific reliability investigations can be given in an action code to be used in parallel with this code on reliability methods. In such cases the action load model standardizations given in this code are secondary to the standardizations of the action code.*

## 8. STRUCTURAL RESISTANCE MODELING

*The reliability requirements of this code are for specific failure modes of structural elements such as bars, beams, columns, plates, walls etc. The reliability analysis of larger structural subsystems or the entire structural system must be made in order to investigate whether there are significant system effects on the reliability, and in particular whether such effects are to the side of serious decrease of the reliability.*

*This code allows the use of decision analytical principles to obtain reasonable system reliability levels provided an assessment of the intangible costs of failure has been made as required in Section 6.*

*Standardized distributions of material properties to be used in structural resistance models can be given in material oriented codes to be used in parallel with this code on reliability methods. Standardized distributions given in such material codes are superior to the standardizations given in this code. It is required that a standardized distribution of a material property assigns zero probability to any set in which no value is possible due to the physical definition of the considered material property.*

The requirement of zero probability on physically impossible sets is formulated for guidance of material code writers. It ensures against having for example negative strengths helping the reliability. However, this requirement does not prevent that calculational easier distributions that are not obeying the requirement be used as approximations provided it can be justified that the inconsistency with the physical possibilities contributes insignificantly to the calculated reliability.

Reliability analyses should always be made for each of the structural elements but also to a certain extend for the entire structural system. The structural elements can be defined as smaller or larger subsystems of the entire structural system. Required reliability levels obtained in accordance with the principles in Section 6 will depend on the element definition and will be different for the elements and for the entire system. The required system reliability should be dependent on whether the system failure is of local nature (it can be an element failure) or whether it is global implying much more severe consequences.

The fact that overestimation of the system reliability follows from the use of discretized structural models in the system reliability analyses points at the need for making sensitively analysis with respect to the fineness of the discretization.

*Reliability comparisons of different structural systems must be made on the same level of fineness of discretization of the structural system. When comparing the obtained system reliability with the element reliabilities the effect of the discretization on the system level must be taken into account.*

The present state-of-the-art of the methods of structural system reliability analysis does not yet permit formulation of very specific code requirements concerning system reliability levels.

A difficult problem is the dependency of the structural resistance on the action history to which the structure is subjected.

*System reliability analyses referred to in this code are those for which the system resistance is obtained under fixed in time but random load configurations with the load level increasing proportional with a scalar parameter starting from the self weight load situation and ending at the final random load level situation.*

The rigid ideal-plastic theory plays a particular role in the theory of structural system reliability due to the independence of the system resistance of the load history, that is, due to the existence of a load history independent adverse state of collapse. The reliability corresponding to a given reference period is then determined by the probability that the load path does not cross out through the fixed adverse state surface during the reference period.

Other difficult problems are related to the modeling of the constitutive behavior of the potential failure elements in the discretized structural system. In particular problems show up in the modeling of the post failure behavior including problems of post failure interaction between the internal generalized force components. Also here the rigid ideal-plastic theory shows substantial simplifications by adopting the associated flow rule (that is, the condition that the generalized strain vector is orthogonal to the yield condi-

tion surface).

*Rigid ideal-plastic theory can be used as the basis for system reliability analyses given that the structural system shows ductile collapse behavior. Dependent on the implied degree of idealization of the "real" constitutive behavior more or less biased and dispersed model uncertainty random variables (effectivity factors) must be introduced in the mechanical model. The evaluation of these factors must be justified by proper example studies that include the possibility of having elastic-plastic stability failures.*

For discretized systems with brittle failure elements the linear elastic-ideal brittle systems play a role as a practicable study object given that the actions grow in a fixed configuration proportionally from zero to a final random level. In the linear elastic-ideal brittle system each failure element is removed upon failure.

*For brittle systems this code conservatively defines failure of the system as occurring when the first failure of a single failure element occurs. The idealization to a linear elastic-ideal brittle system with suitable model uncertainty variables can be used for analysis of the conservativeness of this definition. Relaxation of the required reliability must be properly justified.*

Difficulties of taking the influence of the action history into account have motivated introduction of intuitive definitions of adverse states for structural systems. These definitions are characterized by lack of explicit concern about how the final load on the structure has been established. The system reliability analysis is made solely within a universe of a finite number of random variables describing final actions and resistances. Such adverse state definitions formulated on the basis of engineering judgment and intuition will herein be termed as "jury definitions".

*The effect of structural redundancy can be comparatively studied by use of intelligently chosen jury definitions of the adverse state. Extreme care should be taken when drawing conclusions about the reliability of the real structural system on the basis of such analysis.*

## 9. RELIABILITY MODELS

*All decreasing functions of the probability  $p_f$  of some adverse event are equivalent measures of safety. They all define the same reliability ordering with respect to adverse events in the space of basic variables (Section 2).*

*A standard reliability measure may be chosen to be the generalized reliability index. It is defined as*

$$\beta = -\Phi^{-1}(p_f)$$

*Another equivalent reliability measure is the probability of the complement of the adverse event (the safe event)*

$$p_s = 1 - p_f$$

*The probability  $p_f$  is calculated on the basis of the standardized joint distribution type of the basic variables and the standardized distributional formalism of dealing with both model uncertainty and statistical uncertainty (Section 4).*

*The standardized distribution type related to the basic variables of the action models are defined in the action code (Section 7) while the standardized distribution types related to the basic variables of the resistance models are defined in the specific material related codes (Section 8).*

*If no specific distribution type is given as standard in the action and material codes this code for the purpose of reliability evaluations standardizes the clipped (or, alternatively, the zero-truncated) normal distribution type for basic load pulse amplitudes. Furthermore, the logarithmic normal distribution type is standardized for the basic strength variables.*

*Deviations from specific geometrical measures of physical dimensions as length are standardized to have normal distributions if they act at the adverse state in the same way as load variables (increase of value implies decrease of reliability) and to have logarithmic normal distribution if they contribute to the adverse state in the same way as resistance variables (decrease of value implies decrease of reliability).*



The standardization of the logarithmic normal distribution type implies that all the corresponding basic variables of the Gaussian formulation space are obtained by logarithmic transformation of the corresponding basic variables of the original physical formulation space. For the determination of the second moment representation of the basic variables of the Gaussian formulation space the following formulae are valid:

$$E[\log X] = \log[X] - \frac{1}{2} \log(1 + V_X^2)$$

$$\text{Var}[\log X] = \log(1 + V_X^2)$$

$$\text{Cov}[\log X, \log Y] = \log\left(1 + \frac{\text{Cov}[X, Y]}{E[X]E[Y]}\right)$$

in which the pair  $(\log X, \log Y)$  is bivariate Gaussian, and

$$\text{Cov}[\log X, Y] = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{E[X]}$$

in which the pair  $(\log X, Y)$  is bivariate Gaussian. In these formulae 'log' is the natural logarithm.

*In special situations other than the code standardized distribution types can be relevant for the reliability evaluation. Such code deviating assumptions must be well documented on the basis of a plausible model that by its elements generates the claimed probability distribution type. Asymptotic distributions generated from the model are allowed to be applied only if it can be shown that they by application on a suitable representative example structure lead to approximately the same generalized reliability indices as obtained by application of the exact distribution generated by the model.*

*Experimental verification without any other type of verification of a distributional assumption that deviates strongly from the standard is only sufficient if very large representative samples of data are available.*

*Distributional assumptions that deviate from those of the code must in any case be tested on a suitable representative example structure. By calibration*

*against results obtained on the basis of the standardizations of the code it must be guaranteed that the real (the absolute) safety level is not changed significantly relative to the requirements of the code.*

The reliability model of this code is a formalistic set of rules that allows engineering decision making on the basis of a mathematically rational processing of available well documented information. It is sufficient for the engineering decision making that the set of rules defines an ordering relation with respect to safety. However, such an ordering relation is not necessarily considered to be sufficient for political decision making. Even though the political decision making problem is outside the scope of this code, some comments are relevant.

Among political decision makers it is often taken for granted that the result of a probabilistic evaluation made by experts has an absolute meaning in the sense of predicting a relative frequency of the considered adverse event. In what sense it is interpretable as a relative frequency is rarely made clear. (Whether this interpretation of the concept of probability is necessary in political decision making is subject to discussions of great controversy among philosophers concerned with the scientific basis of statistics and decision making). Within the topic of structural reliability theory the practicing of this philosophy implies far reaching restrictions imposed on the probabilistic statements that can be given. These restrictions take the form of conditioning statements concerning all those uncertainty sources that are not of direct relative frequency nature. That means, for example, that the uncertainty originating from the lack of precise information about the relevant distribution types cannot be coped with except by giving a "worst case" statement. These are of types as Chebycheff bounds. A reliability measure based on such bounds can be defined. However, it is questionable as a tool for design decision making, first, because it is difficult to calculate except for some idealized particular examples, second, because it, as a worst case statement, in principle increases with more information, be it good or bad information.

Alternatively, if the worst case philosophy is not followed the decision maker is given a set of conditional probability statements which honestly can be claimed to predict the relative frequency of occurrence of the adverse

event given the truth of the conditioning statements. In a structural reliability context the conditioning statement is in general a conjunction of many conditioning statements of widely different nature. In order that the decision maker can utilize the given probabilistic information he or she must weigh the different conditioning statements against each other. This means that he or she is forced into the problem of combining the conditional probabilities according to the rule of total probability using weighting probabilities that have no direct relative frequency interpretation. These probabilities are called Bayesian probabilities (or subjective probabilities). The mental process of judgment obviously calls for aiding standardizations of distribution types implying that only the values of some few parameters have to be assessed by professional judgment.

*Design by maximization of utility (minimization of total cost) can be made within the framework of this code. However, the cost consequence of some adverse event like loss of human life must be calculated on the basis of the postulate that current design practice as it is approved by the authorities is optimal.*

The target values of the generalized reliability index specified in this code (Appendix 1) have been derived by calibration to current design practice. The corresponding value of the formal failure probability  $p_f$  is substituted into the cost equation for the considered structure and the failure cost  $c$  is determined such that  $p_f$  is the optimal failure probability.

Application of optimization design methods is relevant in the case of designing strengthening systems for an existing structure about which updated information is available. By using the failure cost  $c$  obtained by calibration to current design practice of a similar new structure (no updated information available for this, naturally) it is possible to make rational decisions about the dimensions of the strengthening system including the two extreme possibilities of either making no strengthening or complete renewal of the structure.

## 10. RELIABILITY CALCULATION METHODS

The numerical value of the reliability measure is obtained by a reliability

calculation method. Due to the computational complexity a method giving an approximation to the exact result is generally applied.

*Two fundamental accuracy requirements are:*

- *Overestimation of the reliability due to use of an approximative calculation method be within limits generally accepted for the specific type of structure.*
- *The overestimation of the generalized reliability index must not exceed 5%.*

The accuracy of the reliability calculation method is linked to the sensitivity with respect to structural dimensions and material properties in the resulting design. General design practice has inherent rules of acceptable errors since dimensions and material properties are often only available in discrete classes. An error larger than 5% is rarely accepted.

When the modeling of the basic random variables is in terms of a random vector the first-order reliability method (FORM) in general results in a sufficiently accurate approximation to the reliability measure. The FORM analysis is based on a transformation of the basic variables  $X$  into standardized normal variables  $U$  by the transformation

$$U_i = \Phi^{-1}(F_i(X_i | X_1, \dots, X_{i-1}))$$

The distribution of  $X_i$  conditioned upon the value of  $(X_1, \dots, X_{i-1})$  is thus used. The transformation simplifies when the basic random variables are mutually independent. After the transformation the adverse state surface in the normal space is approximated by one or more tangent hyperplanes at the locally most central points. The probability content in the approximation to the failure set is used as an approximation to the failure probability.

If no prior experience with the specific type of adverse state is available, the FORM result should be checked. This can be done locally around the locally most central points by an asymptotic second-order reliability method (SORM), where the adverse state surface is approximated by a second-order surface at the locally most central points, or by an importance sampling

around the locally most central points. Globally it should be checked that the most central point has been identified. This can be done by a Monte Carlo simulation, e.g., using directional sampling.

Besides computing the reliability measure it is recommended to check the sensitivity of this reliability measure to all input parameters, i.e., the deterministic basic variables and distribution parameters for the random basic variables. The asymptotic results for the sensitivity of the generalized reliability index are in general sufficiently accurate for this task.

## 11. LIST OF SYMBOLS

$Cov[ , ]$	: covariance
$D[ ]$	: standard deviation
$E[ ]$	: mean value
$F( )$	: distribution function
$I$	: judgmental random factor
$J$	: judgmental random variable
$n$	: number of shifts per year
$p_f$	: failure probability
$p_s$	: survival probability
$q_c$	: characteristic value of velocity pressure
$s_k$	: characteristic value of ground snow load
$T$	: transformation of random vector into a Gaussian vector
$U$	: standardized normal variable
$V_X$	: coefficient of variation of $X$
$X$	: random variable
$Y$	: random variable
$\beta$	: reliability index
$\mu$	: distributional location parameter
$\Phi$	: standard normal distribution function
$\rho[ , ]$	: correlation coefficient
$\sigma$	: distributional dispersion parameter

## 12. GENERAL BIBLIOGRAPHY

### Books on Reliability Methods:

(update per August 1990 of the list in the JCSS document of November 1989)

1. Ang, A.H.-S. and Tang, W.H., Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol. I&II, John Wiley, 1984.
2. Augusti, G., Baratta, A. and Casciati, F., Probabilistic Methods in Structural Engineering, Chapman and Hall, 1984.
3. Benjamin, J.R. and Cornell, C.A., Reliability, Statistics and Decision for Civil Engineers, Mc-Graw Hill, 1970.
4. Bolotin, V.V., Wahrscheinlichkeitsmethoden zur Berechnung von Konstruktionen, VEB Verlag für Bauwesen, 1981.
5. Borges, J.F. and Castanheta, M., Structural Safety, Laboratorio Nacional de Engenharia Civil Lisbon, 1971.
6. Ditlevsen, O., Uncertainty Modeling with Applications to Multidimensional Civil Engineering Systems, Mc-Graw Hill, 1981.
7. Ditlevsen, O. and H.O. Madsen, Structural Reliability Methods (SBI-rapport 211: Bærende konstruktioners sikkerhed. 1990; under translation).
8. Madsen, H.O., Krenk, S. and Lind, N.C., Methods of Structural Safety, Prentice-Hall, 1986.
9. Melchers, R.E., Structural Reliability and Predictions, Ellis Horwood/J. Wiley, 1987.
10. Schueller, G., Einführung in der Sicherheit und Zuverlässigkeit von Tragwerken, Verlag Wilhelm Ernst & Son, Berlin, 1981.
11. Thoft-Christensen, P. and Baker, M., Structural Reliability Theory and Its Applications, Springer Verlag, 1982.
12. Thoft-Christensen, P. and Murotsu, Y., Application of Structural Systems Reliability Theory, Springer Verlag, 1986.
13. Wen, Y.-K., Structural Load Modeling and Combination for Performance and Safety Evaluation. Developments in Civil Engineering, Elsevier, Amsterdam, 1990.

## Present Codes and Model Codes:

14. American Institute of Steel Construction (AISC), "Load and Resistance Factor Design Specifications," AISC, Chicago, 1986.
15. American National Standards Institute (ANSI), "American National Standard Minimum Design Loads for Buildings and other Structures," ANSI A58.1, ANSI, New York, 1982.
16. CEB, "First Order Concepts for Design Codes," CEB Bulletin No.112, Munich, 1976.
17. CEB, "Common Unified Rules for Different Types of Construction and Material, Vol. I," CEB Bulletin No.116, Paris, 1976.
18. CIRIA, "Rationalisation of Safety and Serviceability Factors in Structural Codes," CIRIA Report No. 63, London, 1977.
19. ISO, "General Principles on Reliability for Structures," ISO/DIS 2394, 1984.
20. NBS, "Development of a Probability Based Load Criterion for American National Standard A58," U.S. Department of Commerce, NBS Special Publication 577, 1980.
21. Nordic Committee for Building Structures (NKB), 'Recommendation for Loading and Safety Regulations for Structural Design,' NKB Report No. 36, 1978.
22. Ontario Ministry of Transportation (OMTC), "Ontario Highway Bridge Design Code," OMTC Downsview, Ontario, 1983.

## Appendix 1. Example of Reliability Requirements

The following table gives an example of required values of the generalized reliability index (Section 9). The values are obtained by calibration to Danish practice for design of buildings and similar structures (source: The Nordic Committee on Building Regulations, Ref.20)

(reference period 1 year)	type of failure:		
	ductile with reserves	ductile without reserves	brittle
safety class: low	3.1	3.7	4.2
normal	3.7	4.2	4.7
high	4.2	4.7	5.2

Table 1 Example of reliability index requirements.

The table shows a dependency of the required values of both the reliability class and the type of failure. Both classifications refer to the consequences of failure and reflect a calibration in accordance with decision theoretical principles. The reliability class solely refers to the use of the structure and the nature of the nearest surroundings of the structure (densely populated surroundings or rural surroundings). The type of failure classification refers to possible warnings of failure and less dramatic development of the failure. Moreover, the table column marked "ductile with reserves" refers to substantial carrying capacity reserves not utilized in the mathematical model of the adverse state.

Required reliability index values for other reference periods than the 1 year period must be determined by use of a suitable action model as for example the FBC action model specifically defined by the table in Section 7.

## Appendix 2. Example of action model parameters

The following table of scalar data is an example of prescribed values (up to revision) suited for design in Denmark. The numbers may be different in different geographical regions. (Alternatively, such kinds of tables are placed in an action code).

The table contains prescribed values for building design. For loads on different floors a suitable model formulation should include the possibility of having correlation between intensities. This correlation is particularly important for parking houses.

Drift of snow must be considered in the roof load model. This model contributes to a part of the mathematical definition of the actual adverse state in the physical formulation space. The model is formulated by use of form factors defined in the action code under due consideration of the topography of the building and its landscape surroundings. In principle it may contain both the random snow load variable  $\max\{0, X_{\text{snow}}\}$  the random wind load variable  $\max\{0, X_{\text{wind}}\}$ , and the random wind direction. The wind direction is discretely or continuously distributed across 8 sectors with a probability distribution derived from the wind rose for the actual locality. Within the same pulse interval of the wind load the wind direction is kept constant. Snow load, wind load, and wind direction may be considered stochastically independent of the loads on the floors. For the wind load the values of  $\mu$  and  $\sigma$  in the table corresponds to an equivalent uniform velocity pressure (constant influence function = 1) over a square with side length 50 m.

It is emphasized that  $\mu$  and  $\sigma$  are not the mean value and the standard deviation respectively of the load intensity. The parameters  $\mu$ ,  $\sigma$ , and  $n$  are determined by requiring (1) that

$$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^n = 0.98$$

in which  $x$  is the 98-percentile in the distribution of the annual extreme for the considered load which means a return period of 50 years, (2) that  $\Phi(\mu/\sigma)$  is the average fraction of the season period with the considered action type

acting, and (3) that  $n\Phi\left(\frac{\mu-x_0}{\sigma}\right)$  is the average number of periods per year in the season period with the load intensity larger than  $x_0$ .

For the wind load  $x_0$  is put to that fraction of the characteristic velocity pressure  $q_c$  that corresponds to a mean number of exceedances of 20 per year. For other types of actions  $x_0$  is put to zero.

The conditions are fulfilled with the degree of approximation which is enforced by the restrictions in the FBC model about the interval divisions.

	No. of shifts per year $n$	$\mu$ kN/m <sup>2</sup>	$\sigma$ kN/m <sup>2</sup>	
self weight	1/100			
floor loads:				
residences	long term	1/20	0.5	0.15
	short term	400	-0.75	0.42
offices and schools	long term	1/20	0.60	0.20
	short term	400	-2.00	1.00
hotels	long term	1/40	0.30	0.12
	short term	200	-1.50	0.86
parking houses	400	-3.50	1.80	
nature loads:				
snow load (ground)*	5	-0.20 $s_k$	0.45 $s_k$	
wind load**	400	-0.32 $q_c$	0.34 $q_c$	

\*  $s_k$  is the characteristic value of the ground snow load given in the action code. Snow load is only occurring in the half year of winter.

\*\*  $q_c$  is the characteristic value of the velocity pressure given in the action code.

NOTE: Values are up for revision.

*Table 2 Example of action model parameters: Data for the Ferry Borges-Castanheira load model for buildings valid for a 1 year time period (calibrated crudely to Danish codes). Load intensity =  $\max\{0, X\}$  (clipped Gaussian),  $X$  Gaussian,  $E[X] = \mu$ ,  $D[X] = \sigma$ .*

### Appendix 3. Example of model uncertainty specifications

Since a basic strength variable according to this code is transformed logarithmically an additive model uncertainty judgmental random variable  $J$  in the transformed space (Section 4) corresponds to a judgmental random factor  $I$  on the basic strength variable  $X$  itself. The expectation and the coefficient of variation of  $XI$  can be determined from the formulae

$$E[XI] = E[X]E[I](1+\rho[X,I]V_XV_I)$$

$$1+V_{XI}^2 = (1+V_X^2)(1+V_I^2)(1+\rho[X,I]V_XV_I)^2$$

It is on the basis of calibrations recommended to split the judgmental factor  $I$  into three mutually independent lognormally distributed factors  $I_1, I_2, I_3$  for which the following table is given (source: The Nordic Committee on Building Regulations, Ref.21)

The classifications in the table are as follows:

- j=1: Degree of realism in the prediction of failure by the idealized failure criterion.
- j=2: Uncertainty concerning the relation between the strength parameter in the structure and the specified substitute of the parameter defined in the description of the structure.
- j=3: Extent of control on site of the identity of materials and of the building process.

These values of  $V_{I_j}$  and  $\rho[X,I_j]$  (open to revision) are used in the formulae

$$E[I] = E[I_1]E[I_2]E[I_3]$$

$$1+V_I^2 = (1+V_{I_1}^2)(1+V_{I_2}^2)(1+V_{I_3}^2)$$

$$1+\rho[X,I]V_XV_I = \prod_{j=1}^3 (1+\rho[X,I_j]V_XV_{I_j})$$

j=1	good	normal	bad
j=2	small	medium	large
j=3	strict	normal	gentle
$V_{I_j}$	0.04	0.06	0.09
$\rho[X,I_j]$	-0.3	0.0	0.3

Table 3 Example of judgmental factor statistics.

For the load pulse amplitudes in the FBC action model a model uncertainty correction of the form  $\max\{0, X_i + J_i + J\}$  can be applied. The index  $i$  refers to the  $i$ th pulse in a given action history and  $J$  is common for the entire action history. The random variables  $J, J_1, \dots, X_1, \dots$  can be assumed to be mutually independent unless there are strong reasons to assume otherwise. Calibration studies indicate that the standard deviations of all the judgmental random variables can reasonably be put to (up to revision)

$$0.15[\mu + \sigma\Phi^{-1}(0.98^{1/n})]$$

in which  $n, \mu, \sigma$  are the values given in the table defining the FBC action model in Section 7.

## STIKORD

- Absolut kontinuert fordeling 182  
 Afbrydningsmængde 358  
   minimal 358  
 Anvendelsesgrænsetilstand 34  
 A posteriori-tæthed 74, 271  
 A priori-tæthed 74, 271, 285  
 Asymptotisk sikkerhedsindeks 167  
 Axiomer for præferenceordning 304
- Bayes' formel 75  
 Bayesk statistik 75, 271  
 Behrens fordeling 283  
 Belayevs formel 386  
 Bernoullifølge 253  
 Beslutningskriterier 347  
 Beslutningsproblemet 300  
 Beslutningsregel 307  
 Betinget kovariansmatrix 115  
   middelværdivektor 115  
   sikkerhedsindeks 122, 158  
 Brudgrænsetilstand 34  
 Bunden last 53  
 Bødefunktion 401, 408
- Cauchy's tæthed 276  
 "chi i anden" fordeling ( $\chi^2$ ) 145, 232,  
 275, 291  
 Cut set 358
- Designværdi 404  
 Designværdiformat 404  
 Diagonalisering af kovariansmatrix 132  
 Differentiable afbildninger 190  
   flader 191  
 $\mathcal{D}$ -trunkeret standardiseret gaussisk  
 fordeling 241  
 Dynamisk virkende last 53
- Eksisterende konstruktioner 322  
 Eksperimentel bestemmelse af modelfejllast 288  
 Eksplosionslast 53  
 Eksponentialfordeling 260  
   forskudt 413  
 Eksponentielle familie 272  
 Enkeltpunkt FORM, SORM 170  
   multipel FORM, SORM 172  
 Ensformig fordeling 413  
   retningssimulering 232  
 Enskorrelerede normalfordelte variable  
 158, 162  
 Erstatningsvektor 405  
 Estimator 72
- Falsifikation 82, 96  
 FBC-proces 254  
 FBC n-kombinationsproblem 254  
 Fejltagelser 318, 352  
 Ferry Borges—Castanheta lastmodel 254  
 Filtret Poisson "square wave" proces  
 390  
 Flerpunkt FORM 172  
   SORM 172  
 Forbindelsesmængde 359  
   minimal 359  
 FORM, enkeltpunkt 170,  
   enkeltpunkt multipel 172  
   flerpunkt 171,  
 Formuleringsinvarians 38, 129  
 Forventningsværdi 103  
 Fréchet's fordeling 414  
 Fremskrivning 118  
 Frie fysiske formuleringsrum 182  
   variable 32  
 Fri last 53  
   Fysiske fluktuationer 67  
 Følsomhedsanalyse 209  
 Følsomhedsfaktor for parallelsystem 219  
   for seriesystem 226  
   mht parameter 215, 248  
   mht udeladelse af usikkerhed 210, 248
- Gammafordeling 275, 414  
 Gaussisk proces 377, 384  
 Generaliserede sikkerhedsindeks 148  
 Geometriske beregninger ved lineær  
 regression 119  
 Geometrisk sikkerhedsindeks 131  
   tolkning 107, 110, 120, 134  
 Gevinstfunktion 308,  
   usikker 315  
 Globalt mest centralt  
 grænsetilstandspunkt 131  
 Grænser for sikkerhedsindekset 156  
 Grænsetilstand 32  
 Grænsetilstandsflade 36  
   næsten plan 169  
 Grænsetilstandspunkt, mest centrale 131  
 Gumbels fordeling 405, 413
- Haleapproksimationsprincip, normale  
 192, 202  
 Halefølsomhedsproblemet 180  
 Halvrumstrunkeret standardiseret gaussisk  
 fordeling 240
- Idealplastiske systemer 368  
 Idealskøre systemer 368  
 Ikke-informativ a priori tæthed 74, 283  
 Ikke-negativ definit funktion 377  
 Informationsmæssig usymmetri 193  
 Informationstyper for eksisterende  
 konstruktioner 322  
 Intermitterende laster 256, 261, 389
- Kalibrering af matematisk model 287  
   af norm 398  
 Kapitalinvestering 311  
 Karakteristisk værdi 45, 402  
 Klippede stokastiske variable 258, 265  
 Konsekvensberegningsprincippet  
 27, 150, 354  
 Konveks grænsetilstandsproblem 36  
   polyhedral sikker mængde 153  
 Korrelationskoefficient 110  
   multipel 117, 122  
 Kovarians 102  
 Krumning 167, 170
- Lasthistorie 352  
 Lastkombination 56, 353, 390  
 Lastmodeller af Poissonstype 389  
 Latpulser 253, 258, 389  
 Lastreduktionsfaktoren  $\psi$  54, 60, 267  
 Lastvejsafhængighed 366  
 Likelihedsfunktion 75, 271  
 Lineær model 288  
   regression 111  
 Lineært associerede 128, 134  
 Logaritmisk normalfordeling  
 42, 178, 405, 414  
   diagram for 478  
 Lokalt mest centrale grænsetilstandspunkt  
 131,  
   bestemmelse ved lineær regression  
 133, 138,  
   bestemmelse ved normale  
 haleapproksimationsprincip 194
- Lotteri 302  
 Manglende forhåndsinformation 74, 277  
 Marginale transformation 183  
 Middelværdi 102  
 Modelusikkerhed 78, 296, 316  
 Modelusikkerhedsvektorfelt 90  
 Monetær værdi 309, 312  
 Monte Carlo metoder 228, 256, 296, 387  
 Multipel korrelationskoefficient 117, 122  
 Måleusikkerhed 67, 114, 116
- Natafs fordeling 185  
 Nataftransformationen 185, 413  
 Naturlast 53  
 Naturligt konjugerede a priori-tætheder  
 273  
 Nedretrunkeret normalfordeling 260  
 Nedstyrtningslast 54  
 Normale haleapproksimationsprincip  
 192, 202  
 Normalfordeling 75, 273, 405, 413,  
   diagram for 479  
   flerdimensional 123, 204, 224  
   formler for 76, 477  
 Normalfordelte variable, simulering af 235  
 Normaliserede rum 106  
 Normer og normproblematik  
 95, 98, 101, 181, 301, 312, 397  
 (DS 409: 47, 53, 60, DS 410: 54)  
 Normformat 399  
 Normkalibrering 398  
 Normoptimering 399, 403, 407  
 Nyttefunktion 304,  
   usikker 315  
 Nyttelast 53  
 Næsten plan grænsetilstandsflade 169  
 Nøddefinition 364  
 Nødhypotese 369
- Objektivitet 95  
 Opdatering af sikkerhedsindeks 328  
   ved revision af grænsetilstanden 353  
   ved systemformulering 329  
 Optimalitetspostulatet 28, 301, 312, 401  
 Optimal sikkerhed 310
- Parallelsystem 138, 356  
 Parameterfølsomhedsfaktor 215  
 Partialkoefficient 43, 48, 402  
 Partiel kovariansmatrix 113  
 Penalty function 401  
 Permanent last 53

"Personlige" præferencer 301  
 Poissonproces 377  
 Poisson "square wave" proces 383, 390  
 Polyhedral approksimation 170  
 Potensproduktmodel 289  
 Pragmatisk falsifikationstest 97  
 Processer 376  
 Proportional oplastning 363, 368  
 Prædiktiv tæthed 276  
 Præferenceordning 302  
 Prøvebelastning 324

Rackwitz—Fiessler algoritmen 256  
 Rayleighs tæthed 279,  
 forskudt 413  
 Reciprok effektivitet 246  
 Refleksiv ordning 303  
 Regneregler for kovarianser 103  
 for middelværdier 103  
 Regningsmæssig værdi 45, 48, 404  
 Regression, lineær 111  
 Regulær grænsetilstand 34  
 Relationsinformation 323  
 Residualkovariansmatrix 113  
 Residualvektor 112  
 Retningssimulering 230,  
 ensformig 232  
 Retningssimuleringsfordelinger 237  
 Revision i det lange løb 82, 97  
 RF—algoritmen 256  
 Rices formel 384  
 Rosenblatttransformationen 186

Sammensat lotteri 302  
 Sandsynligheder betingede på  
 nulhændelser 330  
 Seriesystem 170, 357  
 Sikkerhedsfaktor 36,  
 central 39  
 Sikkerhedsindeks, asymptotisk 167  
 betingede 122  
 generaliserede 148  
 geometriske 131  
 simple 107  
 Sikkerhedsklasse 63  
 Sikkerhedsmargen, lineær 105  
 Sikre mængde 33  
 Simple sikkerhedsindeks 107  
 Simulering 228  
 Simulering af normalfordelte variable 235  
 Simuleringsfordeling 230  
 Simuleringsvariabel 231

Singulære punkter 172  
 Skjulte sikkerheder 354  
 Socioøkonomisk enhed 309,  
 værdi 312  
 SORM 170, 172  
 Specifik tyngde 54  
 Stabilkonfigurationsmængde 365,  
 sekventielle 365  
 Standardiserede normale tæthed 123  
 Statisk virkende last 53  
 Statistisk usikkerhed 71, 271, 284, 316  
 Stikprøveinformation 71, 277, 284, 323  
 Stjerneformet mængde 230  
 Stokastiske felter 253, 376  
 processer 253, 376  
 Students t—fordeling 276, 291  
 diagram for 479  
 Subjektivitet 96  
 Sufficiente stikprøvefunktioner 272  
 Systematisk fejl 70  
 Svigtflade 36  
 Svigtmængde 33  
 Svigtomkostning 400  
 Svigtsandsynlighedsgrænser  
 for idealskøre systemer 373  
 for lastkombinationer 393  
 for processer 380  
 for seriesystemer (Ditlevsen—bounds  
 439) 156, 158, 174

Termisk brandlast 54  
 Tidsudvikling af last og styrke 361  
 Tie set 359  
 Tilfældigtalsgenerator XOR 476  
 Tolerance 20  
 Transformationer 182  
 Transitiv ordning 302  
 T—varighedsindhylning til FBC—proces  
 254

Ubestemthed 70  
 Udeladelsesfølsomhedsfaktoren 210  
 Udkrydsningsintensitet 382,  
 for skalær proces 384  
 for gaussisk proces 385  
 for vektorproces 386  
 Ulykkeslast 53

Vandret masselast 53  
 Variabel last 53  
 Varians 103  
 Variationskoefficient 40

Verifikation 82  
 Vikarierende materialeparameter 64  
 Vurderingsvariable 85

Weibullfordeling 414  
 Wens lastsammenfaldsmodel 414

Ækvivalente konsekvenser 303  
 sikkerhedsindeks 181  
 svigtomkostninger 314



Nedenstående Pascalprogram definerer en version af den såkaldte XOR-tilfældigtalsgenerator. Princippet er følgende: (i) Et heltal beregnes ved en blandet multiplikativ generator og et andet heltal beregnes ved en Fibonacci generator. (ii) Disse to tal kombineres bit for bit ved den såkaldte XOR-operator (0 XOR 0 = 0, 0 XOR 1 = 1, 1 XOR 0 = 1, 1 XOR 1 = 0). (iii) Resultatet normaliseres til et tal mellem 0 og 1.

For at få 9 decimalcifre i resultatet udfører programmet operationerne (i) og (ii) to gange med uafhængigt startede XOR-generatorer. Det første her ved frembragte heltal multipliceres med 32768, og resultatet adderes til det andet frembragte heltal, hvorefter (iii) udføres.

Generatoren kræver 6 startværdier som input, og outputtet er det resulterende pseudo-tilfældige tal og seks opdaterede startværdier.

Generatoren er vel testet efter statistiske principper beskrevet i H. Dalgas Christiansen: *Random Number Generator in Several Dimensions. Theory, Tests, and Examples*. Report, IMSOR, DTH, 1975.

Følgende seks heltal 9575, 9356, 28105, 26798, 5994, 29633 anvendt som startværdier til generatoren giver en følge af pseudo-tilfældige tal, der er tilfredsstillende med hensyn til en lang række forskellige statistiske tests.

```
TYPE IVEC = ARRAY[1..6] OF INTEGER;
```

```
FUNCTION EXOR(VAR R: IVEC): REAL;
```

```
VAR H: INTEGER;
BEGIN
  H:=((R[1] SHL 9 SHR 1)+(R[1] SHL 3 SHR 1)) SHL 1 SHR 1;
  H:=(R[1]+H) SHL 1 SHR 1; R[1]:=(H+10935) SHL 1 SHR 1; H:=(R[2]-32767)+R[3];
  IF H>-51 THEN H:=H-32717; IF H>-51 THEN H:=H-32717; R[2]:=R[3]; R[3]:=H+32767;
  H:=(R[4] SHL 8 SHR 1)+(R[4] SHL 3 SHR 1) SHL 1 SHR 1;
  H:=(R[4]+H) SHL 1 SHR 1; R[4]:=(H+1139) SHL 1 SHR 1; H:=(R[5]-32767)+R[6];
  IF H>-61 THEN H:=H-32707; IF H>-61 THEN H:=H-32707; R[5]:=R[6]; R[6]:=H+32767;
  EXOR:=(R[1] XOR R[3])*32768.0+(R[4] XOR R[6])+1.0/1073741025.0;
END;
```

Pascalprogram for XOR-tilfældigtalsgenerator på IBM-compatible PC.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad \varphi'(x) = -x \varphi(x)$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt = 1 - \frac{1}{2} \left[ 1 + \sum_{n=1}^6 a_n x^n \right]^{-16} + \epsilon(x); \quad |\epsilon(x)| < 1.5 \cdot 10^{-7}$$

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0.04986 & 73470 & a_3 = 0.00327 & 76263 & a_5 = 0.00004 & 88906 \\ a_2 = 0.02114 & 10061 & a_4 = 0.00003 & 80036 & a_6 = 0.00000 & 53830 \end{array}$$

$$\Phi^{-1}(x) = t - \left[ \sum_{n=0}^2 b_n t^n \right] / \left[ 1 + \sum_{n=1}^3 c_n t^n \right] + \epsilon(x); \quad t = \sqrt{-2 \log x}$$

$$\begin{array}{lll} b_0 = 2.515517 & c_1 = 1.432788 & |\epsilon(x)| < 4.5 \cdot 10^{-4} \\ b_1 = 0.802853 & c_2 = 0.189269 & \\ b_2 = 0.010328 & c_3 = 0.001308 & \end{array}$$

Kilde: *Handbook of Mathematical Functions*. U.S. Department of Commerce. National Bureau of Standards. Applied Mathematics Series 55. 1972.

$$\int \Phi(x) dx = x \Phi(x) + \varphi(x); \quad \int x \Phi(x) dx = \frac{1}{2} \left[ (x^2-1) \Phi(x) + x \varphi(x) \right]$$

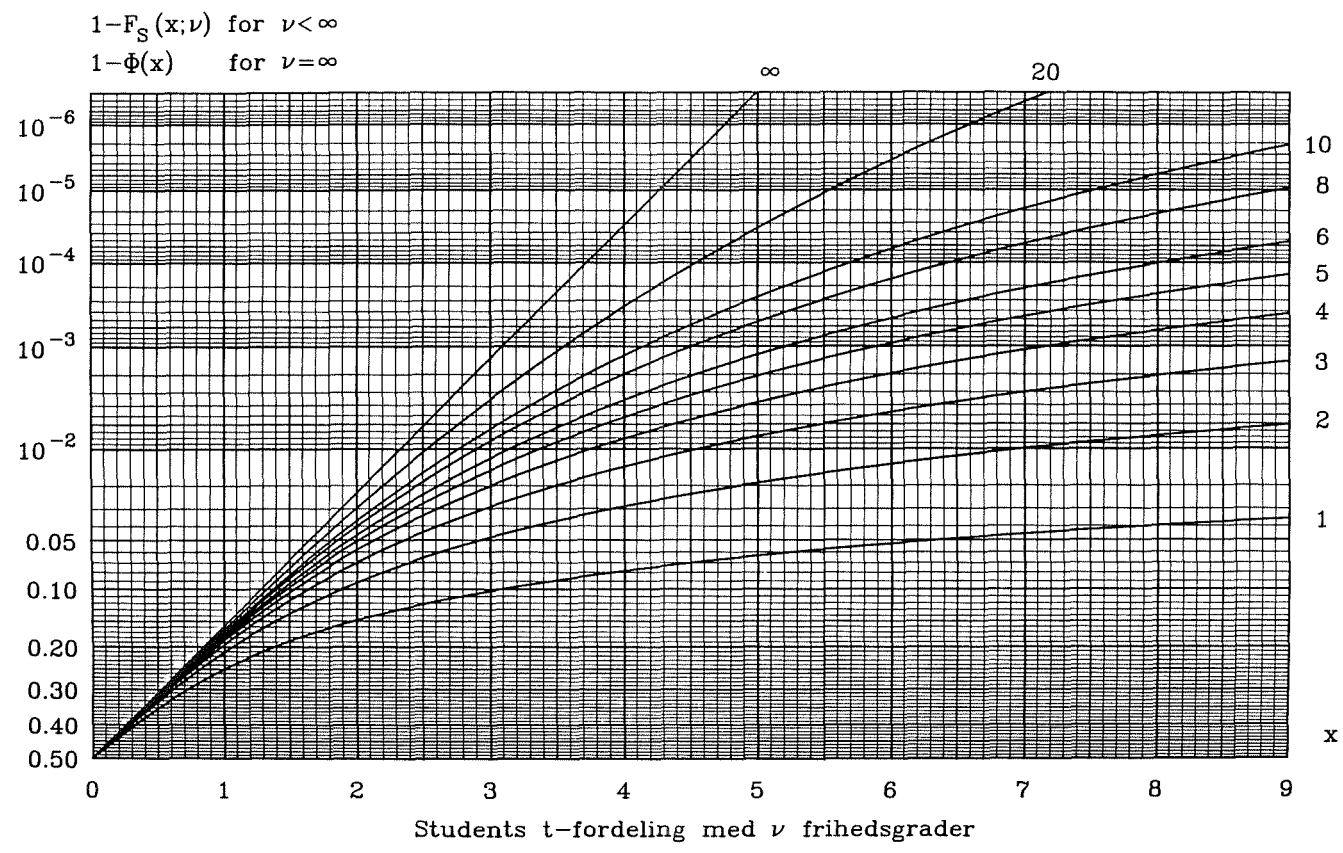
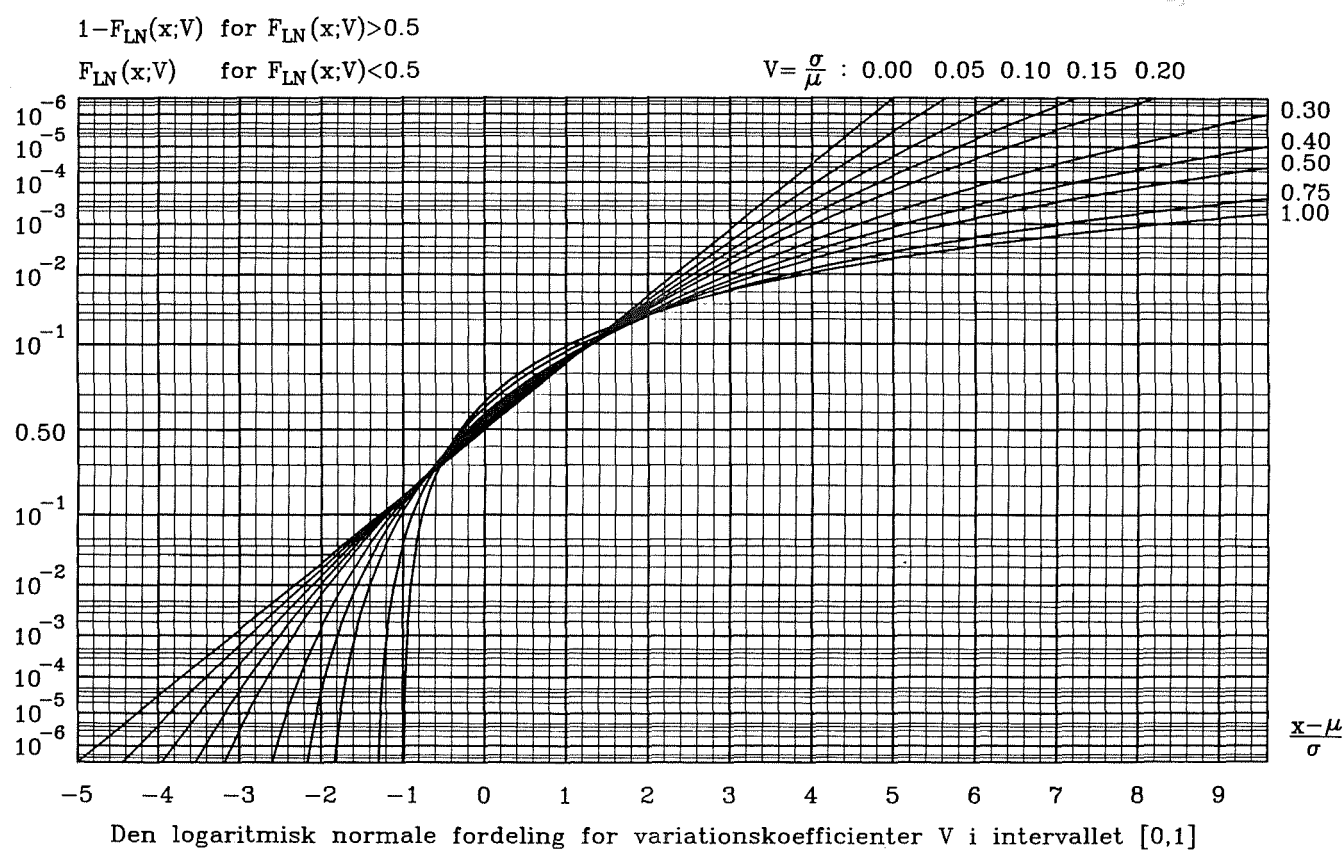
$$\int \Phi(x)^2 dx = x \Phi(x)^2 + 2 \varphi(x) \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Phi(\sqrt{2} x)$$

$$\int x \Phi(x)^2 dx = \frac{1}{2} \left[ (x^2-1) \Phi(x)^2 + 2x \varphi(x) \Phi(x) + \varphi(x)^2 \right]$$

$$\varphi(x)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varphi(\sqrt{2} x); \quad \int \varphi(x)^2 dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Phi(\sqrt{2} x)$$

$$\int x \varphi(x) \Phi(x) dx = -\varphi(x) \Phi(x) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Phi(\sqrt{2} x)$$

$$\int x^2 \Phi(x) dx = \frac{1}{3} \left[ x^3 \Phi(x) + (x^2+2) \varphi(x) \right]$$



Artikler om bærende konstruktioners sikkerhed fremkommer i mange forskellige tidsskrifter. De mest benyttede er de mere almene gamle tidsskrifter

*Journal of Engineering Mechanics*, ASCE.

*Journal of Structural Engineering*, ASCE.

(ASCE = American Society of Civil Engineers) der begge har eksisteret gennem 116 årgange og kommer i meget store oplag, samt de mere specialiserede nyere tidsskrifter

*Structural Safety* (siden 1982), Elsevier Science Publishers, B.V., Amsterdam.

*Civil Engineering Systems* (siden 1984), E. & F.N. Spon Ltd., London.

*Probabilistic Engineering Mechanics* (siden 1986), Computational Mechanics Publications, Southampton.

De største internationale kongresser om bærende konstruktioners sikkerhed er:

ICASP: *International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering*. Afholdes hvert fjerde år, sidst i 1987, første gang i 1971.

ICOSSAR: *International Conference on Structural Safety and Reliability*. Afholdes hvert fjerde år, sidst i 1989, første gang i 1973.

cx-1

Bærende konstruktioners sikkerhed varetages i dag ved partialkoefficientnormer, der forudsætter »sædvanlige« konstruktioner underkastet »sædvanlig« statistisk analyse. Kan sædvanlig statistisk analyse med tilhørende formelle sikkerhedsregler uden anfægtelser erstattes af regneprogrammer for avanceret analyse? Hvad gør man, når konstruktionen er usædvanlig? Hvad med eksisterende konstruktioner? Bogen behandler den probabilistiske filosofi og metodik for sikkerhedsanalyse, og det klargøres, at også denne kræver normgivne regler. Ud over at være tænkt som lærebog henvender bogen sig til projekterende ingeniører og normskrivere.

